

УДК 531.01(0752)

А. Е. Божко, член-кор. НАН Украины

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: bozhko@ipmach.kharkov.ua)**ОСЦИЛЛЯЦИИ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ
ОТ ФУРЬЕ-СИНГУЛАРИСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ***Определяется переходной процесс в колебательной системе при действии периодического удара в виде Фурье-сингуларисного ряда. Фурье-сингуларисное воздействие отображает последовательность периодических несинусоидальных импульсных нагрузок, обуславливающих особенности переходных процессов в системе.**Визначається перехідний процес у коливальній системі при дії періодичного удару у вигляді Фур'є-сингуларисного ряду. Фур'є-сингуларисний вплив відображає послідовність періодичних несинусоїдальних імпульсних навантажень, що обумовлюють особливості перехідних процесів у системі.***Введение**

В транспортных средствах от действия периодических полусинусоидальных ударов в узлах возникают механические колебания (вибрации), по-другому – осцилляции, способствующие разрушению этих узлов и машин в целом. С целью виброзащиты от таких колебаний применяются пружины, демпферы различных типов. В совокупности масса узла, пружины и демпферы представляют собой колебательную систему (КС). Для определения параметров пружин, демпферов при соответствующей массе и при известных вибровоздействиях необходимо осуществлять расчет как переходных, так и установившихся осцилляций КС, для чего нужна разработанная теория этих колебаний.

Основная часть

В данной статье рассмотрим КС с одной степенью свободы, механическая схема которой изображена на рис. 1, где m – масса; x – перемещение массы; Пр, D – пружина и демпфер соответственно; F – внешнее воздействие. Отмеченный ранее полусинусоидальный удар (F) изображен на рис. 2, где F_a – амплитуда; t – время; T – период следования импульсов.

Известно, например, из [1], что сигналы, изображенные на рис. 2, могут быть представлены разложением в ряд Фурье вида

$$F(t) = \frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (1)$$

Как видно из выражения (1), в данном разложении присутствует постоянная составляющая F_a/π . При действии на КС удара в виде (1) в момент $t = 0$

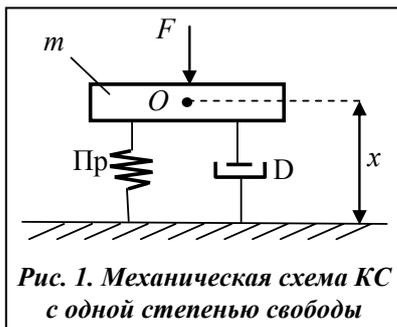


Рис. 1. Механическая схема КС с одной степенью свободы

$$F(t=0) = \frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots \right) = F_0,$$

то есть появляется дополнительная постоянная составляющая $\frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots \right)$, которая примерно равна $\frac{2,24}{\pi} F_a$. Общая постоянная составляющая периодического полукосинусоидального удара при $t = 0$ равна

$\frac{3,24}{\pi} F_a \approx F_a = F_0$. Эта F_0 , с точки зрения воздействия на КС является скачкообразной функцией $F_0 1(t)$, где $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$.

Известно [2, 3], что скачкообразную функцию $1(t)$, а значит, и $F_0 1(t)$ можно представить в виде сингулярисного разложения

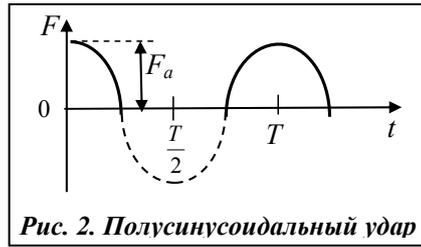


Рис. 2. Полусинусоидальный удар

$$F_0 1(t) = F_0 (1 - e^{-\alpha t}) + F e^{-\alpha t} \sum_{m=1}^{\infty} U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (2)$$

где α – коэффициент затухания; $U_{a1} = \frac{1}{\pi}$, $k = \frac{\omega_k}{\omega_1}$, $U_{ak} = \frac{U_{a1}}{k}$, $n \approx 12$, $\sum_{k=1}^n U_{ak} = 1$, ω_k – круговая частота k -й гармоники; U_{ak} – амплитуда k -й гармоники.

Свойства сингулярисного разложения описаны в работе [3]. Используя в (1) выражение (2), получим разложение $F(t)$, названное по моему предложению Фурье-сингулярисным, в виде

$$F(t) = F_0 (1 - e^{-\alpha t}) + F_0 e^{-\alpha t} \sum_{m=1}^{\infty} U_{ak} \cos \omega_k t + \frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (3)$$

Именно выражение (3) описывает периодический полусинусоидальный удар, изображенный на рис. 2. Для определения реакции КС на удар в виде (3) запишем следующее дифференциальное уравнение движения КС:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t), \quad (4)$$

где b, c – коэффициенты диссипации и жесткости соответственно.

