

---

УДК 519.67

**С. И. Яремчук**, канд. физ.-мат. наук, **Ю. А. Шаповалов**  
Житомирский государственный технологический университет  
(Украина, 10005, Житомир, ул. Черняховского 103,  
тел.: (0412) 418542, E-mail: yuri-ua@yandex.ru)

### **Модификация метода возможных направлений для задачи оптимизации размещения объектов специального вида**

Рассмотрена задача оптимизации размещения объектов в выпуклой области, каждый из которых может быть разбит на взаимно-ориентированные прямоугольники. Разработана модификация метода возможных направлений и метод направленного перехода. Для оценки эффективности методов приведены результаты численных экспериментов.

Розглянуто задачу оптимізації розміщення об'єктів у опуклій області. Кожен з об'єктів можна розкласти на взаємо-орієнтовані прямокутники. Розроблено модифікацію метода можливих напрямків та метод спрямованого переходу. Для оцінки ефективності методів наведено результати чисельних експериментів.

*К л ю ч е в ы е с л о в а*: оптимизация размещения, метод возможных направлений, метод направленного перехода.

Задачи оптимизации размещения возникают в разных сферах деятельности человека. Универсального эффективного метода их решения не существует. Большинство разработанных методов рассчитаны на выпуклые объекты или на линейность функций цели. Даже в случае выполнения этих условий решение практических задач оптимизации размещения требует значительных временных и вычислительных ресурсов. Поэтому проблема разработки новых и усовершенствования существующих методов оптимизации, которые могут быть использованы для решения таких задач на ЭВМ, остается актуальной.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимизации размещения объектов специальной формы. Размещение является допустимым, если все объекты попарно не пересекаются и не выходят за пределы заданной области. Среди всех допустимых размещений необходимо найти такое, при котором заданная функция цели достигает своего минимума. Объекты могут быть невыпуклыми, а функция цели — нелинейной.

Параметры задачи удовлетворяют следующим требованиям.

1. Область размещения — выпуклая, задана системой неравенств вида  $\leq c$  выпуклыми непрерывно-дифференцируемыми функциями.

2. Функция цели — непрерывно-дифференцируемая.

3. Каждый объект можно представить в виде объединения взаимно-ориентированных прямоугольников. Стороны всех прямоугольников параллельны координатным осям.

**Анализ источников исследования.** Задачам оптимизации размещения посвящено множество исследований. Наиболее популярными являются задачи плотного размещения. В работе [1] рассмотрена задача плотного размещения с учетом заданных минимально допустимых расстояний между объектами. Для нахождения точного решения задачи использован метод ветвей и границ.

В работе [2] рассмотрена задача оптимизации размещения прямоугольников в прямоугольной области. Критерий качества описан дифференцируемой функцией. Для решения подзадач разработан метод  $G$ -проекции, основанный на методе проекции градиента Розена.

Данное исследование является продолжением работ [3, 4]. В [3] рассмотрена задача оптимизации размещения прямоугольников на прямоугольной области. Невыпуклое, многосвязное, несвязное множество допустимых решений задачи представлено в виде объединения выпуклых подмножеств. Исходная задача решается путем решения последовательности подзадач на полученных подмножествах. В работе [4] рассмотрена задача оптимизации размещения прямоугольников на выпуклой области, заданной системой нелинейных ограничений. Для ее решения разработана модификация метода возможных направлений и метод направленного перехода между подмножествами.

Цель данного исследования — построение модели задачи оптимизации размещения объектов, каждый из которых можно разбить на ориентированные прямоугольники, и разработка алгоритма решения этой задачи.

**Математическая модель задачи.** Заданы  $m$  объектов  $F_i, i = \overline{1, m}$ , область размещения  $\Omega$  и функция цели  $\chi(Z)$ , значение которой зависит от положения объектов на области размещения. На рис. 1 приведен пример допустимого размещения четырех объектов в результате решения задачи оптимизации.

