

УДК 534.1 : 539.3

И. В. Янчевский, канд. техн. наукХарьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(г. Харьков, E-mail: yanchevsky@khadi.kharkov.ua)**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОАКТИВНЫМ СЛОЕМ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ**

Исследуются нестационарные колебания тонкой прямоугольной пластины типа металл-пьезокерамика при механическом нагружении. С использованием метода суперпозиции и интегрального преобразования Лапласа по времени начально-краевая задача сведена к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра. Представлена также методика решения задачи идентификации механической нагрузки как функции времени по значениям разности потенциалов между сплошными электродами пьезоэлемента.

Досліджуються нестационарні коливання тонкої прямокутної пластини типу метал-п'єзокераміка при механічному навантаженні. З використанням методу суперпозиції та інтегрального перетворення Лапласа за часом початково-крайова задача зведена до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра. Наведено також методика розв'язання задачі ідентифікації механічного навантаження як функції часу за значеннями різниці потенціалів між суцільними електродами п'єзоелемента.

Введение

Асимметричные биморфные (металл-пьезокерамика) электромеханические преобразователи энергии относятся к весьма распространенным элементам конструкций в современной технике. Особенно эффективно их применение в качестве первичной преобразовательной составляющей в ответственной и высокочувствительной измерительной аппаратуре, в частности как датчики быстропеременного давления (электроупругий слой преобразователя при этом находится в режиме прямого пьезоэффекта). Поэтому актуальными являются исследования механических и электрических характеристик в биморфных преобразователях при ударном их нагружении.

Статический режим работы электроупругих преобразователей рассмотрен в публикациях [1–3]. В статьях [4, 5] построены решения задач для пластин, составленных из пьезопассивных (без пьезоэффекта) и пьезоактивных слоев, в случае периодических во времени процессов. Установившиеся электроупругие колебания многослойной прямоугольной пьезоэлектрической пластины изучены в [6]. Исследованиям нестационарных колебаний многослойных пластинчатых и цилиндрических пьезопреобразователей при их механическом возбуждении посвящены статьи [7, 8].

В настоящей работе исследуется возбуждение изгибных колебаний прямоугольной в плане тонкостенной биморфной пластины при ударном нагружении (прямая задача). Также рассмотрена задача восстановления внешней нестационарной нагрузки как функции времени на основании данных регистрации разности потенциалов между сплошными электродированными покрытиями пьезопреобразователя (обратная задача). Частные примеры нестационарных обратных задач и их решения для асимметричных балочных электроупругих преобразователей представлены в [9, 10]. Следует отметить монографию [11], в которой изложены методы решения задач идентификации импульсных нагрузок в случае упругих и вязкоупругих элементов конструкций.

1. Постановка прямой задачи

В декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается биморфная пластина металл-пьезокерамика, слои которой жестко соединены между собой и имеют постоянные толщины h_m и h_p . Ось z ортогональна плоскости контакта слоев и проходит через геометрический центр пластины, а горизонтальная координатная плоскость Oxy отстоит от границы контакта на расстоянии $z_0 = (c_{11}^p h_p^2 - c_{11}^m h_m^2) / 2(c_{11}^p h_p + c_{11}^m h_m)$, где $c_{11}^j = 1/s_{11}^j(1 - \nu_j^2)$ ($j = m, p$); s_{11}^j, ν_j – упругие податливости ($s_{11}^p = s_{11}^E$; $s_{11}^m = 1/E$, E – модуль Юнга металлической подложки) и коэффициенты Пуассона материалов ($\nu_p = -s_{12}^E/s_{11}^E$). Отметим, что значение z_0 записано в допущении приближенного равенства коэффициентов $\nu_p \approx \nu_m$ [4]. Пластина шарнирно закреплена по контуру и занимает в плане прямоугольную область $[2L \times 2B]$.

