



УДК 621.365.6:621.791.753

В. Ф. Евдокимов *, чл.-кор. НАН Украины, **А. В. Жильцов** *, канд. техн. наук,
С. Ю. Максимов **, д-р техн. наук, **Е. И. Петрушенко** *, канд. техн. наук,
Е. А. Прилипко **, **Е. А. Рыбалкин** *, аспирант

* Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Киев, 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова 15,
тел.: 424-91-60, E-mail: svetlana@ipme.kiev.ua)

** Ин-т электросварки им. Е.О.Патона НАН Украины
(Киев, 03680, Киев-150, ул. Боженко, 11,
тел.: 268-04-86, E-mail: paton@paton.kiev.ua)

Трехмерная интегральная модель распределения сварочного тока при дуговой сварке зазора в пластине

Предложена трехмерная интегральная модель распределения сварочного тока при дуговой сварке зазора в пластине, позволяющая учитывать реальные электрофизические характеристики материалов, образующих существенно неоднородную среду — расчетную область.

Запропоновано тривимірну інтегральну модель розподілу зварювального струму при дуговому зваренні проміжку в пластині, яка дозволяє враховувати реальні електрофізичні характеристики матеріалів, що утворюють істотно неоднорідне середовище — розрахункову область.

К л ю ч е в ы е с л о в а: дуговая сварка, распределение сварочного тока, интегральная модель, поток расплава, внешнее импульсное электромагнитное воздействие, заряды.

Управление перемещениями потоков расплава ванны при дуговой сварке с внешним импульсным электромагнитным воздействием (ВИЭМВ) позволяет значительно улучшить механические свойства швов, повысить их устойчивость против коррозии и образования горячих и холодных трещин, снизить уровень пористости [1—3]. При проектировании устройств дуговой сварки с ВИЭМВ важную роль играет компьютерное моделирование распределения электродинамических усилий (ЭДУ) и перемещений в расплаве ванны. Будем рассматривать одну из подмоделей компьютерной модели ЭДУ в потоках расплава ванны — трехмерную интегральную модель распределения сварочного тока при дуговой сварке зазора в пластине.