Каждый из объектов  $F_i, i = \overline{1, m}$ , можно разбить на прямоугольники  $D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{im}$ . Положение объекта  $F_i, i = \overline{1, m}$ , на области  $\Omega$  определяется координатами его полюса [5]. Полюсом объекта  $F_i$  назовем геометрический центр одного из его прямоугольников  $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{im})$ . Для определенности пусть полюсом  $Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i)$  объекта  $F_i$  будет центр первого пря-

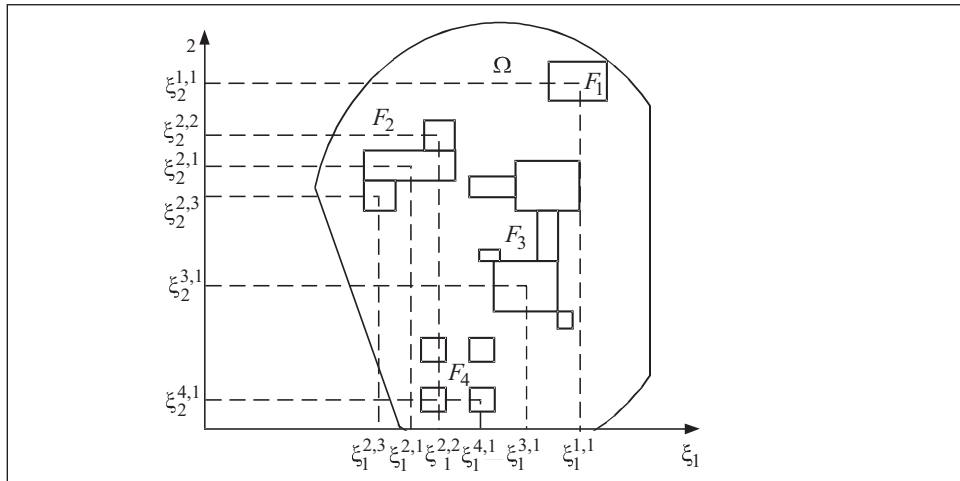


Рис. 1. Пример допустимого размещения четырех объектов

моугольника  $D_{i1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В свою очередь, полюсом прямоугольника  $D_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ , будем считать его геометрический центр. Тогда, для описания объектов  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , достаточно указать размеры  $L^{ij}$  ( $l_1^{ij}, l_2^{ij}$ ) всех прямоугольников  $D_{ij}$ ,  $j = \overline{1, m}$  и положение  $C^{ij}$  ( $c_1^{ij}, c_2^{ij}$ ) этих прямоугольников в подвижной системе координат, центр которой совпадает с полюсом  $Z^i$  ( $\xi_1^i, \xi_2^i$ ) соответствующего объекта  $F_i$ , а оси параллельны сторонам прямоугольников. Таким образом, каждый объект  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , задается параметрами  $L^{ij}$  ( $l_1^{ij}, l_2^{ij}$ ),  $C^{ij}$  ( $c_1^{ij}, c_2^{ij}$ ),  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ . Положение объектов на области  $\Omega$  определяется координатами вектора  $Z$  ( $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$ ) = ( $\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_1^m, \xi_2^m$ ).

Таким образом, имеется задача условной оптимизации

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G, \quad (1)$$

где  $Z$  ( $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$ ) — параметр размещения объектов  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $G$  — множество допустимых решений задачи;  $\chi(Z)$  — функция цели, непрерывно-дифференцируемая на выпуклом множестве  $X \supset G$ .

Множество  $G$  определяется условиями принадлежности объектов области  $\Omega$  и условиями взаимного непересечения объектов.

Для того чтобы объект  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , принадлежал выпуклой области размещения, достаточно наложить ограничения на координаты только тех вершин объекта, которые являются угловыми точками выпуклой оболочки вершин его прямоугольников  $D_{ij}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ . Вид и число ограничений зависят от формы области  $\Omega$ , числа и формы объектов  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В общем виде эти ограничения запишем так:

$$\varphi_p(Z) \leq 0, p = \overline{1, v}, \quad (2)$$

где  $\varphi_p(Z)$  — функции, непрерывно-дифференцируемые, выпуклые на выпуклом множестве  $X \supset G$ .

