



УДК 621.7

**И. В. Волков**, чл.-кор. НАН Украины,  
**С. В. Подольный**, аспирант  
Ин-т электродинамики НАН Украины  
(Украина, 03057, Киев, пр-т Победы, 56,  
тел.: (044) 4562051, E-mail: volk@elan-ua.net)

### **Модель трехфазной системы с взаимдуктивными связями на основе уравнений состояния**

Рассмотрена процедура моделирования схем, представленных в виде шестиполюсника с взаимдуктивными связями, на основе уравнений состояния в пакете MatLab. Показаны ее преимущества по сравнению с компонентными моделями подобных схем.

Розглянуто процедуру моделювання схем, зображених у вигляді шестиполюсника із взаємдуктивними зв'язками, на основі рівнянь стану у пакеті MatLab. Наведено її переваги у порівнянні з компонентними моделями.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* уравнения состояния, взаимдуктивные связи, трехфазный фильтр, шестиполюсник.

Известно, что один из наиболее удобных способов моделирования линейной системы — представление ее в уравнениях состояния [1]. Главное достоинство метода заключается в удобстве моделирования систем численными методами, в частности в пакете MatLab с помощью стандартных блоков SimPowerSystems. Однако применение такой системы для описания схем с достаточно большим числом взаимдуктивных связей с помощью SimPowerSystems затруднено (или невозможно), так как в пакете MatLab нельзя с помощью стандартных блоков SimPowerSystems моделировать число взаимдуктивных связей  $n > 3$ . Кроме того, представленные в пакете модели основаны на приближенных схемах замещения, более пригодных для предварительного расчета вручную.

На рис. 1 приведена схема предлагаемой процедуры формирования модели трехфазной системы с большим числом взаимдуктивных связей ( $n = 36$ ), пригодной для использования в MatLab. Следует заметить, что рассматриваемая схема с тремя группами трех взаимосвязанных катушек индуктивностей и конденсаторами (при соответствующем выборе соотношений между параметрами) широко используется в качестве фильтра

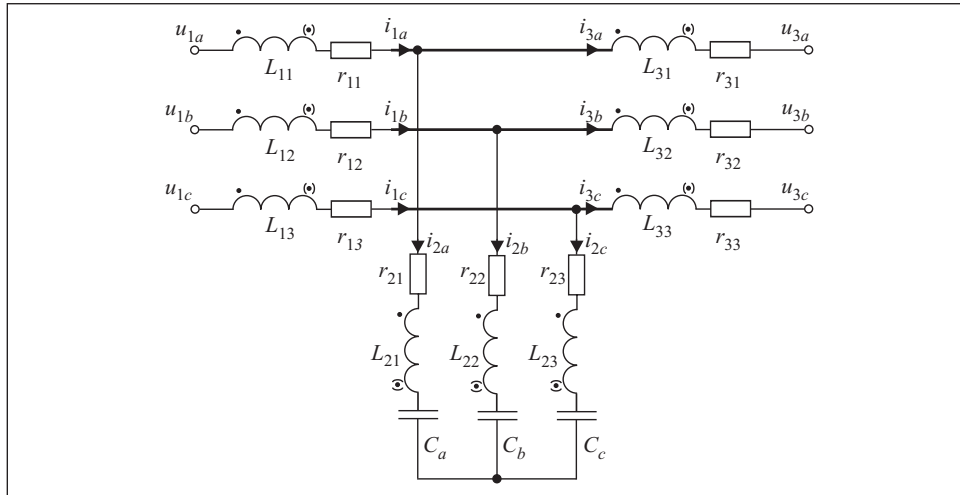


Рис. 1

низких частот (ФНЧ), фильтра симметричных составляющих, линейатора [2], параметрического стабилизатора тока [3] и в других случаях.

Запишем уравнения состояния системы в общем виде [4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов системы;  $B$ ,  $C$  и  $D$  — матрицы соответственно входа, выхода и обхода;  $x$  — вектор переменных состояния;  $u$  и  $y$  — векторы входных и выходных переменных.

