УДК 593.3

Н. А. Гук, канд. физ.-мат. наук

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
(E-mail: nguk@farlep.dp.ua)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Рассматривается метод и алгоритм идентификации физических и теплофизических параметров тонкостенных систем при неоднородном внешнем воздействии. Предлагается определять неизвестные характеристики материала из решения обратной задачи термоупругости с использованием различных способов аппроксимации параметров. Декомпозиция вектора параметров приводит к необходимости решения параллельных задач существенно меньшей размерности. Предложенный подход позволяет определять указанные параметры в условиях их существенной неоднородности.

Розглядається метод і алгоритм ідентифікації фізичних і теплофізичних параметрів тонкостінних систем при неоднорідній зовнішній дії. Пропонується визначати невідомі характеристики матеріалу з розв'язку оберненої задачі термопружності з використанням різних способів апроксимації параметрів. Декомпозиція вектора параметрів приводить до необхідності розв'язання паралельних задач істотно меншої розмірності. Запропонований підхід дозволяє визначати вказані параметри в умовах їх істотної неоднорідності.

Введение

При исследовании тепловых процессов в энергетике, металлургии и других областях техники часто возникает проблема идентификации внутренних параметров тепловых систем. Для идентификации характеристик материалов могут быть применены как экспериментальные методы [1, 2], так и теоретические, основанные на решении коэффициентных обратных задач механики деформируемого твердого тела [3–6].

Аппарат обратных задач, в соответствии с общей стратегией экстремальных методов, позволяет осуществлять идентификацию параметров в результате численного моделирования рассматриваемого процесса и поиска минимума функционала-невязки. Главной проблемой применения такого подхода является необходимость формулирования операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и измеряемыми величинами.

В работе [4] получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для широкого множества многокомпонентных распределенных систем различных параметров и параметров различных внешних воздействий, используемые в градиентных методах идентификации. Между тем, известные решения коэффициентных обратных задач [5, 6] включают, как правило, малое число определяемых параметров и базируются на решении стационарных задач теплопроводности при однородном нагреве. Однако известно, что диаграммы σ–ε, полученные при однородном и неоднородном нагружениях, существенно отличаются друг от друга. Можно предположить, что теплофизические и механические свойства материала в нестационарных неоднородных задачах являются не параметрами, а функциями температуры, что не позволяет определять их с помощью итерационных процессов [4] в силу их плохой обусловленности.

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий идентифицировать изменение термомеханических и физических свойств материала в зависимости от температуры в задачах термоупругости, когда поле температур существенно неоднородно по объему материала.

Постановка задачи

Пусть в трехмерной области $\Omega = \{X \mid X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, 0\le x_1 \le a; 0\le x_2 \le b; 0\le x_3 \le h\}$ определена система термоупругого деформирования

$$\sigma_{ij,j}(\alpha(T), T, u_i) = F_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора деформаций ε_{ij} задается в таком виде:

$$\sigma_{ij}(\alpha(T), T, u_i) = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T)(T - T_0)]\delta_{ij},$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3k} + 3\alpha(T)(T - T_0), \qquad \lambda = \frac{\nu E(T)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E(T)}{2(1+\nu)}, \qquad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \tag{2}$$

а связь между деформациями ε_{ij} и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

здесь F_i, u_i – проекции внешних сил и перемещений на оси Ox_i; $\alpha(T)$ – коэффициент температурного расширения; λ, μ – коэффициенты Ляме; k – модуль объемного расширения; ν – коэффициент Пуассона; $E(T)$ – модуль Юнга; T, T_0 – конечная и начальная температура тела.

В области Ω изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$\left(\lambda_T(T)T_{,i}\right)_i + q = C(T)\dot{T}, \tag{3}$$

где $\lambda_T(T)$ – коэффициент теплопроводности; q – мощность теплового источника; $C(T)$ – удельная теплоемкость.

В начальный момент тело не нагрето и не деформировано. На поверхностях $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ заданы условия закрепления. На поверхностях $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ сформулированы граничные условия 2-го и 3-го рода

$$\left.\frac{\partial T(x_1, x_2, t)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0, \qquad \left.\lambda_T(T)\frac{\partial T(\overline{\Omega}, t)}{\partial x_3}\right|_{x_3=h} = q(t), \tag{4}$$

где $\overline{\Omega}$ – область воздействия теплового потока.

Будем предполагать, что тело нагрето настолько, что физические $E(T)$ и теплофизические характеристики материала $\alpha(T)$, $\lambda_T(T)$, $C(T)$ изменяются существенно, но при этом процесс деформирования остается упругим.

Считаем, что на поверхности $x_3 = 0$ в точках X_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ известны (измеряются) значения нормальных перемещений и температур

$$u_3(X_n) = u_3^*, \tag{5}$$

$$T(X_n) = T^*. \tag{6}$$

Решение обратной задачи предполагает восстановление вектор-функции параметров $H = \{E(T), \alpha(T), \lambda_T(T), C(T)\}$, компонентами которого являются функции, характеризующие физические и теплофизические характеристики материала по известным следам (5), (6) решения прямой задачи.

Функционал-невязка будет иметь вид аналогично [4]

$$J = \sum_{n=1}^{N}\left(u_3(X_n, H) - u_3^*(X_n)\right)^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(T(X_n, H) - T^*(X_n)\right)^2. \tag{7}$$

Метод решения

Для определения компонент вектора нормальных перемещений $u_3(X_n, H)$ и температур $T(X_n, H)$ необходимо построить решение прямой задачи (1)–(4). Совместно с заданными (измеренными) векторами $u_3^*(X_n)$, $T^*(X_n)$ это позволяет сформировать вектора невязок $\varepsilon(u_{3_{in}}, H) = \left(u_3(X_n, H) - u_3^*(X_n)\right)$, $\varepsilon(T_n, H) = \left(T(X_n, H) - T^*(X_n)\right)$, необходимые для формирования функционала-невязки (7).