Для того чтобы объекты  $F_i, F_k, i = \overline{1, m-1}, k = \overline{i+1, m}$  не пересекались, необходимо обеспечить непересечение всех пар прямоугольников  $D_{ij}, D_{kl}, j = \overline{1, m_i}, l = \overline{1, m_k}$ . Условия непересечения имеют вид

$$\begin{aligned} \left| \xi_1^i + c_1^{ij} - (\xi_1^k + c_1^{kl}) \right| \geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \left| \xi_2^i + c_2^{ij} - (\xi_2^k + c_2^{kl}) \right| \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2}, \\ i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, m_i}, k = \overline{i+1, m}, l = \overline{1, m_k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, множество  $G$  описываемое ограничениями (2), (3), — невыпуклое, многосвязное, может быть несвязным с большим числом компонент связности.

Представим множество допустимых решений задачи (1) в виде объединения выпуклых подмножеств  $G_s$ :

$$G = \bigcup_{s=1}^r G_s, \quad (4)$$

где  $r = 4^C$  [6]. Тогда решение исходной задачи можно заменить решением последовательности подзадач оптимизации. Каждая подзадача — это задача оптимизации функции цели исходной задачи (1) на выпуклых подмножествах  $G_s, s = \overline{1, r}$ , имеющая вид

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G_s, s = \overline{1, r}. \quad (5)$$

В качестве решения исходной задачи (1) принимается лучшее из решений подзадач (5).

Декомпозиция (4) осуществляется следующим образом. Ограничение непересечения пары прямоугольников  $D_{ij}, D_{kl}, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, m_i}, k = \overline{i+1, m}, l = \overline{1, m_k}$ , при условиях (3) можно записать в виде структуры линейных неравенств

$$\begin{cases} \left| (\xi_1^i + c_1^{ij}) - (\xi_1^k + c_1^{kl}) \right| \geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \left| (\xi_2^i + c_2^{ij}) - (\xi_2^k + c_2^{kl}) \right| \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2}, \\ \left| (\xi_1^k + c_1^{kl}) - (\xi_1^i + c_1^{ij}) \right| \geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee \left| (\xi_2^k + c_2^{kl}) - (\xi_2^i + c_2^{ij}) \right| \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2}, \end{cases} \quad (6)$$

т.е. для непересечения объектов  $F_i, F_k, i = \overline{1, m-1}, k = \overline{i+1, m}$  достаточно, чтобы для каждой пары прямоугольников  $D_{ij}, D_{kl}$ , принадлежащих разным объектам  $F_i, F_k$ , выполнялось хотя бы одно из неравенств (6).

Таким образом, система ограничений, задающая выпуклые подмножества  $G_s, s = \overline{1, r}$ , состоит из линейных неравенств, обеспечивающих не-

пересечение объектов (по одному для каждой пары прямоугольников, принадлежащих разным объектам), и ограничений (2), которые обеспечивают невыход объектов за границы области  $\Omega$ .

Ограничения, задающие  $G_s$ , запишем в виде  $\phi_i(Z) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ , где  $q$  — общее число ограничений, зависящее от формы и числа объектов  $F_i$ , а также от формы области  $\Omega$ .

Для решения подзадач (5) применяется метод возможных направлений [7, 8]. В этом методе вектор спуска  $h$  в точке  $Z^k$  имеет следующие свойства:

- 1)  $h$  является направлением уменьшения функции цели;
- 2) угол между  $h$  и градиентами  $\varepsilon$ -активных ограничений — тупой.