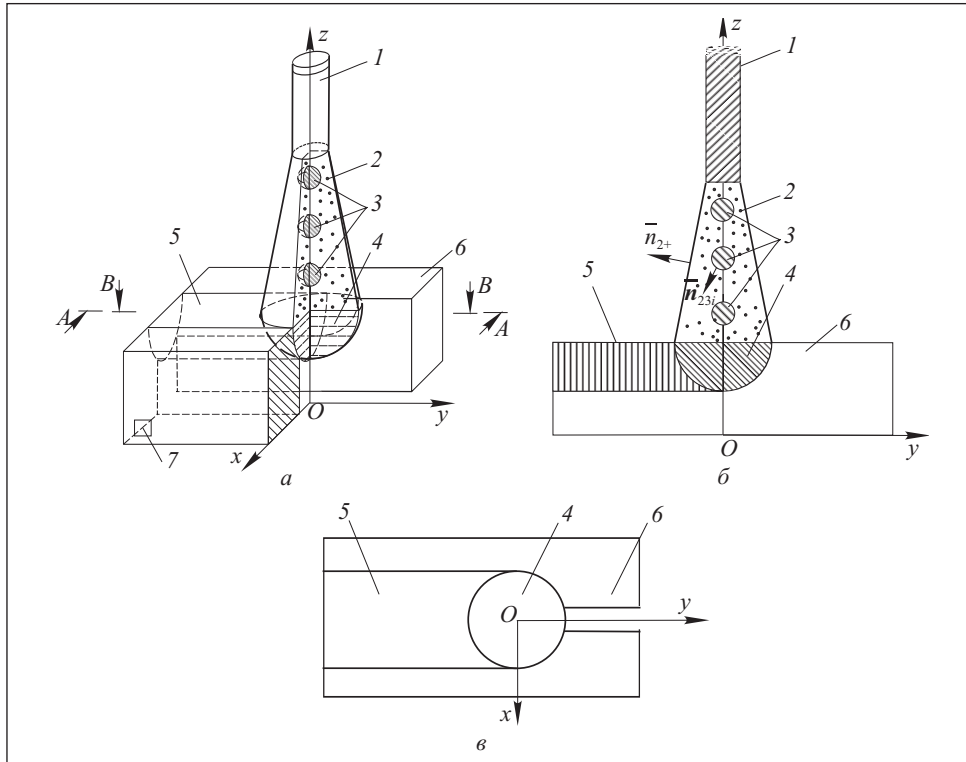


Рис. 1. Схема дуговой сварки: а — общий вид; б — разрез по сечению AA; в — разрез по сечению BB; 1 — электрод; 2 — дуга; 3 — капли расплавленной части электрода; 4 — ванна с расплавом; 5 — сварной шов; 6 — свариваемые детали; 7 — контакт

Сварочный ток протекает по проводнику, образованному контактом следующих тел: электродов, дуги и пластины. Дуга представляет собой проводник конусообразной формы, в ее объеме имеются капли расплава электрода. Свариваемая деталь представляет собой проводник сложной формы с различной проводимостью некоторых объемов. Например, металл сварного шва представляет собой сплав конструкционной стали и порошковой проволоки. Таким образом, сварочный ток распределен в пространстве трехмерно. Для моделирования распределения сварочного тока предлагается трехмерная интегральная модель, с помощью которой моделирование осуществляется в два этапа: на первом — решается система интегральных уравнений относительно зарядов, определяющих распределение сварочного тока на поверхностях электродов и на контактных поверхностях областей с разной проводимостью, на втором — по полученному распределению зарядов находится плотность тока в любой точке

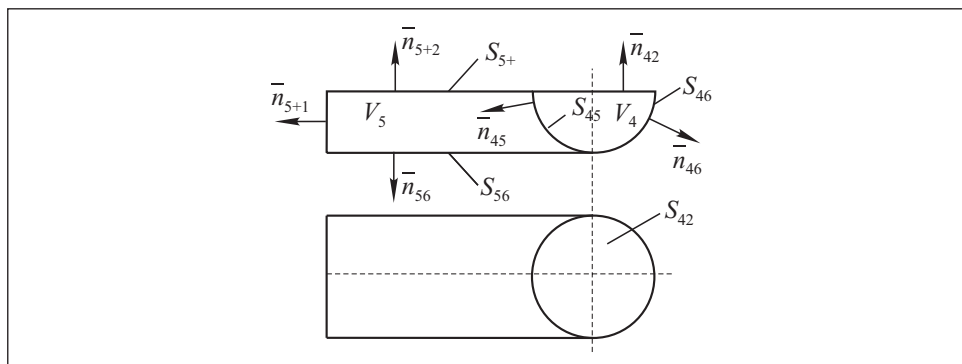


Рис. 2. Схема ванны с расплавом полусферической формы и со сварным швом полуцилиндрической формы

проводника, по которому протекает сварочный ток, либо в любой локальной области, в частности в потоках расплава ванны. Возможность моделирования распределения тока в локальной области — важное преимущество предлагаемой модели по сравнению с конечно-разностными и конечно-элементными моделями. С помощью последних, как известно, распределение тока вычисляется во всем объеме проводника, в то время как необходимости в столь полной информации в большинстве случаев нет.

Постановка задачи. Будем сваривать зазор в пластине в форме прямоугольного параллелепипеда. Зазор проходит через центр симметрии пластины параллельно одной из ее сторон. Введем декартову систему координат xuz таким образом, чтобы ось x была перпендикулярна, а плоскость uoz — была параллельна сторонам зазора (рис. 1). Будем считать заданными проводимость и форму плазмы, размеры и число капель, проводимость материала капель, расстояния между ними. Капли имеют сферическую форму. Ванна — форму полусферы, а сварной шов форму полуцилиндра (рис. 2).

