

## Рассеяние электромагнитных волн тонкими вибраторами с переменным поверхностным импедансом

М. В. Нестеренко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Mikhail.V.Nesterenko@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2005 г.

Решена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны тонким вибратором с переменным вдоль его оси комплексным поверхностным импедансом. Приведены графики эффективных поперечников рассеяния в зависимости от электрической длины вибратора и различных законов изменения импеданса вдоль него. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных результатов при постоянном импедансе по длине вибратора.

### Введение

Тонкие импедансные вибраторы находят широкое применение в антенно-волноводной технике. Особое место среди них занимают вибраторы с переменным поверхностным импедансом, которые дают дополнительные возможности для управления электродинамическими характеристиками антенн фиксированных геометрических размеров [1-6]. Не анализируя здесь методы, с помощью которых решались задачи в перечисленных работах, отметим, что все они посвящены исследованиям (как теоретическим, так и экспериментальным) характеристик излучающего вибратора, возбуждаемого в центре сосредоточенной электродвижущей силой (ЭДС).

В настоящей работе решена задача о рассеянии электромагнитных волн тонким вибратором с переменным комплексным поверхностным импедансом, причем никаких ограничений на величину и вид функциональной зависимости импеданса по длине вибратора не накладываемся.

### Постановка и решение задачи методом усреднения

Для вибратора, представляющего собой тонкий прямолинейный импедансный цилиндр радиуса  $r$  и длиной  $2L$  ( $r/2L \ll 1$ ), рас-

положенного в свободном пространстве и возбуждаемого заданным полем сторонних источников, квазиодномерное интегро-дифференциальное уравнение относительно электрического тока имеет следующий вид [4]:

$$\left( \frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_{-L}^L J(s') \frac{e^{-ik\sqrt{(s-s')^2+r^2}}}{\sqrt{(s-s')^2+r^2}} ds' = -i\omega E_{0s}(s) + i\omega z_i(s)J(s). \quad (1)$$

Здесь  $z_i(s)$  – комплексный внутренний погонный импеданс вибратора, Ом/м;  $E_{0s}(s)$  – составляющая электрического поля сторонних источников вдоль оси вибратора;  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны ( $r/\lambda \ll 1$ );  $\omega$  – круговая частота (зависимость от времени  $t$  выбрана в виде  $e^{i\omega t}$ );  $s$  ( $s'$ ) – продольная координата, связанная с осью (поверхностью) вибратора;  $J(s)$  – искомый ток, удовлетворяющий краевым условиям  $J(\pm L) = 0$ .

Решение уравнения (1) будем искать методом усреднения (подробное решение (1) этим методом для случая постоянного импеданса вдоль оси вибратора дано в [7]). После приведения уравнения (1) к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром  $\alpha = \frac{1}{2\ln(r/(2L))}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) = \\ & = \alpha \{ i\omega E_{0s}(s) + F[s, J(s)] - i\omega z_i(s) J(s) \}, \\ & F[s, J(s)] = - \frac{dJ(s')}{ds'} \frac{e^{-ikR(s,s')}}{R(s,s')} \Big|_{-L}^L + \\ & + \left[ \frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) \right] \gamma(s) + \\ & + \int_{-L}^L \frac{\left[ \frac{d^2 J(s')}{ds'^2} + k^2 J(s') \right] e^{-ikR(s,s')}}{R(s,s')} - \left[ \frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) \right] ds', \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R(s, s') &= \sqrt{(s-s')^2 + r^2}, \\ \gamma(s) &= \ln \frac{(L+s) + \sqrt{(L+s)^2 + r^2}}{2L} \times \\ & \times \frac{(L-s) + \sqrt{(L-s)^2 + r^2}}{2L}. \end{aligned}$$

и выполнения в (2) замены

$$J(s) = A(s) \cos ks + B(s) \sin ks, \quad (3)$$

получаем систему уравнений стандартного вида [8, 9] относительно новых неизвестных  $A(s)$  и  $B(s)$

$$\begin{aligned} \frac{dA(s)}{ds} &= - \frac{\alpha}{k} \{ i\omega E_{0s}(s) + F[s, A(s), B(s)] - \\ & - i\omega z_i(s) [A(s) \cos ks + B(s) \sin ks] \} \sin ks, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB(s)}{ds} &= + \frac{\alpha}{k} \{ i\omega E_{0s}(s) + F[s, A(s), B(s)] - \\ & - i\omega z_i(s) [A(s) \cos ks + B(s) \sin ks] \} \cos ks, \end{aligned}$$

полностью эквивалентную исходным уравнениям (1) и (2).