Параметризация всех неизвестных функций задачи осуществляется путем их аппроксимации с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Для построения системы уравнений МКЭ выполняется дискретизация области Ω следующим образом:

– для решения прямой задачи вводится сетка с координатами узлов X_s, где $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}\}$, $s = 1, 2, \ldots, S$ и соответствующими узловыми значениями функции u_{i_s} в виде вектора $U(X_s) = \{u_{i_s}\}$;
– для представления условия (7) в дискретной форме вводится сетка с координатами узлов X_n, где $X_n = \{x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, все X_n из числа X_s, и заданными значениями функций $u_3(X_n) = \{u_{3_n}^*\}$, $T(X_n) = \{T_n^*\}$;

При численном решении сведение поиска неизвестных функциональных зависимостей $E(T)$, $\alpha(T)$, $\lambda_T(T)$, $C(T)$ к конечномерной постановке осуществляется путем их параметризации. Так, для построения решения обратной задачи вводится сетка с координатами узлов X_k, где $X_k = \{x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}\}$, на которой неизвестные функции $\{E(T), \alpha(T), \lambda_T(T), C(T)\}$ аппроксимируются таким образом, что вектор неизвестных параметров обратной задачи состоит из значений в узловых точках $H = \{E_1, \alpha_1, \lambda_{T1}, C_1, \ldots, E_k, \alpha_k, \lambda_{Tk}, C_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, K$.

Рассматриваемая система представляется в виде ансамбля четырехузловых конечных элементов. Учитывая линейный закон изменения перемещений u_1 и u_2 по толщине, неизвестные функции на элементе e задаются для локальной системы координат (μ, η, ϑ) при помощи аппроксимаций вида

$$u_1(\mu,\eta,\vartheta) = u_{10} \pm \vartheta \frac{\partial u_3(\mu,\eta)}{\partial \mu}, \quad u_2(\mu,\eta,\vartheta) = u_{20} \pm \vartheta \frac{\partial u_3(\mu,\eta)}{\partial \eta}, \quad u_3(\mu,\eta,\vartheta) = u_3(\mu,\eta),$$

$$u_3^e = B^e(\mu,\eta) u_3, \qquad T^{(e)} = B^{(e)}(\mu,\eta)\cdot T, \qquad \dot{T}^{(e)} = B^{(e)}(\mu,\eta)\cdot \dot{T},$$

где u_{10}, u_{20} – перемещения координатной поверхности $\vartheta = 0$; $u_3^T = \{u_{3_r}\} = \left\{u_3, \dfrac{\partial u_3}{\partial \mu}, \dfrac{\partial u_3}{\partial \eta}\right\}$, $T = \{T_r\}$ – векторы значений функций в узлах; $B^e(\mu, \eta)$ – функции формы.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов получаем систему уравнений в виде

$$K_U(H)U = R_T \tag{8}$$

$$C_T(H)\dot{T} + K_T(H)T = Q; \tag{9}$$

где $U^T = \{U_r\}$ – вектор узловых перемещений; Q – вектор теплового воздействия; T – вектор, учитывающий механическое и температурное нагружение; $K_U(H) = \sum\limits_e \int\limits_{\Omega^{(e)}} D^{(e)T} C^{(e)}(H) D^{(e)} d\Omega^{(e)}$, $C_T(H) = \sum\limits_e \int\limits_{\Omega^{(e)}} D^{(e)T} C_T^{(e)}(H) D^{(e)} d\Omega^{(e)}$, $K_T = \sum\limits_e \int\limits_{\Omega^{(e)}} D^{(e)T} k^{(e)}(H) D^{(e)} d\Omega^{(e)}$ – матрицы жесткости, теплоемкости, теплопроводности конструкции; $C^{(e)}(H)$, $C_T^{(e)}(H)$, $k^{(e)}(H)$ – матрицы упругости, коэффициентов теплоемкости, коэффициентов теплопроводности соответственно для всего ансамбля элементов; $D^{(e)T}$ – матрица функций формы.

В результате решения системы уравнений (8), (9) получаем векторы перемещений и температур $u_3(X_n, H)$, $T(X_n, H)$, которые вместе с заданными векторами $u_3^*(X)$, $T^*(X_n)$ позволяют сформировать функционал-невязку (7).

Для выполнения численной минимизации функционала (7) будем использовать метод Ньютона–Аффсона, тогда итерационный процесс отыскания вектора параметров будет иметь вид

$$H^{k+1} = H^k - h_k(J''(H^k))^{-1}J'(H^k), \tag{10}$$

где $J''(H^k)$ – гессиан функционала J в точке H^k; $J'(H^k)$ – градиент функционала J в точке H^k; h_k – величина шага, которую можно регулировать.

Компоненты градиента и гессиана функционала можно представить следующим образом:

$$J'(H^k) = \frac{\partial J(H^k)}{\partial H_j} = 2\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}\varepsilon_n(H^k),$$

$$J''(H^k) = 2\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}^T\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_p}\right\} - 2\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial^2 \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j \partial H_p}\right\}\varepsilon_n(H^k).$$

Линеаризуя функцию $\varepsilon_n(H^k)$ в окрестности текущего значения вектора параметров H^k в виде $\tilde{\varepsilon}_n(H) = \varepsilon_n(H^k) + \sum_{j=1}^{M}\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}^T\Bigg|_{H=H^k}(H_j - H_j^k)$ и сделав замену ее в гессиане на линеаризованную, получим, что второе слагаемое можно положить равным 0. Вводя матричные обозначения, из (10) имеем разрешающее уравнение для определения вектора H^k неизвестных параметров задачи

$$R(H^k)\Delta H^k = -G(H^k)\varepsilon(H^k), \tag{11}$$

где $R(H^k) = \left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}^T\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}$; $G(H^k) = \left\{\frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\right\}^T$, $n = 1, 2, \ldots, N, j = 1, 2, \ldots, M$.