Пьезокерамический слой, материал которого принадлежит гексагональной системе класса $6mm$, предварительно поляризован вдоль толщины координаты z и имеет бесконечно тонкие сплошные электродные покрытия. При этом потенциал на внутреннем электроде равен нулю ($\varphi|_{z=z_0} = 0$).

Колебания пластины возбуждаются импульсной механической нагрузкой $p(t)$, нормальной к плоской поверхности упругого слоя. Предполагается, что область распределения нагрузки $[2l \times 2b]$ симметрична относительно координатных осей Ox и Oy и является известной.

Вследствие изгибных колебаний пластины между разомкнутыми электродами пьезоэлемента генерируется разность потенциалов $V(t)$ ($\varphi|_{z=z_0-h_p} = V$).

В этой постановке давление $p(t)$, физические и геометрические параметры материалов двухслойного пакета известны, а функция $V(t)$ и деформированное состояние пластины подлежат определению.

Начальные условия – нулевые: до момента приложения нагрузки ($t = 0$) преобразователь находится в состоянии покоя.

2. Система уравнений

Динамические процессы в рассматриваемом преобразователе моделируются в рамках теории тонких электроупругих пластин, основанной на классических механических гипотезах Кирхгофа–Лява и адекватных им гипотезах относительно электрических полевых величин [1, 4, 12]. При сделанных допущениях и за счет соответствующего выбора положения поверхности приведения ($z = 0$) планарные и изгибные формы колебаний разделяются. При этом для принятого вида закрепления торцов планарные перемещения точек в плоскости $z = 0$ тождественно равны нулю. Тогда в декартовых координатах исходная система уравнений включает уравнение изгибных колебаний пластины [12]

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P, \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $w(x, y, t)$ – нормальное смещение точек поверхности приведения ($z = 0$);

$P(x, y, t) = p(t) \cdot H(l - |x|) \cdot H(b - |y|)$, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, и интегро-дифференциальное соотношение для потенциала на внешней электродированной плоскости

$$V = \frac{e_3^2 h_p a^2}{\varepsilon_3 \beta D} \int_0^\alpha \int_0^\beta \nabla^2 w dx dy, \quad (2)$$

которые дополняются граничными условиями [1, 4]

$$\begin{aligned} w|_{x=\pm\alpha} = 0; \quad M_x|_{x=\pm\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=\pm\alpha} - V = 0; \\ w|_{y=\pm\beta} = 0; \quad M_y|_{y=\pm\beta} = -\left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=\pm\beta} - V = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{\nu}$ – приведенный коэффициент Пуассона.

Отметим, что постановка задачи (1)–(3) записана в безразмерных обозначениях, согласно которым координаты x, y отнесены к L , время t – к $L^2\sqrt{\rho_1/\bar{D}}$, напряжение V – к $e_3 a L^2/\bar{D}$, механическая нагрузка p – к \bar{D}/L^4 , изгибающий момент M – к \bar{D}/L^2 , и введены нормирующие коэффициенты

$$\alpha = L/L = 1, \quad \beta = B/L, \quad a = z_0 - h_p/2, \quad e_3 = d_{31}/s_{11}^p(1 - \nu_p), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T(1 - k_p^2), \quad \rho_1 = \rho_p h_p + \rho_m h_m, \\ \bar{D} = D + \Delta D, \quad D = \frac{c_{11}^p}{3} [z_0^3 - (z_0 - h_p)^3] + \frac{c_{11}^m}{3} [(z_0 + h_m)^3 - z_0^3], \quad \Delta D = \frac{e_3^2 h_p^3}{\varepsilon_3 12}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu_p + \Delta D/D}{1 + \Delta D/D},$$

d_{31} – пьезомодуль; ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость при постоянных напряжениях; $k_p^2 = 2d_{31}e_3/\varepsilon_{33}^T$ – планарный коэффициент электромеханической связи [12]; ρ_j ($j = m, p$) – плотности материалов, составляющих двухслойный пакет.