Производя в системе (4) частичное [9] усреднение по переменной  $s$  (термин “частичное” означает, что мы воздействуем в (4) оператором усреднения на все слагаемые, кроме содержащих  $E_{0s}(s)$ ), получаем усредненные уравнения первого приближения по малому параметру  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}(s)}{ds} &= -\alpha \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s) + \bar{F}[s, \bar{A}, \bar{B}] \right\} \sin ks + \\ & + \chi_a \bar{A}(s) + \chi_s \bar{B}(s), \\ \frac{d\bar{B}(s)}{ds} &= +\alpha \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s) + \bar{F}[s, \bar{A}, \bar{B}] \right\} \cos ks - \\ & - \chi_s \bar{A}(s) - \chi_a \bar{B}(s). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь учтено, что в общем случае распределенный по длине вибратора импеданс имеет две составляющие – симметричную ( $z_i^s(s)$ ) и антисимметричную ( $z_i^a(s)$ ), по которым в (5) определены величины:

$$\chi_s = \lim_{2L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{\alpha i\omega}{k} \int_{-L}^L z_i^s(s) \sin^2 ks \{ \cos^2 ks \} ds, \quad (6)$$

$$\chi_a = \lim_{2L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{\alpha i\omega}{k} \int_{-L}^L \frac{1}{2} z_i^a(s) \sin 2ks ds.$$

Будем искать решение системы уравнений (5) в следующем виде [10]:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s) &= \chi_s [C_1(s) \sin \chi s + C_2(s) \cos \chi s], \\ \bar{B}(s) &= -\chi_a [C_1(s) \sin \chi s + C_2(s) \cos \chi s] + \\ & + \chi [C_1(s) \cos \chi s - C_2(s) \sin \chi s]. \end{aligned}$$

Здесь  $\chi^2 = \chi_s^2 - \chi_a^2$ ,  $C_1(s)$  и  $C_2(s)$  – новые искомые функции. В результате достаточно громоздких вычислений получаем:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s) &= \frac{1}{\chi} \{ \bar{A}(-L) [\chi \cos(\chi(L+s)) + \chi_a \sin(\chi(L+s))] + \\ & + \bar{B}(-L) [\chi_s \sin(\chi(L+s))] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s') + \bar{F}[s', \bar{A}, \bar{B}] \right\} \times \\
 & \times [\chi_s \cos ks' \sin(\chi(s-s')) - \chi \sin ks' \cos(\chi(s-s')) + \\
 & + \chi_a \sin ks' \sin(\chi(s-s'))] ds', \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{B}(s) = & \frac{1}{\chi} \left\{ -\bar{A}(-L) [\chi_s \sin(\chi(L+s))] + \right. \\
 & + \bar{B}(-L) [\chi \cos(\chi(L+s)) - \chi_a \sin(\chi(L+s))] + \\
 & + \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s') + \bar{F}[s', \bar{A}, \bar{B}] \right\} \times \\
 & \times [\chi_s \sin ks' \sin(\chi(s-s')) + \chi \cos ks' \cos(\chi(s-s')) - \\
 & - \chi_a \cos ks' \sin(\chi(s-s'))] ds' \Big\},
 \end{aligned}$$

где  $\bar{F}[s, \bar{A}, \bar{B}] = [\bar{A}(L) \sin kL - \bar{B}(L) \cos kL] \times$   
 $\frac{e^{-ik\sqrt{(L-s)^2+r^2}}}{\sqrt{(L-s)^2+r^2}} + [\bar{A}(-L) \sin kL + \bar{B}(-L) \cos kL] \times$   
 $\frac{e^{-ik\sqrt{(L+s)^2+r^2}}}{\sqrt{(L+s)^2+r^2}}.$

Подставляя найденные значения  $\bar{A}(s)$  и  $\bar{B}(s)$  в качестве аппроксимирующих функций для  $A(s)$  и  $B(s)$  в формулу (3), получим наиболее общее асимптотическое (по параметру  $\alpha$ ) выражение для тока в тонком вибраторе с переменным вдоль его оси импедансом при произвольном возбуждении вибратора:

$$\begin{aligned}
 J(s) = & \bar{A}(-L) [\cos ks \cos(\chi(L+s)) - \\
 & - (\bar{\chi}_s \sin ks - \bar{\chi}_a \cos ks) \sin(\chi(L+s))] + \\
 & + \bar{B}(-L) [\sin ks \cos(\chi(L+s)) + (\bar{\chi}_s \cos ks - \bar{\chi}_a \sin ks) \times \\
 & \times \sin(\chi(L+s))] + \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s') + \bar{F}[s', \bar{A}(\pm L), \bar{B}(\pm L)] \right\} \times \\
 & \times \left\{ \sin(k(s-s')) \cos(\chi(s-s')) + \right. \\
 & \left. + [\bar{\chi}_s \cos(k(s-s')) - \bar{\chi}_a \sin(k(s+s'))] \sin(\chi(s-s')) \right\} ds'. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\chi}_s = \chi_s/\chi$ ,  $\bar{\chi}_a = \chi_a/\chi$ , а для определения четырех постоянных  $\bar{A}(\pm L)$  и  $\bar{B}(\pm L)$  необходимо помимо краевых условий для тока использовать условия симметрии [11], которые однозначно связаны со способом возбуждения вибратора, но не учитывают характер изменения импеданса вдоль него. Принимая во внимание это обстоятельство, а также то, что получаемые из (8) окончательные выражения для тока достаточно громоздки для практического использования (кроме случая постоянного импеданса, когда  $\chi = \alpha \frac{i\omega}{2k} z_i$ ,  $\bar{\chi}_s = 1$ ,  $\bar{\chi}_a = 0$  и формула (8) существенно упрощается), найдем решение уравнения (1) методом наведенных ЭДС.