Введем обозначения:

V_1, V_2, V_3 — объемы соответственно электрода, дуги и всех капель, число которых N ;

V_{3i} — объем i -й капли, $V_3 = \sum_{i=1}^N V_{3i}$;

V_4, V_5, V_6 — объемы соответственно расплавленного металла в ванне, сварного шва и свариваемой детали (V_4 и V_5 в объем V_6 не входят);

S_{12} — граница дуги и электрода;

S_{2+} — боковая поверхность дуги, граничащая с воздухом;

- S_{23i} — граница дуги и металла i -й капли;
 S_{42} — граница расплава ванны и дуги;
 S_{45} — граница расплава ванны и сварного шва;
 S_{56} — граница сварного шва и детали;
 S_{5+} — граница сварного шва и внешнего пространства;
 S_{46} — граница расплава ванны и детали;
 S_{6+} — поверхность детали, граничащая с окружающим пространством;
 S_{76} — контакт второго электрода со свариваемой деталью;
 \bar{n}_{2+} — нормаль к поверхности дуги S_{2+} , положительное направление которой принято из объема дуги в окружающее пространство;
 \bar{n}_{23i} — нормаль к поверхности S_{23i} , положительное направление которой принято из объема дуги в объем, занимаемый i -й расплавленной каплей электрода;
 \bar{n}_{42} — нормаль к границе расплава металла в ванне и дуги, положительное направление которой принято из объема расплава металла в объем дуги;
 \bar{n}_{45} — нормаль к границе расплава металла в ванне и сварного шва, положительное направление которой принято из объема расплава металла в ванне в объем сварного шва;
 \bar{n}_{56} — нормаль к границе сварного шва и пластины, положительное направление которой принято из объема сварного шва в объем пластины;
 \bar{n}_{5+} — нормаль к границе сварного шва и окружающего пространства, положительное направление которой принято из объема сварного шва в окружающее пространство;
 \bar{n}_{6+} — нормаль к границе пластины и окружающего пространства, положительное направление которой принято из объема пластины в окружающее пространство.

На рис. 3 показано направление нормали \bar{n}_{6+} к различным сторонам пластины.

Проводимость металла в каждом из объемов V_i ($1 \leq i \leq 6$) будем считать постоянной и обозначим γ_i ($1 \leq i \leq 6$).

Сформулируем в терминах скалярного электрического потенциала φ краевую задачу для расчета плотности сварочного тока в системе дуговой сварки зазора в пластине.

Уравнения:

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_2 &= 0 \text{ в } V_2; \\
 \Delta \varphi_{23i} &= 0 \text{ в } V_{23i}, i=1..N; \\
 \Delta \varphi_4 &= 0 \text{ в } V_4; \Delta \varphi_5 = 0 \text{ в } V_5; \Delta \varphi_6 = 0 \text{ в } V_6.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

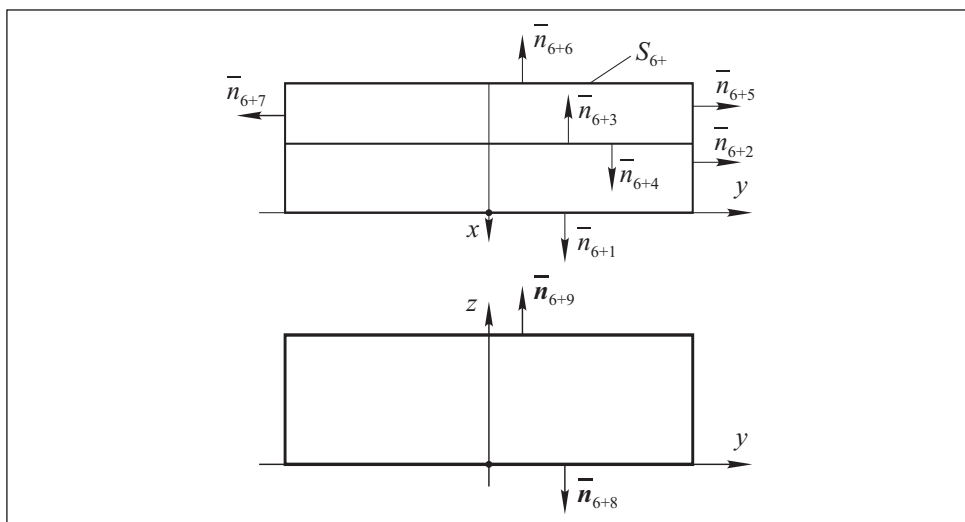


Рис. 3. Схема для вывода формулы ядра в случае, когда точка Q пробегает плоскости, образующие поверхность пластины S_{6+}