Для выбора вектора переменных состояния воспользуемся методикой, приведенной в [4]. В соответствии с методикой схема, содержащая 12 элементов накапливающих энергию, должна быть описана системой, содержащей 12 неизвестных. Однако, принимая во внимание линейную зависимость тока  $i_{2,i}$  от токов  $i_{1,i}$ ,  $i_{3,i}$  ( $i = a, b, c$ ), вытекающее из 1-го закона Кирхгофа и предположения о линейности системы, достаточно ограничиться вектором из девяти переменных состояния:  $x = [i_{1a}, i_{3a}, i_{1b}, i_{3b}, i_{1c}, i_{3c}, i_{ca}, i_{cb}, i_{cc}]^T$ .

Вектор входных переменных  $u$  образуем из трех фазных напряжений питания шестиполюсника с тремя входными и тремя выходными полюсами:  $u = [u_{1a}, u_{1b}, u_{1c}]^T$ , а вектор выходных переменных  $y$  — из трех линейных токов выхода этого шестиполюсника:  $y = [i_{3a}, i_{3b}, i_{3c}]^T$ . Выходные напряжения  $u_{3a}$ ,  $u_{3b}$ ,  $u_{3c}$  следует рассчитывать динамически с учетом присоединенной правой части схемы.



Запишем уравнения, связывающие входные и выходные переменные рассматриваемого шестиполюсника:

$$\begin{aligned} u_{1a} - u_{L11} - u_{L12} - u_{ca} &= 0, & u_{3a} + u_{L31} - u_{L21} - u_{ca} &= 0, \\ u_{1b} - u_{L12} - u_{L22} - u_{cb} &= 0, & u_{3b} + u_{L32} - u_{L22} - u_{cb} &= 0, \\ u_{1c} - u_{L13} - u_{L23} - u_{cc} &= 0, & u_{3c} + u_{L33} - u_{L23} - u_{cc} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая (4) с учетом (2), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^6 M_{1i} \frac{di_{ja}}{dt} &= \sum_{k,j=1}^6 r_{k1} i_{ja} + \sum_{q=1}^3 \xi_{q1} u_q + \sum_{ql=1}^3 \chi_{ql} u_{ql}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i,j=1}^6 M_{6i} \frac{di_{ja}}{dt} &= \sum_{k,j=1}^6 r_{k2} i_{ja} + \sum_{q=1}^3 \xi_{q6} u_q + \sum_{ql=1}^3 \chi_{q6} u_{ql}, \\ C_a \frac{du_{ca}}{dt} &= i_{1a} - i_{3a}, \\ C_b \frac{du_{cb}}{dt} &= i_{1b} - i_{3b}, \\ C_c \frac{du_{cc}}{dt} &= i_{1c} - i_{3c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $M_{ij}$  — матрицы, содержащие суммы собственных и взаимных индуктивностей;  $r_{ij}$  — матрицы сопротивлений (в случае наличия только реактивных элементов они нулевые в первых шести уравнениях);  $\xi_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — матрицы коэффициентов соответственно при переменных  $u_{ca}$ ,  $u_{cb}$ ,  $u_{cc}$  и входного вектора.

Учитывая условие взаимности  $M_{(i,i)} = M_{(i,i)}$ , рассчитываем матрицы:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -L_{11} \mp 2M_{(11,21)} - L_{21}, & M_{12} &= \pm M_{(11,21)} \mp M_{(11,31)} + L_{21} \mp M_{(21,31)}, \\ M_{13} &= -M_{(11,12)} \mp M_{(11,22)} - M_{(21,22)} \mp M_{(21,12)}, \\ M_{14} &= \pm M_{(11,22)} \mp M_{(11,32)} + M_{(21,22)} \mp M_{(21,32)}, \\ &\dots\dots\dots \\ M_{65} &= -M_{(33,13)} \mp M_{(33,23)} + L_{23} \pm M_{(23,13)}, & M_{66} &= -L_{33} \pm 2M_{(33,23)} - L_{23}. \end{aligned}$$