### Решение уравнения для тока методом наведенных ЭДС

Для приближенного аналитического решения уравнения (1) в случае симметричного возбуждения вибратора  $E_{0s}(s) = E_{0s}(-s)$  и при условии, что  $z_i(s) = z_i(-s)$ , применим метод наведенных ЭДС. Аппроксимируя распределение электрического тока выражением

$$J(s) = J_0 f(s), \quad f(\pm L) = 0, \tag{9}$$

где  $J_0$  – неизвестная амплитуда тока,  $f(s)$  – заданная функция, и умножая левую и правую части уравнения (1) на  $f(s)$ , после интегрирования по длине вибратора получим:

$$\begin{aligned}
 J_0 = & -\frac{i\omega}{2k} \int_{-L}^L f(s) E_{0s}(s) ds \left\{ \frac{1}{2k} \int_{-L}^L f(s) \times \right. \\
 & \times \left[ \left( \frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_{-L}^L f(s') \frac{e^{-ik\sqrt{(s-s')^2+r^2}}}{\sqrt{(s-s')^2+r^2}} ds' \right] ds - \\
 & \left. - \frac{i\omega}{2k} \int_{-L}^L f^2(s) z_i(s) ds \right\}^{-1}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Как известно [11], метод наведенных ЭДС дает тем более точное решение, чем более правильно выбраны аппроксимирующие функции для тока. При наличии у вибратора переменного по его длине импеданса наиболее адекватной реальному физическому процессу, с нашей точки зрения, будет функция, содержащая информацию о среднем значении импеданса вдоль вибратора (для малых колебаний величины импеданса около среднего значения это наиболее очевидно). Сам вид функциональной зависимости импеданса оказывает наибольшее влияние на амплитуду тока  $J_0$  и, соответственно, другие электродинамические характеристики вибратора. Как будет показано ниже, два разных распределения импеданса, имеющие одинаковое среднее значение по длине вибратора, приводят к различным величинам эффективного поперечника обратного рассеяния (ЭПР).

Рассмотрим случай нормального падения плоской электромагнитной волны на вибратор:  $E_{0s}(s) = E_0$ . Тогда в качестве  $f(s)$  можно выбрать функцию распределения тока, найденную при решении уравнения (1) методом усреднения в задаче о приемном вибраторе с постоянным поверхностным импедансом в свободном пространстве [12]:

$$f(s) = \cos \tilde{k}s - \cos \tilde{k}L. \quad (11)$$

В (11)  $\tilde{k} = k - \frac{i2\pi z_i^{cp}}{Z_0\Omega}$ ,  $z_i^{cp} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L z_i(s) ds$  – среднее значение внутреннего импеданса по длине вибратора,  $Z_0 = 120\pi$ , Ом – волновое сопротивление свободного пространства,  $\Omega = 2\ln(2L/r)$ . Отметим, что в отличие от используемых в литературе [1-6] аппроксимирующих функций распределения тока выражение (11) напрямую содержит информацию о виде распределения импеданса  $z_i(s)$  вдоль вибратора. Обоснование такого выбора функции  $f(s)$  представлено в Приложении. Там же приведены функции распределения в случае, когда  $E_{0s}(s) = E_{0s}(-s)$ , но при этом  $z_i(s) \neq z_i(-s)$ .

Подставляя (11) в (10) и вычисляя  $J_0$ , получаем из (9) искомое выражение для тока:

$$J(s) = -\frac{i\omega}{k\tilde{k}} E_0 \frac{(\sin \tilde{k}L - \tilde{k}L \cos \tilde{k}L)(\cos \tilde{k}s - \cos \tilde{k}L)}{Z(kr, \tilde{k}L) + F_z(\tilde{k}r, \tilde{k}L)}, \quad (12)$$

где

$$Z(kr, \tilde{k}L) = \frac{1}{2k} \int_{-L}^L (\cos \tilde{k}s - \cos \tilde{k}L) \left( \frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) F_f(s) ds, \quad (13)$$

$$F_f(s) = \int_{-L}^L (\cos \tilde{k}s' - \cos \tilde{k}L) \frac{e^{-ik\sqrt{(s-s')^2+r^2}}}{\sqrt{(s-s')^2+r^2}} ds', \quad (14)$$

$$F_z(\tilde{k}r, \tilde{k}L) = -\frac{i}{r} \int_{-L}^L (\cos \tilde{k}s - \cos \tilde{k}L)^2 \bar{Z}_s(s) ds. \quad (15)$$

В выражениях (13)–(15) приняты обозначения:  $\bar{Z}_s(s) = \bar{R}_s(s) + i\bar{X}_s(s) = \frac{2\pi r z_i(s)}{Z_0}$  – нормированный комплексный поверхностный импеданс вибратора, распределенный вдоль него по закону  $\bar{Z}_s(s) = \bar{Z}_s \phi(s)$ , где  $\phi(s)$  – заданная функция. В частности, при  $\phi(s) = 1$   $\bar{Z}_s^{cp} = \frac{2\pi r z_i^{cp}}{Z_0} = \bar{Z}_s$  и

$$F_z(\tilde{k}r, \tilde{k}L) = -\frac{i\bar{Z}_s}{\tilde{k}r} \left[ \tilde{k}L(2 + \cos 2\tilde{k}L) - \frac{3}{2} \sin 2\tilde{k}L \right]. \quad (16)$$