Граничные условия:

$$\varphi_{12} = u_1 \text{ на } S_{12}; \quad \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{2+}} = 0 \text{ на } S_{2+}; \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_{3i} \\ \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{23i}} &= \gamma_{3i} \frac{\partial \varphi_{3i}}{\partial n_{23i}} \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{23i}, \quad i=1 \dots N; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_2 \\ \gamma_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n_{42}} &= \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{42}} \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{42}; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_5 \\ \gamma_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n_{45}} &= \gamma_5 \frac{\partial \varphi_5}{\partial n_{45}} \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{45}; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_6 \\ \gamma_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n_{46}} &= \gamma_6 \frac{\partial \varphi_6}{\partial n_{56}} \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{46}; \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_5 &= \varphi_6 \\ \gamma_5 \frac{\partial \varphi_5}{\partial n_{56}} &= \gamma_6 \frac{\partial \varphi_6}{\partial n_{56}} \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{56}; \quad (7)$$

$$\gamma_5 \frac{\partial \varphi_5}{\partial n_{5+}} = 0 \text{ на } S_{5+}; \quad \gamma_6 \frac{\partial \varphi_6}{\partial n_{6+}} = 0 \text{ на } S_{6+}; \quad \varphi_{76} = u_2 \text{ на } S_{76}; \quad (8)$$

Здесь u_1 и u_2 — потенциалы первого и второго электродов.

Сведение краевой задачи (1) — (8) к системе интегральных уравнений (СИУ). Решение краевой задачи (1) — (8) будем искать в виде суммы потенциалов простого слоя (ППС):

$$\begin{aligned} 4\pi\gamma_b\varphi(Q) &= \int_{S_{12}} \frac{\tau_{12}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{2+}} \frac{\sigma_{2+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \sum_{i=1}^N \int_{S_{23i}} \frac{\sigma_{23i}(M)}{r_{QM}} ds_M + \\ &+ \int_{S_{42}} \frac{\sigma_{42}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{45}} \frac{\sigma_{45}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{46}} \frac{\sigma_{46}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{56}} \frac{\sigma_{56}(M)}{r_{QM}} ds_M + \\ &+ \int_{S_{5+}} \frac{\sigma_{5+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{6+}} \frac{\sigma_{6+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{76}} \frac{\tau_{76}(M)}{r_{QM}} ds_M, \end{aligned} \quad (9)$$

где τ_{12} и τ_{76} — плотность заряда на поверхностях S_{12} и S_{76} электродов; σ_{2+} , σ_{23i} , σ_{42} , σ_{45} , σ_{46} , σ_{56} , σ_{5+} , σ_{6+} — плотности зарядов на контактных поверхностях; γ_b — базовая проводимость; r_{QM} — расстояние между точками $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ и $M(x_M, y_M, z_M)$,

$$r_{QM} = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2}.$$

Заставляя точку Q в выражении (9) пробегать поверхность электрода S_{12} , получаем интегральное уравнение для плотности заряда τ_{12} :

$$\begin{aligned} 4\pi\gamma_b u_1 &= \int_{S_{12}} \frac{\tau_{12}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{2+}} \frac{\sigma_{2+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \sum_{i=1}^N \int_{S_{23i}} \frac{\sigma_{23i}(M)}{r_{QM}} ds_M + \\ &+ \int_{S_{42}} \frac{\sigma_{42}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{45}} \frac{\sigma_{45}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{46}} \frac{\sigma_{46}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{56}} \frac{\sigma_{56}(M)}{r_{QM}} ds_M + \\ &+ \int_{S_{5+}} \frac{\sigma_{5+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{6+}} \frac{\sigma_{6+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{76}} \frac{\tau_{76}(M)}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in S_{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заставляя точку Q в выражении (9) пробегать поверхность второго электрода S_{76} , получаем интегральное уравнение для плотности заряда τ_{76} :