Очевидно, что уравнение изгибных колебаний (1) и граничные условия на контуре пластины (3) имеют обычный для теории изгиба тонких упругих пластин вид. Выражение (2) получено на основании условия равенства нулю тока смещения через срединную по-

верхность пьезоэлемента $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \int_0^\beta D_z dx dy = 0$ (D_z – нормальная составляющая вектора электри-

ческой индукции \mathbf{D}), уравнений состояния предварительно поляризованной пьезокерамики и квазистатического приближения уравнений Максвелла относительно \mathbf{D} ($\text{div} \mathbf{D} = 0$) [12].

3. Решение задачи

Согласно принципу суперпозиции [8] нормальное перемещение может быть представлено в виде суммы

$$w = w_1 + w_2, \quad (4)$$

в которой функция w_1 аппроксимирует изогнутую поверхность пластины и удовлетворяет граничным условиям (3). Анализ равенств (3) показывает, что выражение для w_1 можно получить, рассмотрев задачу изгиба шарнирно опертой прямоугольной упругой пластины за счет приложения по ее контуру равномерно распределенного изгибающего момента $M = V$. На основе изложенной в [13] методики решение для w_1 представим следующим образом:

$$w_1 = -V(t) \cdot F(x, y), \quad (5)$$

$$\text{где } F(x, y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\cos(\mu_k x)}{\alpha \cdot \mu_k^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(\mu_k y)}{\text{ch}(\mu_k \beta)} \right) + \frac{\cos(\eta_k y)}{\beta \cdot \eta_k^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(\eta_k x)}{\text{ch}(\eta_k \alpha)} \right) \right]; \quad \mu_k = \frac{(k - 0.5)\pi}{\alpha};$$

$$\eta_k = \frac{(k - 0.5)\pi}{\beta} \text{ – волновые числа.}$$

Второе слагаемое (4) ищем в виде разложения по собственным формам колебаний прямоугольной пластины с однородными граничными условиями [13]

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \cos(\mu_m x) \cos(\eta_n y), \quad (6)$$

где A_{mn} – коэффициенты, подлежащие определению.

Действующая механическая нагрузка $P(x, y, t)$ также представима рядом, аналогичным (6) –

$$P = p(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{mn} \cos(\mu_m x) \cos(\eta_n y), \quad (7)$$

где $\zeta_{mn} = \frac{4}{\alpha\beta} \frac{1}{\mu_m \eta_n} \sin(\mu_m \alpha_0) \sin(\eta_n \beta_0)$; $\alpha_0 = l/L$; $\beta_0 = b/L$.

В результате подстановки (4)–(6) в интегро-дифференциальное соотношение (2) получим, что через неизвестные коэффициенты разложения A_{mn} могут быть выражены как искомая разность потенциалов

$$V = -\frac{1}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \Psi_{mn}^{(1)} \omega_{mn}, \quad (8)$$

так и прогиб w (см. (4), (5))

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \left[F(x, y) \frac{1}{K} \Psi_{mn}^{(1)} \omega_{mn} + \cos(\mu_m x) \cos(\eta_n y) \right]. \quad (9)$$

В равенствах (8) и (9) $K = 2\alpha\beta + \frac{\varepsilon_3 \beta \bar{D}}{e_3^2 h_p a^2}$, $\omega_{mn} = \mu_m^2 + \eta_n^2$; $\Psi_{mn}^{(1)} = \frac{(-1)^{m+n}}{\mu_m \eta_n}$.

Для нахождения коэффициентов $A_{mn}(t)$ подставляем формулу (9) в дифференциальное уравнение (1). Далее с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени и свойства ортогональности тригонометрических функций в пределах изменения аргументов (x, y) с учетом нулевых начальных условий получим

$$A_{mn}^L - \frac{4}{\alpha\beta} \frac{1}{K} \frac{\Psi_{mn}^{(1)}}{\omega_{mn}} \frac{2s^2 + \omega_{mn}^2}{s^2 + \omega_{mn}^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk}^L \Psi_{rk}^{(1)} \omega_{rk} = \frac{\zeta_{mn} p^L}{s^2 + \omega_{mn}^2}, \quad (10)$$

где $A_{mn}^L(s)$ и $p^L(s)$ – изображения функций A_{mn} и p соответственно; s – комплексный параметр преобразования.