Найдем выражение для  $Z(kr, \tilde{k}L)$ , преобразуя (13) интегрированием по частям:

$$Z(kr, \tilde{k}L) = \frac{1}{2k} \left\{ -\tilde{k} \sin \tilde{k}s F_f(s) \Big|_{-L}^L + \right.$$

$$+ \int_{-L}^L \left[ (k^2 - \tilde{k}^2) \cos \tilde{k}s - k^2 \cos \tilde{k}L \right] F_f(s) ds \Bigg\}.$$

Выражение для  $F_f(s)$  можно получить, используя формулы (5.31), (5.32) из [13] и учитывая, что  $kr \ll 1$ :

$$\begin{aligned} F_f(s) = & \frac{1}{2} \cos \tilde{k}s \left\{ 2\Omega(s) - \text{Cin}(k^+(L+s)) - \right. \\ & - \text{Cin}(k^+(L-s)) - \text{Cin}(k^-(L+s)) - \text{Cin}(k^-(L-s)) - \\ & - i \left[ \text{Si}(k^+(L+s)) + \text{Si}(k^+(L-s)) + \right. \\ & + \text{Si}(k^-(L+s)) + \text{Si}(k^-(L-s)) \left. \right] \Bigg\} + \\ & + \frac{1}{2} \sin \tilde{k}s \left\{ \text{Si}(k^+(L+s)) - \text{Si}(k^+(L-s)) - \right. \\ & - \text{Si}(k^-(L+s)) + \text{Si}(k^-(L-s)) - \\ & - i \left[ \text{Cin}(k^+(L+s)) - \text{Cin}(k^+(L-s)) - \right. \\ & - \text{Cin}(k^-(L+s)) + \text{Cin}(k^-(L-s)) \left. \right] \Bigg\} - \\ & - \cos \tilde{k}L \left\{ \Omega(s) - \text{Cin}(k(L+s)) - \text{Cin}(k(L-s)) - \right. \\ & - i \left[ \text{Si}(k(L+s)) + \text{Si}(k(L-s)) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $k^+ = k + \tilde{k}$ ,  $k^- = k - \tilde{k}$ ,  $\Omega(s) = \ln \frac{\sqrt{(L+s)^2 + r^2} + (L+s)}{\sqrt{(L-s)^2 + r^2} - (L-s)}$ ,  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin s}{s} ds$  и  $\text{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos s}{s} ds$  – интегральные синус и косинус.

Тогда

$$\begin{aligned} Z(kr, \tilde{k}L) = & \left( \frac{\tilde{k}}{k} \right) \sin \tilde{k}L F_f(L) - \frac{k}{2} \cos \tilde{k}L \times \\ & \times \int_{-L}^L F_f(s) ds + \frac{k^2 - \tilde{k}^2}{2k} \int_{-L}^L \cos \tilde{k}s F_f(s) ds \end{aligned} \quad (18)$$

и при  $\tilde{k} = k$  (18) с учетом (17) переходит в известное выражение из работы [14].

Рассеивающие свойства пассивных вибраторов в свободном пространстве удобно характеризовать эффективным поперечником обратного рассеяния  $\sigma/\lambda^2$  [14, 15], выражение для которого в нашем случае имеет вид:

$$\frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{4}{\pi} \left| \frac{k}{\tilde{k}} \right|^4 \left| \frac{(\sin \tilde{k}L - \tilde{k}L \cos \tilde{k}L)^2}{Z(kr, \tilde{k}L) + F_z(\tilde{k}r, \tilde{k}L)} \right|^2. \quad (19)$$

Для иллюстрации влияния закона изменения импеданса вдоль оси вибратора на его характеристики рассмотрим следующие функции распределения  $\phi(s)$ , выбранные таким образом, чтобы их средние значения по длине вибратора были равны между собой:

1)  $\phi_1(s) = e^{-\beta \frac{|s|}{L}}$  – экспоненциально спадающее к концам вибратора распределение импеданса;

2)  $\phi_2(s) = e^{\beta \left( \frac{|s|}{L} - 1 \right)}$  – экспоненциально возрастающее к концам вибратора распределение импеданса.

Здесь  $\beta$  – произвольная безразмерная постоянная,

$$\overline{\phi_{1,2}(s)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \phi_{1,2}(s) ds = \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta}, \quad (20)$$

а графики функций  $\phi_{1,2}(s)$  и их средние величины при различных значениях  $\beta$  представлены на рис. 1. Тогда согласно (20)  $Z_{s1}^{cp} = Z_{s2}^{cp} = Z_s \overline{\phi_{1,2}(s)}$  и

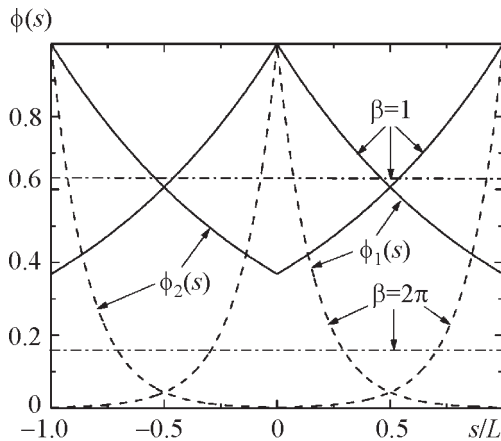
$$\begin{aligned} F_{z1}(\tilde{k}r, \tilde{k}L) = & - \frac{i \overline{Z}_s}{\tilde{k}r} \left\{ \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta} \tilde{k}L (2 + \cos 2\tilde{k}L) + \right. \\ & + \frac{e^{-\beta} (\tilde{k}L \sin 2\tilde{k}L - (\beta/2) \cos 2\tilde{k}L) + \beta/2}{2\tilde{k}L \left[ 1 + (\beta/(2\tilde{k}L))^2 \right]} - \\ & \left. - \frac{4 \cos \tilde{k}L \left[ e^{-\beta} (\tilde{k}L \sin \tilde{k}L - \beta \cos \tilde{k}L) + \beta \right]}{\tilde{k}L \left[ 1 + (\beta/(\tilde{k}L))^2 \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (21a)$$