Введем предположение о существовании наиболее информативных компонент $\Delta H^1 = \{\Delta H_j^1\}$, $j = 1, 2, \ldots, M_1$, $M_1 < M$ вектора параметров $\Delta H = \{\Delta H_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, M$, таких, что выполняется условие $\|\Delta H - \Delta H^1\|^2 \to \min$, и норма определяется $\left\|\Delta H - \Delta H^1\right\| = \sqrt{\left|\Delta H_1 - \Delta H_1^1\right|^2 + \ldots + \left|\Delta H_M - \Delta H_M^1\right|^2}$.

Тогда неизвестный вектор приращений параметров $\Delta H = \{\Delta H_j\}_{j=1,M}$ можно представить в виде двух независимых вектора ΔH^1 и ΔH^2, имеющих размерности M_1 и M_2 соответственно ($M_1 + M_2 = M$).

Зададим функции принадлежности u_j^p ($j = 1, 2, \ldots, M$, $p = 1, 2$) компонент вектора ΔH векторам ΔH^1 и ΔH^2 в виде

$$\begin{aligned} &u_{r_1}^1(X) = \delta(X - X_{r_1}); \qquad r_1 \in I^1, \qquad I^1 = \{r_{p_1}, \ldots, r_{p_{M_1}}\};\\ &u_{r_2}^2(X) = \delta(X - X_{r_2}); \qquad r_2 \in I^2, \qquad I^2 = \{r_{k_1}, \ldots, r_{k_{M_2}}\};\\ &I^1 \cap I^2 = \varnothing, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\delta(X - X_{r_p})$ – функция Дирака; M_1 – заданное число ненулевых компонент вектора ΔH^1.

Используя функции (12), сформируем матрицы

$$[D]_{M\times M} = \mathrm{diag}\{\delta(X - X_r)\}; \quad r = 1,2,\ldots M; \quad [D_1]_{M\times M} = \mathrm{diag}\{u_{r_1}^1\}; \quad [D_2]_{M\times M} = [D] - [D_1],$$

тогда ΔH^1 и ΔH^2 можно представить в виде

$$\Delta\tilde{H}^1 = \int_\Omega D_1 \Delta H d\Omega, \qquad \Delta\tilde{H}^2 = \int_\Omega D_2 \Delta H d\Omega$$

или в векторной форме

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2011, Т. 14, № 2

$$\Delta\widetilde{H}^1=\begin{bmatrix}\Delta H^1\\ 0\end{bmatrix}_{M\times 1};\qquad \Delta\widetilde{H}^2=\begin{bmatrix}0\\ \Delta H^2\end{bmatrix}_{M\times 1};\qquad [\Delta\widetilde{H}^1]+[\Delta\widetilde{H}^2]=[\Delta H]$$

где $[\Delta H^1]_{M_1\times 1}=\{\Delta H_{j_1},\ldots,\Delta H_{j_{M_1}}\}^T$, $[\Delta H^2]_{M_2\times 1}=\{\Delta H_{j_{M_1+1}},\ldots,\Delta H_{j_M}\}^T$.

Векторы ΔH^1 и ΔH^2 будем определять независимо друг от друга в виде двух параллельных алгоритмов

$$\Delta H^{1(k)}=\int_\Omega Q_1(X)\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n(H^{(k)})d\Omega;\tag{13}$$

$$\Delta H^{2(k)}=\int_\Omega Q_2(X)\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n(H^{(k)})d\Omega,\tag{14}$$

где $Q_i(X)=[Q_{i_{mn}}\cdot\delta(X),\, m=1,M_i,\, n=1,M]$, $i=1,2$ – матрицы, в которые входят искомые коэффициенты; (k)– индекс, характеризующий номер итерации процесса (11), в дальнейшем будет опущен.

На каждом шаге итерационного процесса функционал для условия $\|\Delta H-\Delta H^1\|^2\to\min$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}J_1(Q_1,Q_2)=\int_\Omega\left(\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n(H^k)-\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix}\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n^1(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n^1(H^k)\right)^T\times\\ \times\left(\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n(H^k)-\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix}\sum_{n=1}^N\frac{\partial\varepsilon_n^1(H^k)}{\partial H_j}\varepsilon_n^1(H^k)\right)d\Omega\to\min,\end{aligned}\tag{15}$$

где $\varepsilon_n(H^k)$ – невязка, полученная при фиксированных значениях вектора параметров H^k; $\varepsilon_n^1(H^k)$ – невязка, вычисленная для вектора параметров $H^k=H^1$, а интеграл рассматривается в смысле Т. Стилтьеса.

Требуется найти вид оптимальных матриц Q_1, Q_2, входящих в (13), (14) и обеспечивающих минимизацию функционала (15), при этом по аналогии с [7], необходимо выполнить условия несмещенности

$$Q_iR_i-[E]_{M_i\times M_i}=[0]_{M_i\times M_i}\tag{16}$$

и инвариантности оценивания

$$Q_iR_j=[0]_{M_i\times M_j};\qquad i\neq j;\qquad i,j=1,2,\tag{17}$$

где $[E]$ и $[0]$ – единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности; $R_i=[R_i]_{M\times M_i}$ – матрицы с ненулевыми элементами, образованные из матриц $[R]_{M\times M}\cdot[D_i]_{M\times M}$.