Последующий переход в пространство оригиналов не вызывает принципиальных затруднений. В результате обращения получаем бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функций $A_{mn}(t)$

$$A_{mn}(t) - \frac{8}{\alpha\beta} \frac{1}{K} \frac{\Psi_{mn}^{(1)}}{\omega_{mn}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk}(t) \Psi_{rk}^{(1)} \omega_{rk} + \frac{4}{\alpha\beta} \frac{1}{K} \Psi_{mn}^{(1)} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{rk}^{(1)} \omega_{rk} \int_0^t A_{rk}(\tau) \sin(\omega_{mn}(t-\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{\zeta_{mn}}{\omega_{mn}} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_{mn}(t-\tau)) d\tau. \quad (11)$$

При решении система уравнений (11) подвергалась усечению и использовался итерационный метод последовательных приближений. Исследуемый конечный временной интервал $[0, T]$ разбивался на равные отрезки длиной Δt . Входящие в (11) функции A_{mn} и p аппроксимировались кусочно-постоянными аналогами \mathbf{A}_{mn} и \mathbf{p} в области изменения переменной t

$$A_{mn}(t) = \sum_{i=1}^{T/\Delta t} (\mathbf{A}_{mn})_i \cdot [H(t-t_{i-1}) - H(t-t_i)]; \quad p(t) = \sum_{i=1}^{T/\Delta t} \mathbf{p}_i \cdot [H(t-t_{i-1}) - H(t-t_i)],$$

где $t_i = i \cdot \Delta t$ – узлы разбиения. При вычислении интегралов использовался метод квадратур.

После нахождения последовательности значений $(\mathbf{A}_{mn})_i$ согласно равенствам (8) и (9) вычислялись разность потенциалов $V(t)$ и положения точек изогнутой поверхности приведения пластины $w(x, y, t)$ в фиксированные моменты времени t_i .

4. Решение обратной задачи

Полученные соотношения между возбуждающей механической нагрузкой p и характеристиками переходного процесса в биморфной пластине позволяют рассмотреть задачу восстановления функции $p(t)$ по результатам регистрации разности потенциалов $V(t)$ между электродами пьезокерамического элемента. При этом, как и ранее, область распределения нагрузки симметрична относительно координатных осей Ox , Oy и считается заданной.

Для решения задачи идентификации перепишем уравнение (10) в предположении, что функция $V(t)$ (8), а следовательно и ее трансформанта, являются известными

$$\frac{\zeta_{mn} p^L}{s^2 + \omega_{mn}^2} = A_{mn}^L + \frac{4}{\alpha\beta} \frac{\Psi_{mn}^{(1)}}{\omega_{mn}} V^L \frac{2s^2 + \omega_{mn}^2}{s^2 + \omega_{mn}^2}.$$

Последующее умножение на $-\Psi_{mn}^{(1)}\omega_{mn}/K$ и суммирование по переменным индексам позволяет исключить функции A_{mn}^L с учетом соотношения (8). С использованием таблиц операционного исчисления в пространстве оригиналов получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $p(t)$

$$\begin{aligned} & - \int_0^t p(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{mn}^{(1)} \zeta_{mn} \sin(\omega_{mn}(t-\tau)) d\tau = \\ & = V(t) \left(K - \frac{8}{\alpha\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{mn}^{(1)})^2 \right) + \frac{4}{\alpha\beta} \int_0^t V(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{mn}^{(1)})^2 \omega_{mn} \sin(\omega_{mn}(t-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Эффективным приемом решения уравнения (12) является построение конечномерного аналога [11], представляющего собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов p_i , с последующей реализацией регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова.