### Численные результаты

$$F_{z2}(\tilde{k}r, \tilde{k}L) = -\frac{i\bar{Z}_s}{\tilde{k}r} \left\{ \frac{1-e^{-\beta}}{\beta} \tilde{k}L(2+\cos 2\tilde{k}L) + \frac{\tilde{k}L \sin 2\tilde{k}L + (\beta/2)(\cos 2\tilde{k}L - e^{-\beta})}{2\tilde{k}L \left[ 1 + (\beta/(2\tilde{k}L))^2 \right]} - \frac{4\cos \tilde{k}L \left[ \tilde{k}L \sin \tilde{k}L + \beta(\cos \tilde{k}L - e^{-\beta}) \right]}{\tilde{k}L \left[ 1 + (\beta/(\tilde{k}L))^2 \right]} \right\}. \quad (21б)$$

Отметим, что при  $\beta=0$  выражения (21), как и следовало ожидать, переходят в формулу (16), а для настроенного вибратора ( $\tilde{k}L = \pi/2$ ) отличаются между собой:

$$\left. \begin{aligned} F_{z1}(\tilde{k}r, \pi/2) \\ F_{z2}(\tilde{k}r, \pi/2) \end{aligned} \right\} = -\frac{i\bar{Z}_s}{\tilde{k}r} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1-e^{-\beta}}{\beta} \pm \frac{\beta(1+e^{-\beta})}{\beta^2 + \pi^2} \right].$$

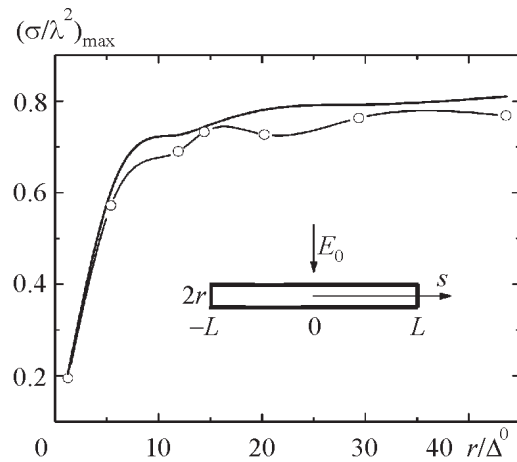


**Рис. 1.** Законы изменения импеданса  $\phi_1(s)$  и  $\phi_2(s)$  по длине вибратора: сплошные кривые –  $\beta = 1$ ; пунктирные кривые –  $\beta = 2\pi$ ; штрих-пунктирные кривые – средние значения

Как известно [4, 14, 16], учет конечной проводимости  $\sigma_0$  металла, из которого изготовлен вибратор, можно осуществить с помощью соотношения:

$$\bar{Z}_s = \frac{k'}{120\pi\sigma_0} \frac{I_0(k'r)}{I_1(k'r)},$$

где  $k' = (1-i)/\Delta^0$ ,  $\Delta^0 = \omega / (k\sqrt{2\pi\sigma_0\omega\mu})$  – толщина скин-слоя,  $I_0(k'r)$  и  $I_1(k'r)$  – функции Бесселя (комплексного аргумента) нулевого и первого порядка. На рис. 2 для случая нормального падения плоской электромагнитной волны представлены теоретические (рассчитанные по формуле (19)) и экспериментальные [14] максимальные (резонансные,  $2L \approx \lambda/2$ ) значения  $(\sigma/\lambda^2)_{\max}$  для металлических вибраторов различного радиуса, а соответствующие величины внутренних импедансов использованных металлов даны в таблице. В таблице приведены также расчетные и экспериментальные [14] значения относительной ширины полосы ЭПР по уровню  $0.5(\sigma/\lambda^2)$ . Как видно из



**Рис. 2.** ЭПР<sub>max</sub> для металлических вибраторов различного радиуса (см. таблицу) при нормальном падении плоской электромагнитной волны с амплитудой  $E_0$  на вибратор радиуса  $r$  и длиной  $2L$ : — – расчет; –○– – эксперимент [14]