Эти условия присоединяются к функционалу (15) с использованием множителей Лагранжа

$$J_2(Q_1,Q_2,\overline{\psi})=J_1(Q_1,Q_2)+\int_\Omega\sum_i\overline{\psi}_i g_i d\Omega+\int_\Omega\sum_i\overline{\eta}_i f_i d\Omega,\tag{18}$$

где $\overline{\psi}^T=\{\overline{\psi}_i\}$, $\overline{\eta}^T=\{\overline{\eta}_i\}$ – векторы множителей Лагранжа; $g_i=Q_iR_j$, $f_i=E_i-Q_iR_j$; $i\neq j$; $i\leftrightarrow j$; $i,j=1,2$.

Так как функции принадлежности компонент вектора ΔH векторам ΔH^i $(i=1,2)$ u_m^i ограничены $0\le u_m^i\le 1$, $m=1,2,\ldots,M_i$ и множество U представляется в виде $U=\{u_m^1\}=\{(u_1^i,\ldots,u_{M_i}^i):0\le u_m^i\le 1,\, m=1,2,\ldots M_i\}$, то функция $L(u)=\sum_{m=1}^{M_i}J'_{2u_m}(u)u_m^i$ достигает своей нижней грани на U в точке $\overline{u}^i=\{\overline{u}_1^i,\ldots,\overline{u}_{M_i}^i\}$, где

$$\bar{u}^i = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{sign}(\psi_{jm}^T R_i^T Q_{jm} - Q_{jm}^T R_j \eta_{jm})\right]. \qquad (19)$$

Необходимые условия оптимальности для определения матриц Q_1, Q_2, получим, дифференцируя (18) по аргументам Q_{im}, ψ_{im}, η_{im}

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial Q_{im}} = 2PQ_{im} + R_j \psi_{im} - R_i \eta_{im} = [0]_{M\times 1} \\ \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial \eta_{im}} = E_{im} - R_i^T Q_{im} - = [0]_{M_i \times 1_i} \qquad\qquad i, j = 1,2\,, \\ \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial \psi_{im}} = R_j^T Q_{im} = [0]_{M_j \times 1} \end{cases} \qquad (20)$$

где матрица P имеет размерность $M\times M$ и в качестве компонент содержит величины вида $(\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_j}\varepsilon_n - \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_j}\varepsilon_i^1)(\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_k}\varepsilon_n - \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_k}\varepsilon_n^1)$, расположенные в j-й строке, k-м столбце ($j = 1, 2, \ldots, M_1$ и $k = 1, 2, \ldots, M_1$) и величины вида $\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_j}\varepsilon_n \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial H_k}\varepsilon_n^1$, расположенные в j-й строке, k-м столбце ($j = 1, 2, \ldots, M_1$ и $k = M_1 + 1, \ldots, M$; $j = M_1 + 1, \ldots, M$ и $k = 1, 2, \ldots, M_1$).

Для сокращения записи дальнейших преобразований введем следующие обозначения: $Z_i = P^{-1}R_i$; $Z_j = P^{-1}R_j$; $\Phi_{ii} = R_i^T P^{-1} R_i$; $\Phi_{jj} = R_j^T P^{-1} R_j$; $\Phi_{ij} = R_i^T P^{-1} R_j$; $\Phi_{ji} = R_j^T P^{-1} R_i$, тогда из первого уравнения системы (20) находим

$$Q_{im} = 2^{-1}(Z_i \eta_{im} - Z_j \psi_{im}). \qquad (21)$$

Умножая левую и правую части формулы (21) слева на матрицу R_j^T и учитывая условие инвариантности оценивания (17), получаем

$$\psi_{im} = \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji} \eta_{im}. \qquad (22)$$

Аналогично, умножая (21) слева на матрицу R_i^T и учитывая условие несмещенности оценивания (16), имеем

$$\eta_{im} = 2\Phi_{ii}^{-1}(E_{im} + 2^{-1}\Phi_{ij}\psi_{im})\,. \qquad (23)$$

Разрешая уравнения (22) и (23) относительно ψ_{im}, η_{im} получим выражения для определения множителей Лагранжа в явном виде, что дает возможность произвести проверку выполнения условий (19). В случае, если эти условия не выполняются, необходимо сформировать новый вектор функций принадлежности компонент вектора ΔH векторам ΔH^i ($i = 1, 2$).

Затем из (21), (22), (23) получим выражение для Q_{im} в виде

$$Q_{im} = (Z_i - Z_j \Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})(E_{M_i\times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1}E_{im} \qquad (24)$$

или, преобразуя формулу (24), используя обозначения $Z_i - Z_j \Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji} = F_{jj}Z_i$; $(E_{M_i\times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1} = (R_i^T F_{jj} Z_i)^{-1}$; $F_{jj} = (E_{N\times N} - Z_j \Phi_{jj}^{-1} R_j^T)$,

$$Q_{im} = F_{jj} Z_i (R_i^T F_{jj} Z_i)^{-1} E_{im}\,. \qquad (25)$$

Для искомых оптимальных матриц Q_i, учитывая (25), имеем

$$Q_i = [F_{jj} Z_i (R_i^T F_{jj} Z_i)^{-1}]_{M_i \times N}\,, i \neq j\,, i, j = 1,2\,. \qquad (26)$$

Окончательные выражения для вычисления компонент вектора приращений параметров ΔH^i, $i = 1, 2$

$$[\Delta H^i]_{M_i \times 1} = [F_{jj} Z_i (R_i^T F_{jj} Z_i)^{-1}]_{M_i \times N} [\Delta]_{N \times 1}\,. \qquad (27)$$

Полученное выражение для определения вектора параметров (27) позволяет выделить доминирующие компоненты вектора H при его идентификации. Анализ полученных выражений (26), (27) показывает, что, применяя предложенный подход декомпозиции вектора параметров, при выполнении вычислений необходимо производить обращение матриц меньшей размерности в отличие от классического подхода, где происходит сведение к системе нормальных уравнений и выполняется обращение матриц размера $M \times M$. При больших размерах матриц и их плохой обусловленности предлагаемый подход является более эффективным в вычислительном плане.

Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный подход был применен для восстановления теплофизических $\alpha(T)$, $\lambda_T(T)$, $C(T)$ и физических $E(T)$ характеристик деформируемой тонкостенной системы из решения обратной задачи термоупругости.

В качестве объекта исследования рассматривалась пластина толщины $h = 0{,}2$ м, изготовленная из стали 65С2ВА. Для описания материала использовались таблично представленные зависимости значений физических и теплофизических характеристик от температуры [8], для выполнения идентификации эти зависимости аппроксимированы полиномами

$$\begin{gathered} E(T) = 211{,}2091 - 0{,}0301 \cdot T - 0{,}0001 \cdot T^2 \,(\text{ГПа}), \\ \lambda_T(T) = 26{,}7264 + 0{,}0052 \cdot T \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right), \\ \alpha(T) = 12{,}1335 + 0{,}0034 \cdot T \left(10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{К}} \right), \\ C(T) = 484{,}5748 + 0{,}0326 \cdot T + 0{,}0003 \cdot T^2 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right). \end{gathered} \tag{28}$$

Для формирования полей заданных перемещений $u_3^*(X_n)$ и температур $T^*(X_n)$ использовались решения прямых задач термоупругости при заданных в виде (28) значениях искомых параметров.

Пластина испытывает неоднородный нагрев, на поверхности $x_3 = h$ задан тепловой поток q, действующий на некоторую ограниченную область $\bar{\Omega}$: $\lambda_T(T) \left. \dfrac{\partial T(\bar{\Omega})}{\partial x_3} \right|_{x_3 = h} = q$; поверхность $x_3 = 0$ теплоизолирована. Рассматривались варианты нагрева пластины, когда тепловой поток воздействует на область в центре пластины (рис. 1) и область, расположенную ближе к верхнему краю пластины (рис. 2).

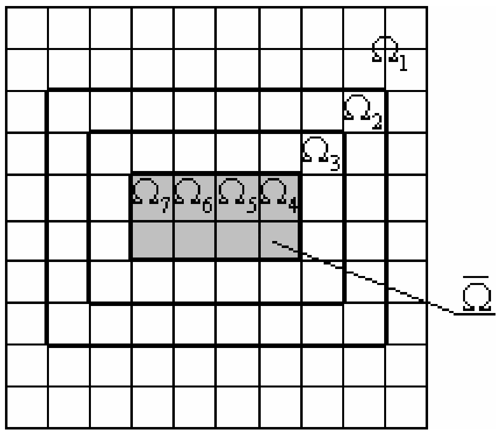

Рис. 1. Конечноэлементная модель пластины с областью нагрева в центре

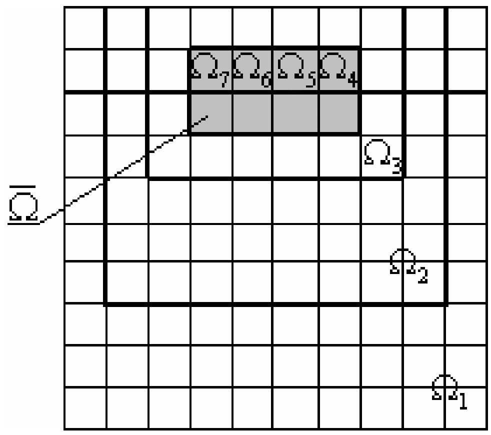

Рис. 2. Конечноэлементная модель пластины с областью нагрева смещенной относительно центра

Аппроксимация неизвестных характеристик материала выполнялась на сетке так, что компонентами вектора искомых параметров обратной задачи являются значения параметров в зафиксированных областях Ω_p (области Ω_p обозначены на рис. 1, рис. 2), а следовательно, вектор параметров может быть представлен в виде $H = \{E_1, \alpha_1, \lambda_{T_1}, C_1, \ldots, E_p, \alpha_p, \lambda_{T_p}, C_p\}$, $p = 1, 2, \ldots, P$. Для каждой выделенной области можно вычислить значение температуры T_p из решения задачи теплопроводности.

Далее проводилась идентификация вектора неизвестных параметров. В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик: $E = 210$ ГПа; $\lambda_T = 27\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; $C = 475\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $\alpha = 11{,}7\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{К}}$.

В табл. 1 представлены результаты выполнения процедуры декомпозиции, на первом шаге итерационного процесса разделение вектора параметров осуществлялось произвольно, далее – в соответствии с выполнением условия (19).

Таблица 1. Процедура декомпозиции вектора параметров на итерациях

Результат 1-й итерации				Результат 2-й итерации				Результат 7-й итерации			
вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2	вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2	вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2
E_1	0	C_4	1	E_2	0	E_1	1	E_3	1	E_1	1
α_1	0	λ_{T4}	0	λ_{T_2}	1	α_1	1	α_3	1	α_1	1
C_1	0	E_5	0	E_3	1	C_1	1	C_3	1	C_1	1
λ_{T1}	0	α_5	0	α_3	1	λ_{T1}	1	λ_{T3}	1	λ_{T1}	1
E_2	1	C_5	1	C_3	1	α_2	1	E_4	1	E_2	1
α_2	0	λ_{T5}	0	λ_{T3}	1	C_2	1	α_4	1	α_2	1
C_2	0	E_6	1	E_4	1	C_5	0	C_4	1	C_2	1
λ_{T_2}	1	α_6	0	α_4	0	E_6	0	λ_{T4}	1	λ_{T_2}	1
E_3	1	C_6	0	λ_{T4}	0	C_4	0	E_5	1	–	–
α_3	1	λ_{T_6}	0	E_5	1	–	–	α_5	1	–	–
C_3	1	E_7	0	α_5	1	–	–	C_4	1	–	–
λ_{T3}	1	α_7	0	λ_{T5}	1	–	–	λ_{T5}	1	–	–
E_4	1	C_7	0	α_6	1	–	–	E_6	1	–	–
α_4	1	λ_{T7}	0	C_6	1	–	–	α_6	1	–	–
–		–		λ_{T_6}	1	–	–	C_6	1	–	–
–		–		E_7	1	–	–	λ_{T_6}	1	–	–
–		–		α_7	1	–	–	E_7	1	–	–
–		–		C_7	1	–	–	α_7	1	–	–
–		–		λ_{T7}	1	–	–	C_7	1	–	–
–		–				–	–	λ_{T7}	1	–	–