Для приведения системы (5) к виду (1) находим линейный оператор  $\Lambda$ , удовлетворяющий условию  $\Lambda M = \text{diag}(E)$ , где  $\text{diag}(E)$  — единичная диагональная матрица,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & 0 & 0 & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & 0 & 0 & 0 \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & 0 & 0 & 0 \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_c \end{pmatrix},$$

а затем определяем коэффициенты матриц  $A$  и  $B$ :  $A = (\Lambda r \ \Lambda \xi)$ ,  $B = \Lambda \chi$ ,

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{21} & -r_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{12} + r_{22} & -r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{13} + r_{23} & -r_{23} \\ r_{21} & -r_{31} - r_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} & -r_{32} - r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{23} & -r_{33} - r_{23} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

завершая, тем самым формирование модели.

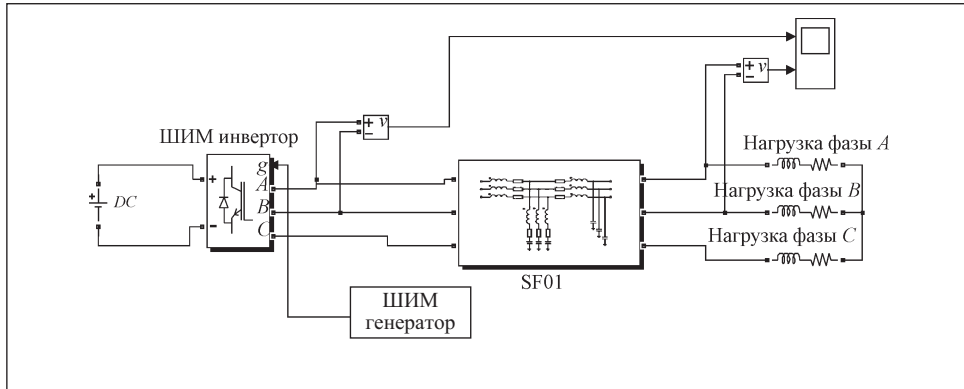


Рис. 2

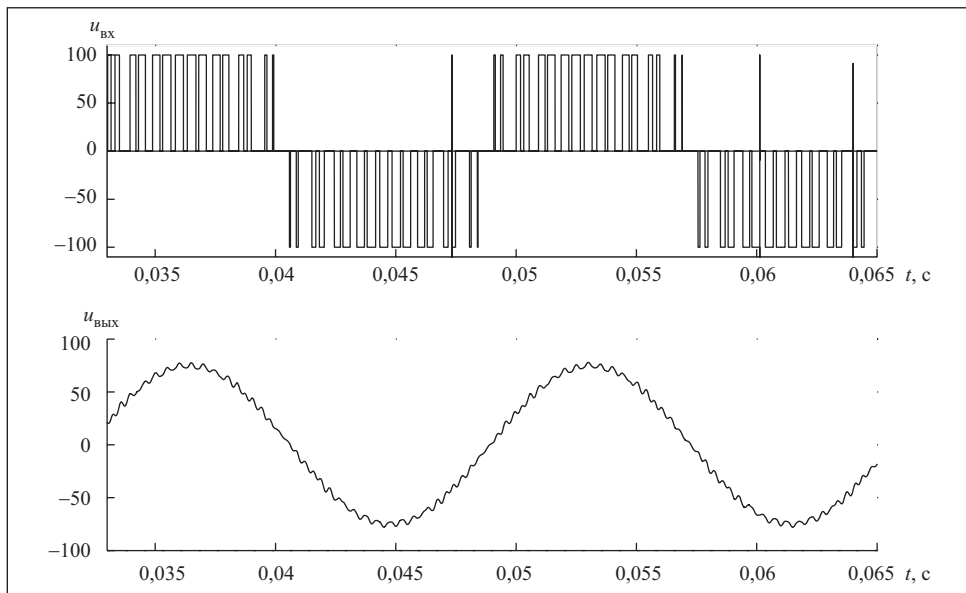


Рис. 3

Следует заметить, что на основе полученных матриц уравнений состояния можно моделировать подобные схемы с помощью широкого круга математических и специализированных программ.