**Таблица.** Расчетные и экспериментальные [14] значения относительной ширины полосы ЭПР

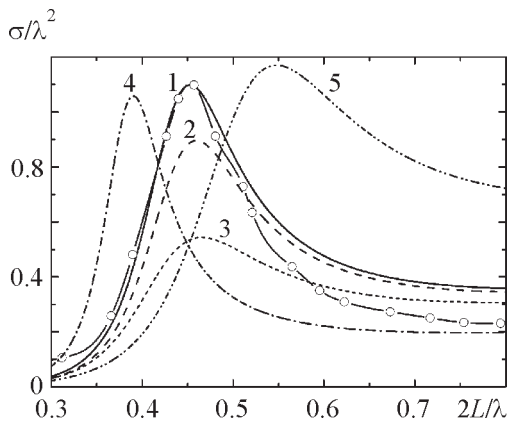
$r$ , см	Материал	$z_i$ , Ом/см	Эксперимент	Расчет
0.001×1.27	Медь	1.89 + i1.8	11.2	12.0
0.003×1.27	Медь	0.625 + i0.597	13.5	14.0
0.001×1.27	Платина	5.27 + i4.58	14.0	13.2
0.002×1.27	Платина	2.27 + i2.21	14.4	13.7
0.003×1.27	Платина	1.15 + i1.47	15.3	14.1
0.005×1.27	Платина	0.93 + i0.886	16.4	15.5
0.001×1.27	Висмут	29.4 + i7.0	24.7	24.8

сравнения расчетных и экспериментальных результатов, принятая в работе математическая модель и полученное решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на импедансном вибраторе вполне соответствуют реальному физическому процессу.

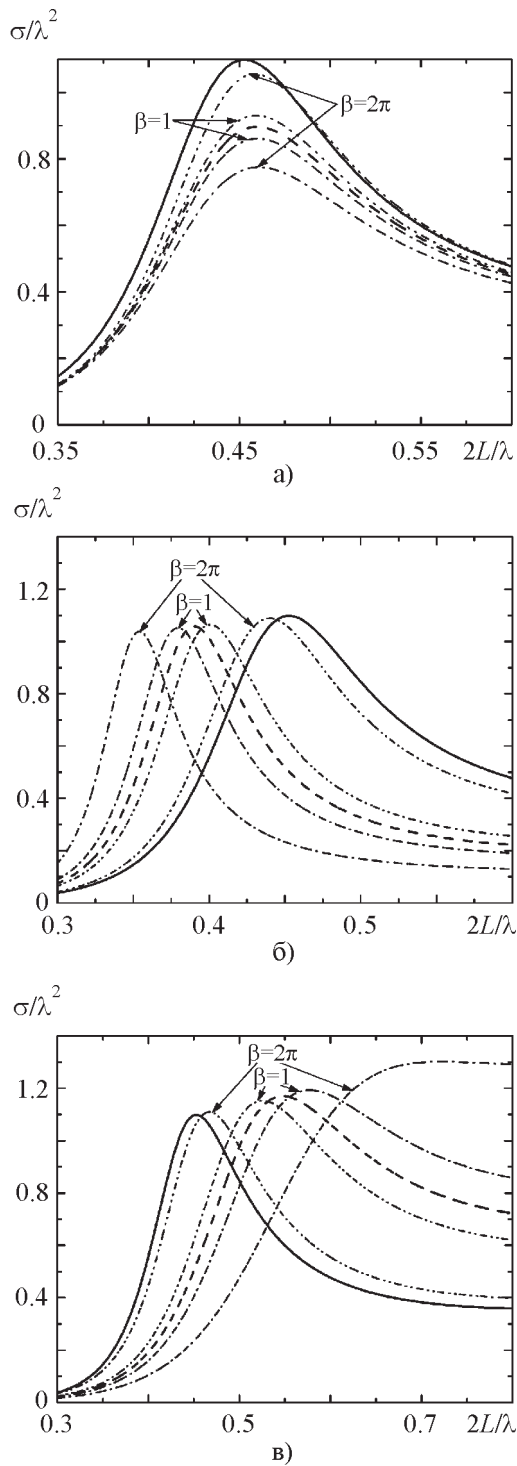
На рис. 3 представлены зависимости ЭПР от электрической длины для идеально проводящего (кривая 1) и импедансных (кривые 2-5) вибраторов с постоянным распределением импеданса вдоль вибратора. Здесь же приведены экспериментальные величины (кружки) из работы [15] (посеребренный проводник,  $r = 0.1016$  см,  $\lambda = 10$  см), причем нормировка всех кривых (и на пос-

ледующих рисунках также) произведена на максимальное (резонансное) экспериментальное значение  $\sigma/\lambda^2$ . Как и следовало ожидать, с ростом действительной части поверхностного импеданса  $\bar{R}_s$  (кривые 2, 3) величина ЭПР уменьшается относительно значений для идеально проводящего вибратора, практически не изменяя при этом значение резонансной длины вибратора  $2L_{res}$ . Импеданс индуктивного типа (кривая 4) понижает  $2L_{res}$ , а емкостного типа (кривая 5) ведет к увеличению  $2L_{res}$  и относительной ширины полосы ЭПР.