После выполнения процедуры идентификации были получены значения компонент вектора неизвестных параметров, которые представлены в табл. 2. Анализируя полученные результаты, видим, что в вектор H^2 помещены параметры, значения которых практически совпадают с постоянными характеристикам материала, определенными для ненагретого тела.

Аналогичные результаты получены для случая, когда нагреваемая область была расположена ближе к краю пластины (рис. 2), здесь процесс декомпозиции был выполнен за 11 итераций.

Таблица 2. Результат идентификации векторов параметров H^1 и H^2

Вектор H^1	u^1	Значение температуры в области Ω_p, К	Восстановленное значение параметра	Вектор H^2	u^2	Значение температуры в области Ω_p, К	Восстановленное значение параметра
E_3	1	410	198,1827	E_1	1	293	214,9684
α_3	1	410	13,1371	α_1	1	293	12,51638
C_3	1	410	544,8348	C_1	1	293	520,0917
λ_{T3}	1	410	28,7941	λ_{T1}	1	293	27,9381
E_4	1	550	172,5564	E_2	1	320	214,4121
α_4	1	550	13,7304	α_2	1	320	13,0357
C_4	1	550	577,1328	C_2	1	320	520,4381
λ_{T4}	1	550	29,1924	λ_{T_2}	1	320	28,0083
E_5	1	810	171,2324	–	–	–	–
α_4	1	810	14,4811	–	–	–	–
C_5	1	810	685,7409	–	–	–	–
λ_{T5}	1	810	30,5931	–	–	–	–
E_6	1	810	109,8971	–	–	–	–
α_5	1	810	14,4906	–	–	–	–
C_6	1	810	684,6951	–	–	–	–
λ_{T_6}	1	810	30,5380	–	–	–	–
E_7	1	550	108,1422	–	–	–	–
α_6	1	550	13,7074	–	–	–	–
C_7	1	550	576,4981	–	–	–	–
λ_{T7}	1	550	29,3046	–	–	–	–

Далее предложенный подход был применен для идентификации теплофизических $\alpha(T)$, $\lambda_T(T)$, $C(T)$ и физических $E(T)$ характеристик этой же пластины с использованием общепринятой методики аппроксимации неизвестных функций, описанной в монографии [9]. Для выполнения процедуры идентификации все неизвестные функции задачи были представлены полиномами 2-й степени:

$$\varphi(T) = a \cdot T^2 + b \cdot T + c,$$

а вектор параметров составлен из полиномиальных коэффициентов: $H = \{a_E; b_E; c_E; a_C; b_C; c_C; a_{\lambda_T}; b_{\lambda_T}; c_{\lambda_T}; a_\alpha; b_\alpha; c_\alpha\}$. В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик. Результат декомпозиции вектора искомых параметров представлен в табл. 3.

Анализируя полученные результаты, видим, что в вектор H^2 помещены параметры, которые не присутствуют в аппроксимации зависимостей характеристик материала от температуры [8]. После выполнения процедуры идентификации были получены компоненты вектора параметров (коэффициенты полиномов), значения которых представлены в табл. 4.

Таблица 3. Процедура декомпозиции вектора параметров, содержащего коэффициенты полиномиальной аппроксимации неизвестных функций, на итерациях

Результат 1-й итерации				Результат 2-й итерации				Результат 5-й итерации			
вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2	вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2	вектор H^1	u^1	вектор H^2	u^2
c_C	1	a_E	0	c_C	1	b_E	0	a_E	1	a_{λ_T}	1
c_{λ_T}	1	a_C	0	c_{λ_T}	1	b_{λ_T}	0	a_C	1	a_α	1
c_α	1	b_E	1	c_α	1	a_{λ_T}	1	b_E	1	–	–
–	–	b_C	0	a_E	1	a_α	1	b_C	1	–	–
–	–	b_{λ_T}	1	a_C	0	–	–	b_{λ_T}	1	–	–
–	–	b_α	0	b_C	1	–	–	B_α	1	–	–
–	–	a_{λ_T}	1	b_α	1	–	–	c_C	1	–	–
–	–	a_α	1	–	–	–	–	c_{λ_T}	1	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	c_α	1	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	c_E	1	–	–

Таблица 4. Результат идентификации векторов параметров H^1 и H^2, содержащих коэффициенты полиномов

Вектор H^1	u^1	Действительное значение коэффициента	Восстановленное значение коэффициента	Вектор H^2	U^2	Действительное значение коэффициента	Восстановленное значение коэффициента
a_E	1	–0,0001	–0,000168	a_{λ_T}	1	0	0,000000063
a_E	1	0,0003	0,0003368	a_α	1	0	0,000000081
b_E	1	–0,0301	–0,02418	–	–	–	–
b_E	1	0,0326	0,0289590	–	–	–	–
b_{λ_T}	1	0,0052	0,0052676	–	–	–	–
b_α	1	0,0034	0,0041830	–	–	–	–
c_C	1	484,57	469,15212	–	–	–	–
c_{λ_T}	1	26,72	26,92466	–	–	–	–
c_α	1	12,13	11,783	–	–	–	–
c_E	1	238,2091	241,9544	–	–	–	–

Результаты идентификации характеристик материала в зависимости от температуры для разных способов параметризации неизвестных функций представлены на рис. 3–6 (для случая идентификации с использованием аппроксимации по областям Ω_p зависимости были построены с использованием интерполяционных полиномов).