5. Числовые результаты

Для количественного анализа рассматривались колебания биморфной пластины размером $L = 25$ мм и $B = 0,6L$. Для слоя из электрически пассивного материала принималось, что $h_m = 0,5$ мм, $\rho_m = 4450$ кг/м³, $E = 11,3 \cdot 10^{10}$ Н/м² (титановый сплав ВТ-6). Электроупругий слой толщиной $h_p = 1$ мм – пьезокерамика PZT-5 – $\rho_p = 7600$ кг/м³, $s_{11}^E = 15,4 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $s_{12}^E = -5,1 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $d_{13} = -178 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н, $\epsilon_{33}^T = 1750 \cdot \epsilon_0$ ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м). Область приложения механической нагрузки задавалась границами $l = 0,4L$, $b = 0,4B$.

Точность расчетов контролировалась сопоставлением результатов, полученных при различном порядке усечения системы (11), а также варьированием шага по времени Δt . Отметим, что при проведении вычислений в двойных рядах Фурье удерживалось 10×10 форм колебаний, а шаг дискретизации временного интервала принят равным 0,01, что обеспечивает приемлемую погрешность счета (менее 1%).

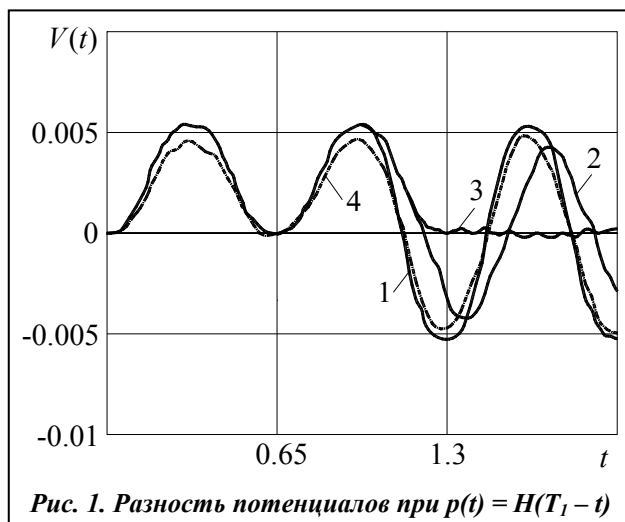


Рис. 1. Разность потенциалов при $p(t) = H(T_1 - t)$

На рис. 1 приведены графики разности потенциалов между электродами пьезокерамического слоя при приложении механической нагрузки прямоугольного профиля – $p(t) = H(T_1 - t)$, где T_1 – длительность импульса. Кривая 1 получена для $T_1 = 1,5 \cdot T_0$, кривая 2 – для $T_1 = 1,75 \cdot T_0$ и кривая 3 – для $T_1 = 2 \cdot T_0$, где $T_0 = 0,65$ – период собственных колеба-

ний пластины. Видно, что амплитуда разности потенциалов увеличивается с увеличением длительности импульса. Это связано с тем, что при увеличении длительности импульса увеличивается время воздействия нагрузки на пластину, что приводит к увеличению разности потенциалов.

ний пластины. Из рисунка видно, что после снятия нагрузки ($t > T_1$) функция $V(t)$ совершает колебания около нулевого значения, соответствующего невозмущенному состоянию преобразователя. Амплитудные значения $V(t)$ при $t > T_1$ зависят от T_1 : они максимальны, когда окончание прямоугольного импульса совпадает с моментом равенства $V(t)$ максимальному значению ($T_1 = 1,5 \cdot T_0$), и минимальны, когда $V(T_1) = 0$ ($T_1 = 2 \cdot T_0$). Отметим, что кривая прогиба в центральной точке пластины $w(0, 0, t)$, графики которой в настоящей работе не приведены, коррелирует с кривой разности потенциалов $V(t)$ (экстремальные значения V и $w(0, 0, t)$ происходят одновременно).