Удар в виде (3) создает свободные и вынужденные осцилляции в КС. Определение осцилляции в КС при действии данного удара будем осуществлять операционным методом, используя изображения Карсона [4]. В изображениях Карсона уравнение (4) с учетом (3) имеет вид

$$x(p) (mp^2 + bp + c) = F_0 \frac{\alpha}{p + \alpha} + F_0 \sum_{k=1}^n \frac{p(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} + \frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \frac{p^2}{p^2 + 4\omega^2} - \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{p^2}{p^2 + 16\omega^2} + \frac{1}{5 \cdot 7} \frac{p^2}{p^2 + 36\omega^2} - \dots \right), \quad (5)$$

где $x(p)$ – изображение Карсона оригинала $x(t)$, $p = \frac{d}{dt}$ – оператор.

Из (5)

$$x(p) = \frac{1}{mp^2 + bp + c_1} \left\{ F_0 \frac{\alpha}{p + \alpha} + F_0 \sum_{k=1}^n \frac{p(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} + \frac{2F_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \frac{p^2}{p^2 + 4\omega^2} - \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{p^2}{p^2 + 16\omega^2} + \frac{1}{5 \cdot 7} \frac{p^2}{p^2 + 36\omega^2} - \dots \right) \right\}. \quad (6)$$

Оригинал $x(t)$, соответствующий выражению (6), находим по таблицам, представленным в работе [4]. Но вначале применим метод простых дробей [4], в результате которого выражение (6) представим в виде

$$x(p) \approx \frac{F_0}{m} \left\{ \left[\frac{A_1}{p + \alpha} + \frac{B_1 p + D_1}{p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m}} \right] + F_0 \sum_{k=1}^n U_{ak} \left[\frac{A_{1k} + B_{1k}}{p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m}} + \frac{C_{1k} p + D_{1k}}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{F_a}{2m} \left[\left(\frac{A_2 p + B_2}{p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m}} + \frac{C_2 p + D_2}{p^2 + \omega^2} \right) + \frac{2F_a}{m \cdot 3\pi} \left(\frac{A_3 p + B_3}{p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m}} + \frac{C_3 p + D_3}{p^2 + 4\omega^2} \right) \right] \right\} \quad (7)$$

На основе сравнения (6) и (7) получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m} \right) + (B_1 p + D_1)(p + \alpha) &= \alpha, \\ (A_{1k} + B_{1k}) \left[(p + \alpha)^2 + \omega_k^2 \right] + (C_{1k} p + D_{1k}) \left(p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m} \right) &= p^2 + p\alpha, \\ (A_2 p + B_2)(p^2 + \omega^2) + (C_2 p + D_2) \left(p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m} \right) &= p^2, \\ (A_3 p + B_3)(p^2 + 4\omega^2) + (C_3 p + D_3) \left(p^2 + \frac{bp}{m} + \frac{c}{m} \right) &= p^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из уравнений (8) можно получить значения коэффициентов $A_1, B_1, D_1, A_{1k}, B_{1k}, C_{1k}, D_{1k}, A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3, D_2, D_3$, приравнявая левые части уравнений при операторе « p » правым частям при этих же операторах с соответствующими показателями степени.

Для того чтобы не загромождать материал статьи элементарными преобразованиями в виде подстановок в (8) при определении указанных коэффициентов, предоставим читателю самостоятельно определить эти коэффициенты. Заметим, что на общий вид выражения осцилляций в КС величины этих коэффициентов не оказывают влияния. Потому представим выражения осцилляций, используя эти коэффициенты в своих обозначениях. По таблицам из работы [5] изображению (7) соответствует следующий оригинал:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{A_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{F_0}{m} B_1 \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{c} D_1 \left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] + \\ + \frac{F_0}{m} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{A_{1k}}{\omega_0} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega_0 t + \frac{B_{1k}}{c} \left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] + \frac{C_{1k}}{\omega_k} e^{-\alpha t} \sin \omega_k t + \right. \\ \left. + \frac{D_{1k}}{\alpha^2 + \omega_k^2} \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_k t + \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \right] \right\} + \frac{F_a}{2m} \frac{A_2}{\omega_0} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega_0 t + \frac{F_a}{2c} B_2 \times \\ \times \left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] + \frac{F_a}{2m} \frac{C_2}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_a}{2m} \frac{D_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \\ + \frac{2F_a}{1 \cdot 3\pi m} \frac{A_3}{\omega_0} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega_0 t + \frac{2F_a}{1 \cdot 3\pi c} B_3 \left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] + \\ + \frac{2F_a}{1 \cdot 3\pi m} \frac{C_3}{4\omega} \sin 2\omega t + \frac{2F_a}{1 \cdot 3\pi m} \frac{D_3}{4\omega} (1 - \cos 2\omega t), \quad (9)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, $\frac{c}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$.