Для апробации предложенного подхода проводилось сравнение результатов с известными решениями. Рассматривалась задача идентификации теплофизических характеристик $\lambda_T(T)$, $C(T)$ стальной пластины из решения задачи обратной задачи теплопроводности, представленная в монографии [9]. На поверхностях $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ сформулированы граничные условия 2-го и 3-го рода

$$\left.\frac{\partial T(x_3,t)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0, \quad \lambda_T(T)\left.\frac{\partial T}{\partial x_3}\right|_{x_3=h} = \alpha(T-T_c), \quad \text{где} \quad \alpha = 11{,}7\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{K}}, \quad T_c = 1673\text{K}\,.$$

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2011, Т. 14, № 2

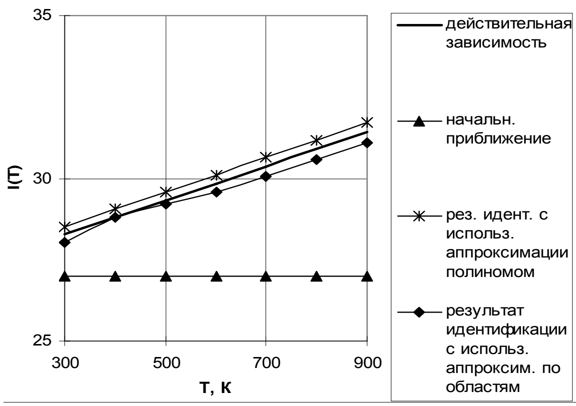

Рис. 3. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

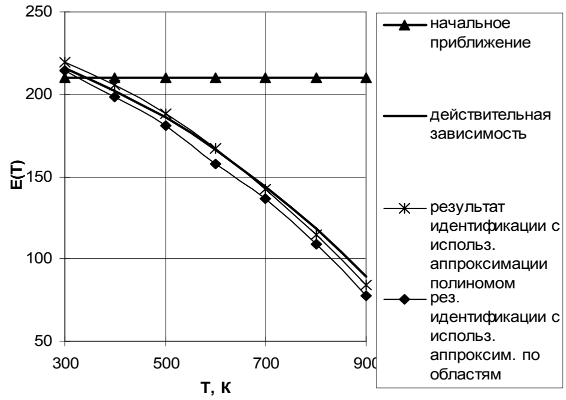

Рис. 4. Зависимость модуля упругости от температуры

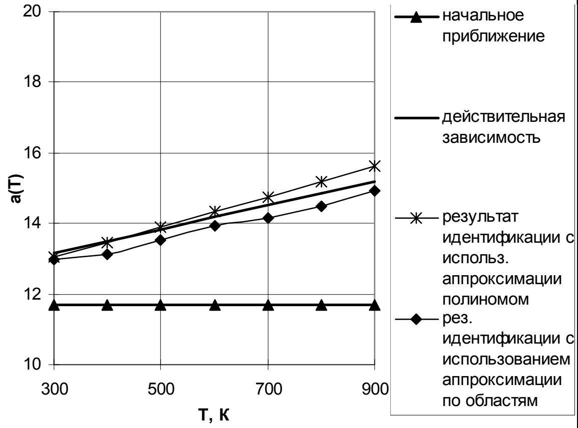

Рис. 5. Зависимость коэффициента линейного расширения от температуры

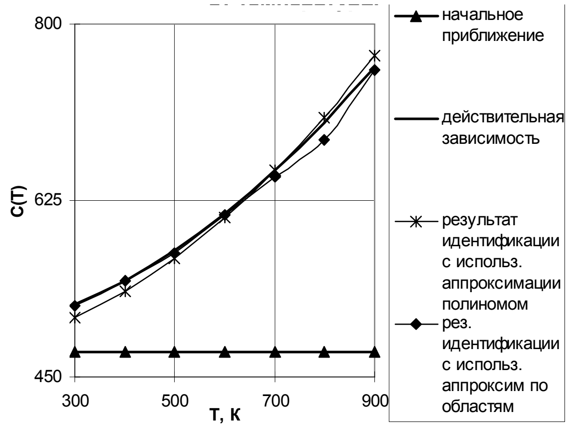

Рис. 6. Зависимость удельной теплоемкости от температуры

Теплофизические характеристики $\lambda_T(T)$, $C(T)$ заданы в виде полиномов вида $a + bT$. Действительные значения коэффициентов $a_C = 1{,}5 \cdot 10^6$; $b_C = 8 \cdot 10^3$; $a_{\lambda_T} = 45$; $b_{\lambda_T} = 0{,}02$ использовались при решении прямых задач теплопроводности и термоупругости и получения поля температур $T^*(X_i)$ и поля перемещений $u_1{}^*(X_i)$ соответственно. В дальнейшем эти значения использовались при построении функционала-невязки.

Компонентами вектора восстанавливаемых параметров выбраны коэффициенты полиномов $\{a_C; b_C; a_{\lambda_T}; b_{\lambda_T}\}$, которые впоследствии определялись в результате выполнения итерационной процедуры декомпозиции. В качестве начального приближения выбраны постоянные значения теплофизических характеристик $\lambda_T = 45 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; $C = 3 \cdot 10^6 \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$, вектор параметров представлялся в виде $H^0 = \{3 \cdot 10^6; 0; 45; 0\}$.