Ограничение называется  $\varepsilon$ -активным в точке  $Z^k$ , если для него справедливо неравенство

$$-\varepsilon_k < \phi_i(Z^k) \leq 0, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_k > 0$  — параметр метода. Первое свойство обеспечивается при выполнении условия

$$(\Delta\chi(Z^k), h) \leq y, \quad y < -\varepsilon_k.$$

Для обеспечения второго свойства на направление спуска наложено ограничение

$$(\nabla\phi_i(Z^k), h) \leq y, \quad y < -\varepsilon_k, \quad i \in I(Z^k, \varepsilon_k), \quad (8)$$

где  $I(Z^k, \varepsilon_k)$  — множество номеров  $\varepsilon$ -активных ограничений.

Условие (8) применяется в случае, если в  $\varepsilon$ -активном ограничении (7) функция  $\phi_i(Z)$  — нелинейная. Для линейных  $\varepsilon$ -активных ограничений это требование является лишним. Если решение задачи находится на границе множества  $G_s$ ,  $s = \overline{1, r}$ , наложение условия (8) приводит к значительному уменьшению скорости сходимости метода, т. е. к увеличению времени решения задачи. Поэтому для линейных ограничений условие (8) предлагается ослабить, записав его в следующем виде:

$$(\nabla\phi_i(Z^k), h) \leq 0, \quad i \in I(Z^k, \varepsilon_k). \quad (9)$$

Очевидно, вдоль  $\varepsilon$ -активного линейного ограничения, в направлении  $h$ , удовлетворяющем (9), можно сделать сколь угодно большой шаг, без его нарушения.

Число подмножеств  $G_s$  при увеличении числа объектов возрастает очень быстро [5]. Так, для задачи оптимизации размещения шести объектов на решение всех подзадач (5) требуются огромные временные затраты. Поэтому для решения задачи (1) разработан метод направленного перехода между выпуклыми подмножествами.

Идея метода состоит в следующем. Подмножества  $G_s, s = \overline{1, r}$ , отличаются между собой только тем, какое из четырех возможных линейных неравенств (6) для каждой пары прямоугольников  $D_{ij}, D_{kl}, j = \overline{1, m_i}, l = \overline{1, m_k}, i = \overline{1, m-1}, k = \overline{i+1, m}$ , входит в систему ограничений. Предлагается на каждой итерации метода возможных направлений после перехода в точку  $Z^k$  в случае наличия  $\varepsilon$ -активного ограничения  $\phi_i(Z^k) \leq 0$  непересечения пары прямоугольников  $D_{ij}, D_{kl}$  проверять выполнение одного из двух условий непересечения этих прямоугольников по другой координате. Если существует соответствующее ограничение  $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$  непересечения  $D_{ij}, D_{kl}$ , для которого выполняется условие  $\phi_i^*(Z^k) \leq -\varepsilon_k$ , то в системе ограничений задачи, выполняется замена  $\varepsilon$ -активного ограничения  $\phi_i(Z) \leq 0$  на  $\varepsilon$ -активным  $\phi_i^*(Z) \leq 0$ . Таким образом расширяется множество возможных направлений  $h$  в точке  $Z^k$ , осуществляется переход к следующему подмножеству  $G_s$  и сокращается время, затрачиваемое на решение исходной задачи.

**Алгоритм решения задачи оптимизации размещения объектов, которые можно разложить на прямоугольники.**

1.  $k=0$ . Выбирается начальное размещение  $Z^0 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_1^m, \xi_2^m) \in G_s \subset G, s = \overline{1, r}$ , параметры метода  $\varepsilon > 0, \varepsilon_0 \geq \varepsilon, 0 < \gamma < 1$ .