**Тестовая модель.** На основе представленного алгоритма была смоделирована в пакете MatLab схема ФНЧ SF01.5-600-2/6. Фильтр разработан авторами как выходной каскад привода с частотно-регулируемым асинхронным двигателем, который питается от инвертора с широтно-импульсной модуляцией.

На рис. 2 этот каскад, выполненный по схеме, приведенной рис.1 и дополненный схемой замещения «длинного» выходного кабеля, обозначен шестиполосником SF01. На рис. 3 показаны временные диаграммы входного модулированного  $U_{вх}$  и фильтрованного выходного  $U_{вых}$  напряжений, полученные в результате моделирования описанным выше методом, которые хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов. При нулевых значениях коэффициентов связи индуктивностей фильтра выходное напряжение модели в уравнениях состояния полностью соответствует выходному напряжению компонентной модели, которую в этом случае (т. е. без многочисленных взаимных связей) реализовать в пакете MatLab не представляет труда. Это может стать косвенной проверкой правильности составленной модели на основе уравнений состояния.

**Выводы.** 1. Математическая модель системы в виде уравнений состояния при наличии многочисленных взаимных связей является более рациональной по сравнению с покомпонентной моделью. Преимущества предлагаемой модели заключаются в следующем:

упрощение требований к параметрам метода численного интегрирования (размер шага, допустимая абсолютная и относительная ошибка и др.);

независимость от симметричности элементов схемы в соответствующих фазах (в случае компонентного моделирования число элементов модели существенно увеличивается при несимметрии схемы);

уменьшение размерности математической модели (в компонентной модели размерность составляет десятки уравнений, что замедляет моделирование).

2. Модель позволяет упростить операции последующего анализа исследуемой системы. Например, чтобы проверить систему на устойчивость, достаточно найти собственные значения матрицы  $A$  [5].

3. Модель позволяет в простой форме реализовать принцип защиты информации. Известно, что конкретная топология и параметры моделируемой схемы (устройства) могут составлять «know-how» разработчика. Вместе с тем, заказчик (пользователь) вправе требовать конкретных сведений о схеме для полного моделирования своей системы, куда данная схема входит лишь составной частью. Передача заказчику этих сведений в виде модели (1) с численными значениями элементов всех матриц (но без связи их с параметрами компонентов схемы) разрешает это противоречие, сохраняя «know-how» защищенным.

A procedure of modelling the circuit in the form of six-pole with mutual inductances is considered on the basis of the state equations in MatLab program. The advantages are shown as compared to component models of similar circuits.

1. Дэбни Д. Б., Харман Т. Л. Simulink 4. Секреты мастерства. — М. : 2003. — 403 с.
2. *Universal Harmonic Mitigating System*. — USA Patent #6127743, Oct.3, 2000. (Authors: M. Levin, A. Hoevenaars, I. Volkov, V. Kuznetsov).
3. Милах А. Н., Волков И. В. Системы неизменного тока на основе индуктивно-емкостных преобразователей. — Киев : Наук. думка, 1974. — 216 с.
4. Дезоер Ч. А., Ку А. С. Основы теории цепей. — М. : Связь, 1976. — 288 с.
5. *Теоретические основы электротехники*. Т. 1, изд. 4-е/К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. — СПб. : Питер, 2006. — 464 с.

Поступила 10.08.06

*ВОЛКОВ Игорь Владимирович, чл.-кор. НАН Украины, зав. отделом систем стабилизированного тока Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1958 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теоретическая электротехника, электротехнологии, преобразование и эффективное использование электромагнитной энергии.*

*ПОДОЛЬНЫЙ Сергей Викторович, аспирант Ин-та электродинамики НАН Украины. В 2005 г. окончил Черниговский государственный технологический университет. Область научных исследований — теоретическая электротехника, преобразование и эффективное использование электромагнитной энергии.*