$$4\pi\gamma_b u_2 = \int_{S_{12}} \frac{\tau_{12}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{2+}} \frac{\sigma_{2+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \sum_{i=1}^N \int_{S_{23i}} \frac{\sigma_{23i}(M)}{r_{QM}} ds_M +$$

$$+ \int_{S_{42}} \frac{\sigma_{42}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{45}} \frac{\sigma_{45}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{46}} \frac{\sigma_{46}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{56}} \frac{\sigma_{56}(M)}{r_{QM}} ds_M +$$

$$+ \int_{S_{5+}} \frac{\sigma_{5+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{6+}} \frac{\sigma_{6+}(M)}{r_{QM}} ds_M + \int_{S_{76}} \frac{\tau_{76}(M)}{r_{QM}} ds_M, Q \in S_{76}. \quad (11)$$

Для удобства далее будем использовать операторную форму записи уравнений (10) и (11):

$$4\pi\gamma_b u_1 = T_{12,12}^0 \tau_{12} + T_{12,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{i=1}^N T_{12,23i}^0 \sigma_{23i} + T_{12,42}^0 \sigma_{42} + T_{12,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ T_{12,46}^0 \sigma_{46} + T_{12,56}^0 \sigma_{56} + T_{12,5+}^0 \sigma_{5+} + T_{12,6+}^0 \sigma_{6+} + T_{12,76}^0 \sigma_{76}, Q \in S_{12};$$

$$4\pi\gamma_b u_2 = T_{76,12}^0 \tau_{12} + T_{76,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{i=1}^N T_{76,23i}^0 \sigma_{23i} + T_{76,42}^0 \sigma_{42} + T_{76,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ T_{76,46}^0 \sigma_{46} + T_{76,56}^0 \sigma_{56} + T_{76,5+}^0 \sigma_{5+} + T_{76,6+}^0 \sigma_{6+} + T_{76,76}^0 \sigma_{76}, Q \in S_{76},$$

где смысл используемых операторов следующий:

$$T_{ij}^0 \sigma_j = \int_{S_j} \frac{\sigma_j(M)}{r_{QM}} ds_M, Q \in S_i.$$

Здесь и далее первый индекс у оператора определяет поверхность, по которой пробегает точка Q , а второй — поверхность интегрирования.

Выведем интегральные уравнения для плотности σ на контактных поверхностях S_{2+} , S_{23i} , S_{42} , S_{45} , S_{56} , S_{5+} , S_{46} , S_{6+} . Для этого воспользуемся известными выражениями для скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность [4]. Например, при переходе через поверхность S_{42} в точке Q скачок определяется следующими выражениями:

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n_4} = \frac{\partial \overline{\varphi_{42}(Q)}}{\partial n_{42}} + \frac{1}{2\gamma_b} \sigma_{42}(Q);$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = \frac{\partial \overline{\varphi_{42}(Q)}}{\partial n_{42}} - \frac{1}{2\gamma_b} \sigma_{42}(Q), \quad (12)$$

где n_4 и n_2 — участки нормали n_{42} в объеме ванны V_4 и в объеме дуги V_2 ;