2. Имеется  $k$ -е приближение решения задачи  $Z^k, \varepsilon_k > 0, k = 0, 1, \dots$

2.1. Проверяются ограничения, задающие условия взаимного непересечения объектов. Если для ограничения  $\phi_i(Z^k) \leq 0$ , обеспечивающего непересечение прямоугольников  $D_{jl}, D_{ks}, j \neq k$ , выполняется условие  $-\varepsilon_k < \phi_i(Z^k) \leq 0$ , т. е. ограничение  $\phi_i(Z^k) \leq 0$  является  $\varepsilon$ -активным, то выполняется проверка: если для этой пары объектов  $D_{jl}, D_{ks}$  выполняется ограничение их непересечения по другой координате  $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$ , причем  $\phi_i^*(Z^k) \leq -\varepsilon_k$  (т. е. ограничение  $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$  в точке  $Z^k$  не является  $\varepsilon$ -активным), то в системе ограничений подзадачи осуществляется замена  $\phi_i(Z^k) \leq 0$  на  $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$ .

2.2. Строится множество номеров  $\varepsilon$ -активных ограничений задачи

$$I(Z^k, \varepsilon_k) = \{i \in \overline{1, q} : -\varepsilon_k < \phi_i(Z^k) \leq 0\}.$$

2.3. Находится вектор спуска в точке  $Z^k$ . Для этого решается вспомогательная задача линейного программирования

$$\bar{\chi}(h_1, h_2, \dots, h_{2m}, y) = y \rightarrow \min$$

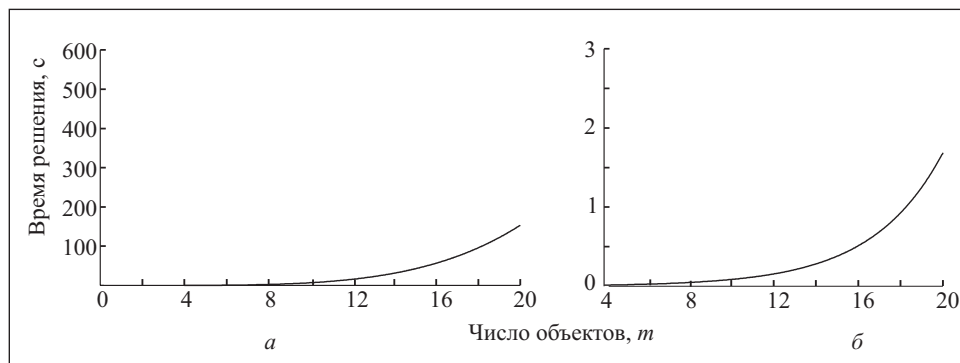


Рис. 2. Графики зависимости времени решения подзадач методом возможных направлений (а) и модифицированным методом (б) от числа объектов

$$\left. \begin{aligned} (\nabla\chi(Z^k), h) &\leq y, \\ (\nabla\phi_i(Z^k), h) &\leq y, \quad \forall i \in I(Z^k, \varepsilon_k), \quad \text{если } \phi_i(Z) \text{ — нелинейная,} \\ (\nabla\phi_i(Z^k), h) &\leq 0, \quad \forall i \in I(Z^k, \varepsilon_k), \quad \text{если } \phi_i(Z) \text{ — линейная,} \\ |h_i| &\leq 1, \quad i = \overline{1, 2m} \end{aligned} \right\}$$

$(h^k(h_1^k, h_2^k, \dots, h_{2m}^k), y_k)$  — решение вспомогательной задачи.

Если  $y_k \geq -\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ , то процесс прекращается,  $Z^k$  является решением задачи.

Если  $y_k \geq -\varepsilon_k$  и  $\varepsilon_k > \varepsilon$ , то  $Z^{k+1} = Z^k$ ,  $\varepsilon_{k+1} = \gamma\varepsilon_k$ ,  $k$  присваивается  $k+1$  и осуществляется переход к п. 2.

Если  $y_k < -\varepsilon_k$ , то  $h^k$  — вектор спуска.

2.4. Поиск  $k+1$ -го приближения,  $Z^{k+1} = Z^k + \beta_k h^k$ , где  $\beta_k = \arg \min_{0 < \beta \leq B_k} \chi(Z^k + \beta h^k)$ ;  $B_k$  — максимально допустимое  $\beta$ , при котором выполняются все

неравенства  $\phi_i(Z^k + \beta h^k) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ , системы ограничений подзадачи. Переменной  $k$  присваивается значение  $k+1$  и осуществляется переход к п. 2.