Достоверность результатов была оценена путем решения задачи с помощью конечноэлементного программного комплекса. Штриховая кривая 4 на рис. 1 иллюстрирует значения $V(t)$ для случая, когда $p(t) = H(1,5 \cdot T_0 - t)$. В целом отличие результатов, полученных принципиально различными подходами, не превышает 10%. По-видимому, это обусловлено в первую очередь погрешностью используемых гипотез.

На рис. 2 представлены результаты решения прямой задачи, когда преобразователь возбуждается синусоидальным механическим импульсом длительностью $T_1 = 2 \cdot T_0$ ($p(t) = H(T_1 - t) \cdot \sin(\omega t)$) при $\omega = 2\pi/T_0$ (кривая 1), $\omega = \pi/T_0$ (кривая 2) и $\omega = \pi/2T_0$ (кривая 3). В этом случае на временном интервале приложения нагрузки $[0; T_1]$ укладывается 4, 2 и 1 полуволны синусоидального сигнала соответственно. Очевидно, что наибольшие значения $V(t)$ имеют место при $\omega = 2\pi/T_0$, при этом наблюдается линейное увеличение амплитуды на временном промежутке действия нагрузки. После ее снятия преобразователь совершает колебания относительно равновесного положения с максимальной на момент $t = T_1$ амплитудой. Результаты решения задачи на основе метода конечных элементов при $\omega = 2\pi/T_0$ представлены на рис. 2 штриховой кривой 4. Хорошее совпадение аналитического (кривая 1) и конечноэлементного (кривая 4) результатов свидетельствует об эффективности разработанной методики решения прямой задачи.

На рис. 3 кривыми 1 и 2 представлены восстановленные на основании уравнения (12) механические нагрузки $p(t)$. Исходными данными при решении обратных задач принимались результаты, полученные с помощью конечноэлементного пакета (кривые 4 на рис. 1 и 2 соответственно). Параметр регуляризации вычислялся на основании принципа невязки и составлял 10^{-8} . Очевидно, что использование классических гипотез приводит к тому, что идентифицированные функции $p(t)$ (рис. 3, кривые 1 и 2) получаются несколько меньше от задаваемого в программном комплексе единичного уровня (рис. 3, кривые 3 и 4 соответственно). Однако качественное сравнение указанных кривых свидетельствует об эффективности изложенного подхода решения обратной задачи и приемлемой точности идентификации.