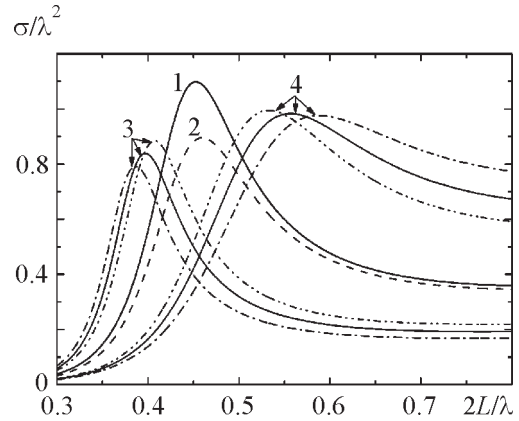
Влияние неоднородности импеданса по длине вибратора для различных типов поверхностного импеданса и при разных значениях параметра  $\beta$  можно проследить на рис. 4 ( $\bar{R}_s^{cp} = 0.005$ ,  $\bar{X}_s^{cp} = \pm 0.05$ ,  $\beta = 1$ ;  $2\pi$ ). Как видно из графиков, с ростом  $\beta$  отличие величины  $\sigma/\lambda^2$  от ее значений для случая постоянного распределения увеличивается, причем спадающее к краям вибратора распределение “эквивалентно” увеличению импеданса, а возрастающее – уменьшению последнего. Это, на наш взгляд, объясняется тем, что распределение тока вдоль вибратора (12) максимально в его центре и равно нулю на концах, и в соответствии с поведением кривых для рассматриваемых законов распределения импеданса (рис. 1) приводит к полученным результатам. В случае комплексного неоднородного импеданса (рис. 5,  $\bar{Z}_s^{cp} = 0.05 \pm i0.05$ ,  $\beta = 1$ ) одновременно имеют место эффекты понижения величины ЭПР, относительного сужения (расширения) рабочей полосы частот и изменения резонансной длины вибратора.



**Рис. 3.** Зависимости ЭПР от электрической длины при постоянном импедансе вдоль вибратора: кривая 1 –  $\bar{Z}_s = 0$ ; кривая 2 –  $\bar{Z}_s = 0.005$ ; кривая 3 –  $\bar{Z}_s = 0.02$ ; кривая 4 –  $\bar{Z}_s = i0.05$ ; кривая 5 –  $\bar{Z}_s = -i0.05$ ;  $-\circ-$  – экспериментальная кривая при  $\bar{Z}_s = 0$  [15]



**Рис. 4.** Зависимости ЭПР от электрической длины при переменном импедансе вдоль вибратора ( $\beta = 1; 2\pi$ ): — —  $\bar{Z}_s = 0$ ; - · - · -  $\phi_1(s)$ ; - · · -  $\phi_2(s)$ ; а) - - -  $\bar{Z}_s^{cp} = 0.005$ ; б) - - -  $\bar{Z}_s^{cp} = i0.05$ ; в) - - -  $\bar{Z}_s^{cp} = -i0.05$



**Рис. 5.** Зависимости ЭПР от электрической длины при переменном комплексном импедансе вдоль вибратора ( $\beta = 1$ ): кривая 1 —  $\bar{Z}_s = 0$ ; кривая 2 —  $\bar{Z}_s^{cp} = 0.005$ ; кривая 3 —  $\bar{Z}_s^{cp} = 0.005 + i0.05$ ; кривая 4 —  $\bar{Z}_s^{cp} = 0.005 - i0.05$ ; - · - · -  $\phi_1(s)$ ; - · · -  $\phi_2(s)$

### Заключение

В работе получено приближенное аналитическое решение задачи о рассеянии электромагнитных волн тонким вибратором с переменным по его длине комплексным поверхностным импедансом. Проведенные исследования показали, что различные законы изменения импеданса вдоль вибратора существенно меняют его электродинамические характеристики, что создает дополнительные возможности при конструировании антенных систем с заданными параметрами.

Приведенное решение без принципиальных трудностей может быть распространено на излучающие (приемные) вибраторы, систему вибраторов, а также на случай падения плоской электромагнитной волны под произвольным углом к оси вибратора.

### Приложение

#### Обоснование выбора аппроксимирующих функций для тока

Пусть вибратор возбуждается симметричным полем сторонних источников  $E_{0s}(s) = E_{0s}(-s) = E_{0s}^s(s)$  и распределенный вдоль вибратора импеданс также симметричен:  $z_i(s) = z_i(-s) = z_i^s(s)$ . Тогда в формулах (7), (8)



с учетом (6)  $\chi_a = 0$ ,  $\chi = \chi_s$ ,  $J(s) = J(-s)$ ,  $\bar{A}(-L) = \bar{A}(L) = C_1$ ,  $\bar{B}(-L) = -\bar{B}(L) = C_2$  и

$$J(s) = C_1 \cos[(k + \chi_s)s + \chi_s L] + C_2 \sin[(k + \chi_s)s + \chi_s L] + \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}^s(s') + \bar{F}[s', C_1, C_2] \right\} \times \sin[(k + \chi_s)(s - s')] ds', \quad (\text{П1})$$

а константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются из краевых условий для тока  $J(\pm L) = 0$ . Полагая в (П1)  $E_{0s}^s(s) = E_0$ , после преобразований получаем:

$$J(s) = J_c \left\{ \alpha \left[ \cos((k + \chi_s)s) - \cos((k + \chi_s)L) \right] + \alpha^2 P_s[kr, (k + \chi_s)s] \right\}, \quad (\text{П2})$$

где  $J_c$  – амплитуда тока, а функция  $P_s[kr, (k + \chi_s)s]$  выражается через обобщенные интегральные функции [11], интегралы от которых при вычислении ЭПР можно взять только численно.