Выражение (9) в упрощенном виде следующее:

$$x(t) = x_0 - x_0 e^{-\alpha t} + e^{-\frac{b}{2m}t} (A_0 \sin \omega_0 t - B_0 \cos \omega_0 t) + e^{-\alpha t} \frac{F_0}{m} \sum_{k=1}^n U_{ak} (a_{0k} \sin \omega_k t - b_{0k} \cos \omega_k t) + \frac{F_a C_2}{2m\omega} \sin \omega t - \frac{F_a D_2}{2m\omega^2} \cos \omega t + \frac{2F_a C_3}{1 \cdot 3 \cdot 4\pi m\omega} \sin 2\omega t + \frac{2F_a}{1 \cdot 3 \cdot 4\pi m\omega} D_3 \cos 2\omega t, \quad (10)$$

$$\text{где } x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{A_1}{\alpha} + \frac{F_0 D_1}{c} + \frac{F_0}{c} \sum_{k=1}^n B_{1k} U_{ak} + \frac{F_0}{m} \sum_{k=1}^n U_{ak} \frac{D_{1k}}{\alpha^2 + \omega_k^2} + \frac{F_a B_2}{2c} + \frac{F_a}{2m\omega^2} D_2 + \frac{2F_a B_3}{1 \cdot 3\pi c} + \frac{2F_a D_3}{1 \cdot 3 \cdot 4\pi m\omega}, \quad x_{01} = \frac{F_a A_1}{m\alpha}, \quad A_0 = \frac{F_a}{m} \frac{B_1}{\omega_0} - \frac{F_a D_1 b}{2cm\omega_0} + \frac{F_0}{m\omega_0} - \sum_{k=1}^n U_{ak} A_{1k} - \frac{F_0 b}{2cm\omega_0} \sum_{k=1}^n U_{ak} B_{1k} + \frac{F_a}{2c\omega_0} A_2 - \frac{4F_a b}{4cm\omega_0} B_2 + \frac{2F_a A_3}{1 \cdot 3 \cdot \pi m\omega_0} - \frac{F_a B_3 b}{1 \cdot 3 \cdot \pi cm\omega_0}, \quad B_0 = \frac{F_a}{c} D_1 - \frac{F_0}{c} \sum_{k=1}^n U_{ak} B_{1k} + \frac{F_a}{2c} B_2 + \frac{2F_a B_3}{1 \cdot 3\pi c},$$

$$a_{0k} = \left[\frac{c_{1k}}{\omega k} - \frac{D_{1k}}{(\alpha^2 + \omega_k^2)} \right] \frac{\alpha}{\omega_k}, \quad b_{0k} = \frac{D_{1k}}{\alpha^2 + \omega_k^2}.$$

Как видно из (10), перемещение $x(t)$ представляет собой сложное колебание, состоящее из постоянного смещения x_0 , затухающей экспоненты $x_{01}e^{-\alpha t}$, затухающих колебаний с собственной частотой ω_0 и коэффициентом затухания $\gamma = \frac{b}{2m}$, затухающих полигармонических колебаний с частотами ω_k и коэффициентом затухания α и установившихся колебаний с частотами ω , 2ω . Еще раз отметим, что гармоники с частотами 4ω , 6ω и т.д. здесь не учитываются из-за очень малых их амплитуд. Заметим, что при $\alpha = \infty$ $x_{01}e^{-\alpha t} = 0$ и $e^{-\alpha t} \frac{F_0}{m} \sum_{k=1}^n U_{ak} (a_{0k} \sin \omega_k t - b_{0k} \cos \omega_k t) = 0$. В этом случае переходной процесс определяется коэффициентом затухания $\gamma = \frac{b}{2m}$.

Вывод

Наличие в колебании нескольких гармоник обуславливает в выборе параметров КС, таких, чтобы на этих частотах не было резонансов.

Литература

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М.: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. Божко А. Е. Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях / А. Е. Божко // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
3. Божко А. Е. О сингулярном разложении скачкообразной функции / А. Е. Божко // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 42–47.
4. Гинзбург С. Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях / С. Г. Гинзбург. – М.: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Поступила в редакцию
05.01.11