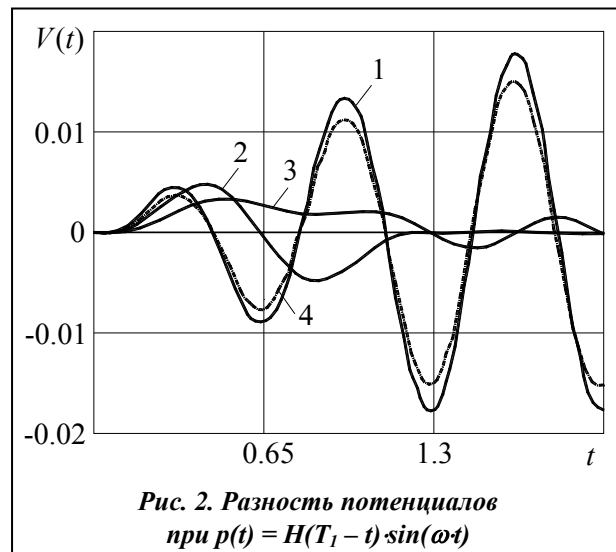


Рис. 2. Разность потенциалов при $p(t) = H(T_1 - t) \cdot \sin(\omega t)$

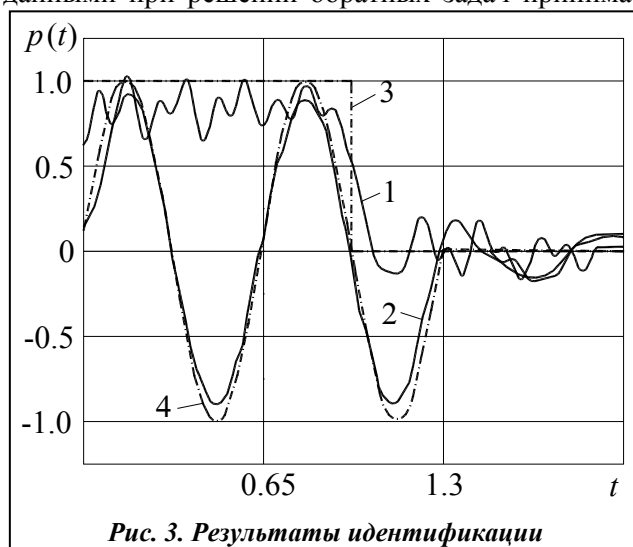


Рис. 3. Результаты идентификации

Заключение

В настоящей работе представлены задачи моделирования переходных процессов в полупассивном прямоугольном преобразователе, пьезокерамический элемент которого работает в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта. Упрощенная модель деформирования пластины построена в рамках обобщенных гипотез Кирхгофа. Изложена методика решения обратной задачи по восстановлению временной зависимости механической нагрузки, действующей на заданной области упругого слоя. При этом значения разности потенциалов между сплошными электродными покрытиями пьезоэлемента считаются известными. Для оценки достоверности результатов и адекватности принятых допущений решены тестовые задачи с помощью прикладных программ.

Литература

1. *Управление* поверхностью секционированной биморфной пластины / А. О. Ватульян, Н. Б. Лапицкая, А. В. Наседкин [и др.] // Прикл. механика и техн. физика. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 131–136.
2. *Фильштинский Л. А.* Однородные решения для граничащего с вакуумом пространственного пьезокерамического слоя / Л. А. Фильштинский, Л. В. Шрамко // Пробл. машиностр. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 56–63.
3. *Шмалый А. Ю.* Математическое моделирование колебаний пьезоэлектрической односторонне-выпуклой пластины / А. Ю. Шмалый // Пробл. машиностр. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 63–70.
4. *Чувствительность* биморфного преобразователя типа металл-керамика / Ю. Б. Евсейчик, С. И. Рудницкий, В. Л. Шарапов, Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 67–75.
5. *Рассказов А. О.* Параметрические колебания слоистых пьезопластин / А. О. Рассказов, В. И. Козлов, О. В. Карнаухова // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – № 33. – С. 169–174.
6. *Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer* / W. Q. Chen, J. V. Cai, G. R. Ye, Y. F. Wang // Int. J. Sol. and Struct. – 2004. – Vol. 41. – P. 5247–5263.
7. *Янчевский И. В.* Нестационарные колебания асимметричного дискового биморфа в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта / И. В. Янчевский // Пробл. машиностр. – 2010. – Т. 13, № 6. – С. 42–52.
8. *Wang H. M.* Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems / H. M. Wang, H. J. Ding, Y. M. Chen // Int. J. Sol. and Struct. – 2005. – Vol. 42. – P. 85–102.
9. *Бабаев А. Э.* Определение ударной нагрузки, действующей на электроупругую биморфную балку с разрезными токопроводящими покрытиями / А. Э. Бабаев, И. В. Янчевский // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, № 9. – С. 60–70.
10. *Янчевский И. В.* Идентификация нестационарной нагрузки, действующей на асимметричный биморф / И. В. Янчевский // Вестн. НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин. – 2008. – № 36. – С. 184–190.
11. *Идентификация* нагрузок при импульсном деформировании тел: в 2 ч. Ч. 2 / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. – Харьков : Изд-во Харьк. нац. автомоб.-дор. ун-та, 2010. – 212 с.
12. *Гринченко В. Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989. – 280 с.
13. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.

Поступила в редакцию
12.10.10