Разработанный алгоритм программно реализован. Начальное приближение  $Z^0$  находится методом штрафных функций. Шаг  $\beta_k$  вычисляется методом простейшего перебора одномерной оптимизации [8].

Для оценки эффективности модификации (9) решения подзадач (5) проведен численный эксперимент. Поскольку модификация (9) влияет на решение задачи только в случае наличия  $\varepsilon$ -активных линейных ограничений, была выбрана тестовая задача минимизации суммы квадратов рас-

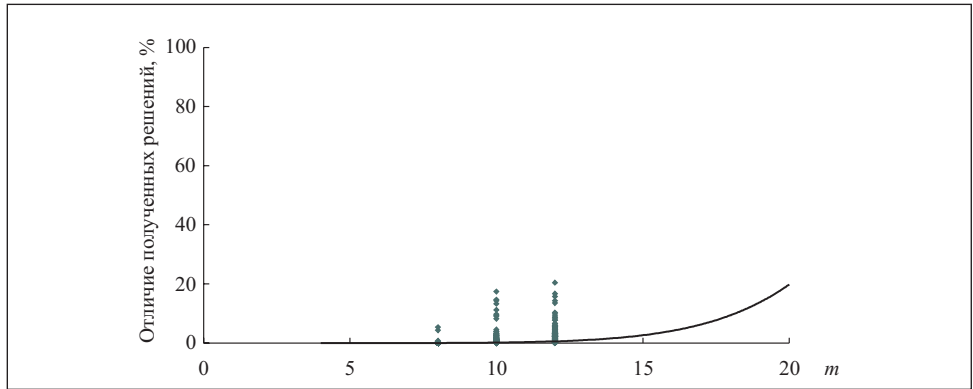


Рис. 3. Оценка точности методов

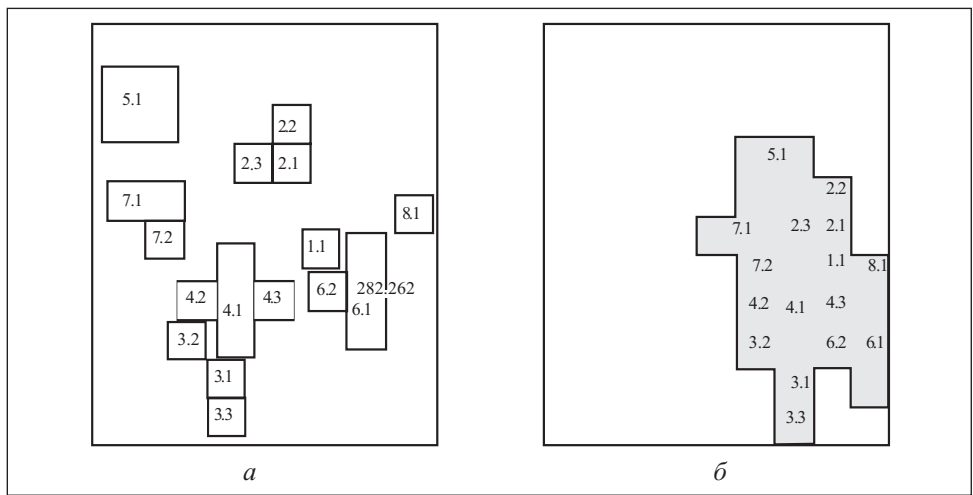


Рис. 4. Пример решения тестовой задачи: а — начальное приближение, б — полученное размещение

стояний от полюсов объектов до заданной внутренней точки области  $\Omega$ , имеющей форму прямоугольника. На рис. 2 приведены полученные зависимости времени решения подзадач от числа прямоугольников.