$$\begin{aligned}
 4\pi\gamma_b \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n_{42}} = & \int_{S_{12}} \tau_{12}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{2+}} \sigma_{2+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{S_{23i}} \sigma_{23i}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{42}} \sigma_{42}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{45}} \sigma_{45}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{46}} \sigma_{46}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{56}} \sigma_{56}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{5+}} \sigma_{5+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{6+}} \sigma_{6+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{76}} \tau_{76}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Подставляя (12) и (13) в граничные условия (4), получаем следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_{12}} \tau_{12}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{2+}} \sigma_{2+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{S_{23i}} \sigma_{23i}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{2\pi}{\chi_{42}} \sigma_{42}(Q) + \\
 & + \int_{S_{42}} \sigma_{42}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{45}} \sigma_{45}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{46}} \sigma_{46}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{56}} \sigma_{56}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{5+}} \sigma_{5+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{6+}} \sigma_{6+}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 & + \int_{S_{76}} \tau_{76}(M) \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q}\bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M = 0, \quad Q \in S_{42}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\chi_{42} = \frac{\gamma_4 - \gamma_2}{\gamma_4 + \gamma_2};$$

$$\bar{n}_{42Q} = \bar{e}_x \alpha_{42} + \bar{e}_y \beta_{42} + \bar{e}_z \gamma_{42},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{42} &= \cos(\widehat{\bar{n}_{42Q} \bar{e}_x}), \beta_{42} = \cos(\widehat{\bar{n}_{42Q} \bar{e}_y}), \gamma_{42} = \cos(\widehat{\bar{n}_{42Q} \bar{e}_z}), \\ \bar{r}_{QM} &= \bar{e}_x(x_M - x_Q) + \bar{e}_y(y_M - y_Q) + \bar{e}_z(z_M - z_Q), \\ \cos(\widehat{\bar{n}_{42Q} \bar{r}_{QM}}) &= \frac{\alpha_{42}(x_M - x_Q) + \beta_{42}(y_M - y_Q) + \gamma_{42}(z_M - z_Q)}{r_{QM}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в выражение для $P_{42}^0(Q, M)$, получаем

$$P_{42}^0(Q, M) = \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_{42Q} \bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} = \frac{\alpha_{42}(x_M - x_Q) + \beta_{42}(y_M - y_Q) + \gamma_{42}(z_M - z_Q)}{r_{QM}^3}, \quad (16)$$

где

$$r_{QM}^3 = [(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2]^{3/2}.$$

В операторном виде уравнение (14) имеет вид

$$\begin{aligned} P_{42,12}^0 \tau_{12} + P_{42,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{i=1}^N P_{42,23i}^0 \sigma_{23i} + \frac{2\pi}{\chi_{42}} \sigma_{42}(Q) + P_{42,42}^0 \sigma_{42} + P_{42,45}^0 \sigma_{45} + \\ + P_{42,46}^0 \sigma_{46} + P_{42,56}^0 \sigma_{56} + P_{42,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{42,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{42,76}^0 \sigma_{76} = 0, \quad Q \in S_{42}, \end{aligned}$$

где смысл используемых операторов следующий:

$$P_{ij}^0 \sigma_j = \int_{S_j} P_{42}^0(Q, M) \sigma_j(M) ds_M, \quad Q \in S_i.$$

Аналогично выводятся уравнения для контактных поверхностей $S_{2+}, S_{23i}, S_{42}, S_{45}, S_{56}, S_{5+}, S_{46}, S_{6+}$.

Запишем полученную СИУ:

$$\begin{aligned} T_{12,12}^0 \tau_{12} + T_{12,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N T_{12,23j}^0 \sigma_{23j} + T_{12,42}^0 \sigma_{42} + T_{12,45}^0 \sigma_{45} + \\ + T_{12,46}^0 \sigma_{46} + T_{12,56}^0 \sigma_{56} + T_{12,5+}^0 \sigma_{5+} + T_{12,6+}^0 \sigma_{6+} + T_{12,76}^0 \sigma_{76} = 4\pi \gamma_b u_1, \quad Q \in S_{12}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$P_{2+,12}^0 \tau_{12} + \frac{2\pi}{\chi_{2+}} \sigma_{2+}(Q) + P_{2+,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{2+,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{2+,42}^0 \sigma_{42} + P_{2+,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ P_{2+,46}^0 \sigma_{46} + P_{2+,56}^0 \sigma_{56} + P_{2+,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{2+,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{2+,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{2+}; \quad (18)$$