Декомпозиция вектора параметров на первом шаге выполнялась произвольно, в табл. 5 представлены результаты выполнения итерационной процедуры декомпозиции и процедуры идентификации вектора параметров из решения обратной задачи теплопроводности.

Аналогичные результаты были получены, когда значения этих коэффициентов восстанавливались из решения обратной задачи термоупругости и для формирования функционала-невязки выбирались значения перемещений. На рис. 7 и 8 представлены результаты восстановления теплофизических характеристик $\lambda_T(T)$, $C(T)$, полученные из решения обратных задач теплопроводности и соответствующей задачи термоупругости.

Таблица 5. Процедура декомпозиции вектора параметров на итерациях и результат идентификации

Результат выполнения процедуры декомпозиции для идентификации значений коэффициентов полиномов								Результат процедуры идентификации вектора параметров для выполненной декомпозиции			
Результат 1-й итерации				Результат 3-й итерации				Результат декомпозиции и последующей идентификации для вектора H^1			
H^1	u^1	H^2	u^2	H^1	u^1	H^2	u^2	H^1	u^1	Действительный вектор H^1	Восстановленный вектор H^1
a_C	0	a_{λ_T}	0	b_C	1	b_{λ_T}	1	a_C	1	$1{,}5\cdot10^6$	$1{,}434\cdot10^6$
b_C	1	b_{λ_T}	1	a_{λ_T}	1	a_C	0	b_C	1	$8\cdot10^3$	$7{,}648\cdot10^3$
–	–	–	–	–	–	–	–	a_{λ_T}	1	45	45,387
–	–	–	–	–	–	–	–	b_{λ_T}	1	0,02	0,01726

Выводы

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы: 1) применение декомпозиционного подхода позволяет восстановить вектор параметров системы с использованием различных способов аппроксимации; 2) разработанный метод и алгоритм идентификации параметров, характеризующих теплофизические и механические свойства тонкостенных систем, дает возможность определять указанные параметры в условиях их существенной неоднородности; 3)предложенный подход декомпозиции с выбором наиболее информативных компонент вектора параметров позволяет понижать порядок разрешающих соотношений; 4) сравнительный анализ полученных с использованием различных аппроксимаций численных результатов восстановления вектора параметров с действительными значениями параметров реальной системы свидетельствует об их достоверности.

В перспективе предложенный подход может быть применен для идентификации характеристик материала из решения обратной задачи термопластичности.

Литература

1. *Измерение* импульсным методом теплофизических характеристик материалов с открытой поверхности / Л. Д. Загребин, В. А. Сипайлов, М. Г. Камашев, Е. А. Иванова // Тез докл. 8-й всесоюз. конф. по теплофизическим свойствам веществ. – 1988. – Ч. 2. – С. 85.
2. *Талуц С. Г.* Измерение температуропроводности и теплоемкости динамическим методом плоских температурных волнс использованием электронного нагрева / С. Г. Талуц, Б. В. Власов, В. Ф. Полев // Тез докл. 8-й всесоюз. конф. по теплофизическим свойствам веществ. – 1988. – Ч. 2. – С. 114–115.
3. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. т. 1 Методология. т. 2 Приложения – Киев: Наук. думка, 2003. – 341 с., 392 с.

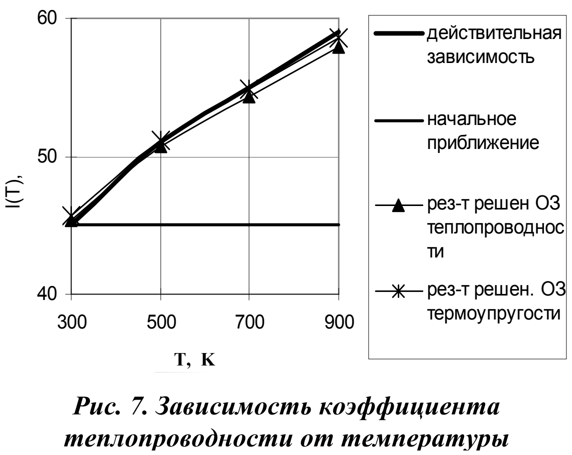

Рис. 7. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

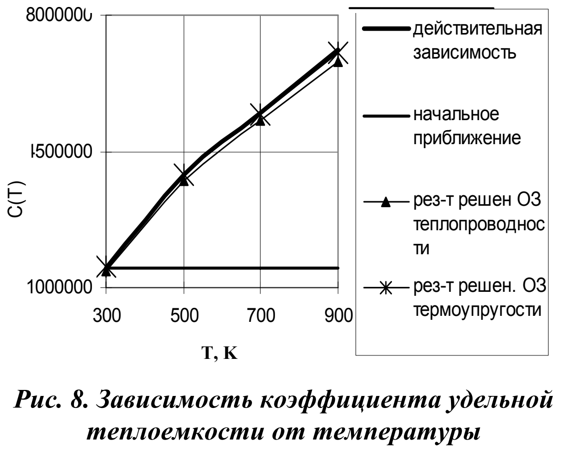

Рис. 8. Зависимость коэффициента удельной теплоемкости от температуры

4. *Сергиенко И. В.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 2009. – 639 с.
5. *Тихонов А. Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.
6. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
7. *Булычева Е. Ю.* Декомпозиционный подход к решению плохо обусловленных задач параметрической идентификации / Е. Ю. Булычева, Ю. Г Булычев, И. В. Бурлай // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 28–31.
8. *Безухов Н. И.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
9. *Мацевитый Ю. М.* Идентификация теплофизических свойств твердых тел / Ю. М. Мацевитый, С. Ф. Лушпенко. – Киев: Наук. думка, 1990. – 213 с.

Поступила в редакцию
11.01.11