Для оценки точности полученных решений построена зависимость (рис. 3) погрешности метода Зойтендейка от решений, полученных с использованием модификации (9). Оценка точности методов проводилась по значению функции цели, соответствующему конечному размещению, по формуле

$$\Delta = \frac{\chi(Z') - \chi(Z^*)}{\chi(Z^*)} 100 \%,$$



где  $\chi(Z')$  и  $\chi(Z^*)$  — значения функции цели, соответствующие размещению, полученному методом Зойтендейка, и модифицированным методом.

На рис. 4 приведен пример решения тестовой задачи

$$\chi(Z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m ((x_1 - (\xi_1^i + c_1^{ij}))^2 + (x_2 - (\xi_2^i + c_2^{ij}))^2) \rightarrow \min, Z \in G,$$

где  $x(x_1, x_2) \in \Omega$  — заданная точка. Число объектов — 8. Объекты разбиты на прямоугольники. Общее число прямоугольников — 16. Функция цели при начальном размещении  $\chi(Z^0) = 282,262$ , при конечном размещении  $\chi(Z^{60}) = 67,234$ . Решение задачи на машине с процессором AMD Athlon XP 2400+ получено за 0,2 с. Число итераций — 60, переходов между подмножествами — 14.

Для улучшения полученного размещения целесообразно решить задачу несколько раз, используя различные начальные приближения, и выбрать лучшее из полученных решений.

**Выводы.** В результате данного исследования

осуществлена декомпозиция невыпуклого многосвязного множества допустимых решений задачи на выпуклые подмножества, что позволило применить для решения задачи метод возможных направлений;

разработана модификация метода возможных направлений и метод направленного перехода между подмножествами;

построены кривые, характеризующие временную сложность и относительную точность разработанного алгоритма.

По результатам вычислительного эксперимента можно сделать следующий вывод: по сравнению с методом Зойтендейка модифицированный метод при одинаковых параметрах позволяет решать подзадачи на выпуклых подмножествах за меньшее время и получать при этом лучшие размещения.

A problem of the object arrangement optimization in convex domain is considered. Here each of them may be divided in mutually oriented rectangles. A modification of the possible directions method and the method of directed transition are developed. The results of numerical experiments are presented for estimation of the method efficiency.

1. Яськов Г. М. Математична модель та методи розв'язання задачі розміщення прямокутників з урахуванням припустимих відстаней: Дис...канд. техн. наук. — Ін-т пробл. машинобуд. ім. А.М. Підгорного НАН України. — Харків, 2000. — 128 с.
2. Яремчук С. І., Рудюк Л. В. Алгоритми розв'язання задачі розміщення прямокутників в прямокутній області // Вісник Київського ун-ту ім. Тараса Шевченка. — 2005. — № 2 — С. 339 — 343.
3. Яремчук С. І., Жовновський Д. О., Снівак А. В. Модифікація методу умовного градієнту для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ. Технічні науки. — 1999. — № 9. — С. 248—253.

4. Яремчук С. І., Шаповалов Ю. О. Модифікація методу можливих напрямків для задачі оптимізації розміщення // Вісник Хмельницького національного університету. — 2005. — № 5, Ч.1, Т.2. — С.146—151.
5. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев : Наук. думка, 1976. — 248 с.
6. Власенко О. В., Снівак А. В., Яремчук С. І. Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ. Технічні науки. — 1998. — № 7. — С. 248—253.
7. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М. : Наука, 1980. — 518 с.
8. Яремчук С. І. Введення в математичні методи дослідження операцій: Уч. посіб. — Житомир : ЖІТІ, 2002. — 300 с.

Поступила 05.06.06;  
после доработки 17.01.07

*ЯРЕМЧУК Светлана Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники Житомирского государственного технологического университета, который окончила в 1970 г. Область научных исследований — экстремальные задачи, математическое моделирование.*

*ШАПОВАЛОВ Юрий Александрович, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники Житомирского государственного технологического университета, который окончил в 2002 г. Область научных исследований — методы оптимизации, компьютерное моделирование.*