$$P_{23i,12}^0 \tau_{12} + P_{23i,2+}^0 \sigma_{2+} + \frac{2\pi}{\chi_{23i}} \sigma_{23i}(Q) + \sum_{j=1}^N P_{23j,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{23i,42}^0 \sigma_{42} + P_{23i,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ P_{23i,46}^0 \sigma_{46} + P_{23i,56}^0 \sigma_{56} + P_{23i,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{23i,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{23i,76}^0 \sigma_{76} = 0,$$

$$Q \in S_{23i}, i=1, \dots, N; \quad (19)$$

$$P_{42,12}^0 \tau_{12} + P_{42,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{42,23j}^0 \sigma_{23j} + \frac{2\pi}{\chi_{42}} \sigma_{42}(Q) + P_{42,42}^0 \sigma_{42} + P_{42,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ P_{42,46}^0 \sigma_{46} + P_{42,56}^0 \sigma_{56} + P_{42,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{42,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{42,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{42}; \quad (20)$$

$$P_{45,12}^0 \tau_{12} + P_{45,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{45,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{45,42}^0 \sigma_{42} + \frac{2\pi}{\chi_{45}} \sigma_{45}(Q) + P_{45,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ P_{45,46}^0 \sigma_{46} + P_{45,56}^0 \sigma_{56} + P_{45,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{45,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{45,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{45}; \quad (21)$$

$$P_{46,12}^0 \tau_{12} + P_{46,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{46,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{46,42}^0 \sigma_{42} + P_{46,45}^0 \sigma_{45} + \frac{2\pi}{\chi_{46}} \sigma_{46}(Q) +$$

$$+ P_{46,46}^0 \sigma_{46} + P_{46,56}^0 \sigma_{56} + P_{46,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{46,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{46,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{46}; \quad (22)$$

$$P_{56,12}^0 \tau_{12} + P_{56,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{56,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{56,42}^0 \sigma_{42} + P_{56,45}^0 \sigma_{45} + P_{56,46}^0 \sigma_{46} +$$

$$+ \frac{2\pi}{\chi_{56}} \sigma_{56}(Q) + P_{56,56}^0 \sigma_{56} + P_{56,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{56,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{56,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{56}; \quad (23)$$

$$P_{5+,12}^0 \tau_{12} + P_{5+,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{5+,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{5+,42}^0 \sigma_{42} + P_{5+,45}^0 \sigma_{45} + P_{5+,46}^0 \sigma_{46} +$$

$$+ P_{5+,56}^0 \sigma_{56} + \frac{2\pi}{\chi_{5+}} \sigma_{5+}(Q) + P_{5+,5+}^0 \sigma_{5+} + P_{5+,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{5+,76}^0 \sigma_{76} = 0, Q \in S_{5+}; \quad (24)$$

$$P_{6+,12}^0 \tau_{12} + P_{6+,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N P_{6+,23j}^0 \sigma_{23j} + P_{6+,42}^0 \sigma_{42} + P_{6+,45}^0 \sigma_{45} + P_{6+,46}^0 \sigma_{46} +$$

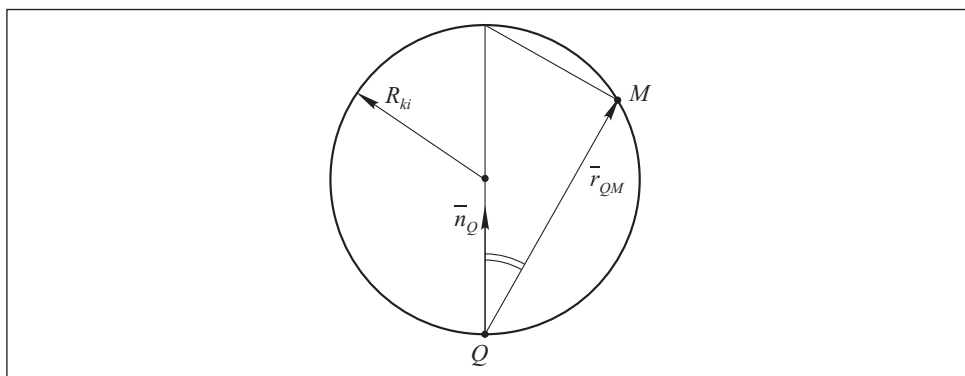


Рис. 4. Схема для вывода формулы ядра в случае, когда точки Q и M принадлежат поверхности i -й капли S_{23i}