Представим  $z_i(s)$  в виде  $z_i(s) = z_i \phi(s)$ , где  $\phi(s) = e^{-\beta|s|/L}$ . Тогда с учетом того, что  $\bar{Z}_s = \frac{2\pi r z_i}{Z_0}$  ( $\bar{Z}_s$  – нормированный на  $Z_0$  поверхностный импеданс), получаем:

$$k + \chi_s = k + i \frac{\alpha}{r} \bar{Z}_s \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta}. \quad (\text{П3})$$

Воспользовавшись выражением для  $\tilde{k}$ , входящим в функцию распределения тока (11), имеем:

$$\tilde{k} = k - \frac{i2\pi z_i}{Z_0 \Omega} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \phi(s) ds = k + i \frac{\alpha}{r} \bar{Z}_s \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta}. \quad (\text{П4})$$

Как видно, выражения (П3) и (П4) тождественно равны между собой, а функциональ-

ные зависимости от координаты  $s$  в формулах (11) и (П2) (при отбрасывании в последней членов, пропорциональных  $\alpha^2$ ) тоже одинаковы. Все это говорит о правомерности аппроксимации (11) при симметричном возбуждении вибратора и распределении импеданса вдоль него.

Отметим также, что приведенный подход к решению задачи (использование метода наведенных ЭДС с адекватными аппроксимирующими функциями) позволяет рассмотреть (в отличие от решения (8)) более специфический вариант, а именно:  $E_{0s}(s) = E_{0s}^s(s)$ ,  $z_i(s) = z_i^s(s) + z_i^a(s)$ . В этом случае, несмотря на симметричное возбуждение, ток в вибраторе уже будет не чисто симметричным, а состоящим из двух частей:

$$J(s) = J^s(s) + J^a(s) = J_0^s f^s(s) + J_0^a f^a(s).$$

Выражение для  $f^a(s)$  можно получить из (8), полагая, что  $z_i(s) = -z_i(-s) = z_i^a(s)$ :

$$\begin{cases} f^a(s) = \sin ks \operatorname{sh} \chi_a L - \sin kL \operatorname{sh} \chi_a s, & \chi_a \neq 0, \\ f^a(s) = \sin 2ks - 2 \sin ks \cos kL, & \chi_a = 0. \end{cases}$$

## Литература

1. Wu T. T., King R. W. P. The cylindrical antenna with nonreflecting resistive loading // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1965. – Vol. AP-13, No. 3. – P. 369-373.
2. Глушковский Э. А., Израйлит А. Б., Левин Б. М., Рабинович Е. Я. Линейные антенны с переменным поверхностным импедансом // В кн.: Антенны. Вып. 2. – М.: Связь. – 1967. – С. 154-165.
3. Shen L.-C. An experimental study of the antenna with nonreflecting resistive loading // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1967. – Vol. AP-15, No. 5. – P. 606-611.
4. Taylor C. D. Cylindrical transmitting antenna: tapered resistivity and multiple impedance loadings // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1968. – Vol. AP-16, No. 2. – P. 176-179.
5. Rao B. L. J., Ferris J. E., Zimmerman W. E. Broadband characteristics of cylindrical antennas with exponentially tapered capacitive loading // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1969. – Vol. AP-17, No. 2. – P. 145-151.

6. Левин Б. М., Яковлев А. Д. Антенна с нагрузками как импедансный вибратор с переменным импедансом // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30, №1. – С. 25-33.
7. Нестеренко М. В. Излучение электромагнитных волн тонкими импедансными вибраторами в однородной изотропной среде с потерями // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т. 8, №2. – С. 207-216.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 505 с.
9. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: ФАН, 1974. – 216 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
11. King R. W. P. The Theory of Linear Antennas. – Cambr.-Mass., Harv. Univ. Press, 1956. – 944 p.
12. Нестеренко М. В. Управление характеристиками вибраторных антенн мобильной связи посредством распределенного импеданса // Вісник Харківського національного університету. Радиофізика та електроніка. – 2002. – № 570. – С. 22-25.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.
14. Cassedy E.S., Fainberg J. Back scattering cross sections of cylindrical wires of finite conductivity // IRE Trans. Antennas Propag. – 1960. – Vol. AP-8, No. 1. – P. 1-7.
15. Dike S. H., King D. D. The absorption gain and back-scattering cross section of the cylindrical antenna // Proc. of the IRE. – 1952. – Vol. 40, No. 7. – P. 853-860.
16. Нестеренко М. В. Поверхностный импеданс вибраторов в тонкопроволочном приближении // Вісник Харківського національного університету. Радиофізика та електроніка. – 2002. – №544. – С. 47-49.

## **Розсіяння електромагнітних хвиль тонкими вібраторами із змінним поверхневим імпедансом**

**М. В. Нестеренко**

Вирішено задачу розсіяння плоскої електромагнітної хвилі тонким вібратором із змінним уздовж його осі комплексним поверхневим імпедансом. Надаються графіки ефективних поперечників розсіяння залежно від електричної довжини вібратора і різних законів зміни імпеданса уздовж нього. Порівняно розрахункові та експериментальні результати для сталого імпедансу уздовж вібратора.

## **Electromagnetic Wave Scattering by Variable Surface Impedance Thin Vibrators**

**M. V. Nesterenko**

The problem of plane electromagnetic wave scattering by a thin vibrator with the variable complex surface impedance along its axis is solved. The effective scattering cross sections are shown graphically vs. vibrator electrical length and different laws of variation of impedance distribution along it. The theoretical and experimental results for constant impedance along the vibrator length are compared.