$$+ P_{6+,56}^0 \sigma_{56} + P_{6+,5+}^0 \sigma_{5+} + \frac{2\pi}{\chi_{6+}} \sigma_{6+}(Q) + P_{6+,6+}^0 \sigma_{6+} + P_{6+,76}^0 \sigma_{76} = 0, \quad Q \in S_{6+}; \quad (25)$$

$$T_{12,12}^0 \tau_{12} + T_{12,2+}^0 \sigma_{2+} + \sum_{j=1}^N T_{12,23j}^0 \sigma_{23j} + T_{12,42}^0 \sigma_{42} + T_{12,45}^0 \sigma_{45} +$$

$$+ T_{12,46}^0 \sigma_{46} + T_{12,56}^0 \sigma_{56} + T_{12,5+}^0 \sigma_{5+} + T_{12,6+}^0 \sigma_{6+} + T_{12,76}^0 \sigma_{76} = 4\pi\gamma_b u_2, \quad Q \in S_{76}. \quad (26)$$

В результате решения СИУ (17) — (26) находим распределение зарядов на поверхностях электродов S_{12} и S_{76} и на контактных поверхностях S_{2+}, S_{23i} ($i=1, \dots, N$), $S_{42}, S_{45}, S_{46}, S_{56}, S_{5+}, S_{6+}$. Далее с помощью формулы (13) можно вычислить проекции напряженности электрического поля в любой точке ванны. Подобная СИУ использована при расчете токораспределения в электрических стекловаренных печах [5].

Вычисление ядер СИУ по формулам (18) — (25). При любом положении точек Q и M ядро

$$P^0(Q, M) = \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_Q \vec{r}_{QM}})}{r_{QM}^2},$$

вычисляется по формуле (16). Однако в некоторых случаях эта формула упрощается. Рассмотрим эти случаи.

Пусть точка Q пробегает поверхность пластины S_{6+} (см. рис. 3). Когда $Q \in S_{6+}$, нормаль в точке Q в декартовой системе координат имеет вид

$$\vec{n}_{6+} = \vec{e}_x,$$

где \bar{e}_x — орт оси x в декартовой системе координат xuz .

Скалярное произведение запишем в виде

$$(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM}) = x_M - x_Q,$$

где

$$\bar{r}_{QM} = \bar{e}_x(x_M - x_Q) + \bar{e}_y(y_M - y_Q) + \bar{e}_z(z_M - z_Q).$$

Таким образом, получаем следующую формулу для вычисления ядра, когда $Q \in S_{6+1}$:

$$P^0(Q, M) = \frac{(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^3} = \frac{x_M - x_Q}{r_{QM}^3}. \quad (27)$$

Формулы для вычисления ядра $P^0(Q, M)$ в случае, когда точка Q пробегает все плоскости, образующие поверхность S_{6+} , приведены в таблице.

Рассмотрим случай, когда точки Q и M принадлежат поверхности i -й капли S_{23i} . Проведем плоскость через нормаль \bar{n}_Q и точку M (рис. 4). При этом

$$\cos(\widehat{\bar{n}_Q \bar{r}_{QM}}) = \frac{r_{QM}}{2R_{ki}}, \quad (28)$$

где R_{ki} — радиус i -й капли. Подставив формулу (28) в (27), получим

$$P^0(Q, M) = \frac{\cos(\widehat{\bar{n}_Q \bar{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} = \frac{1}{2R_{ki} r_{QM}}.$$

Аналогичную формулу для вычисления ядра можно получить в случае, когда точки Q и M принадлежат полусферическому дну ванны:

$$P^0(Q, M) = \frac{1}{2R_V r_{QM}},$$

где R_V — радиус полусферического дна ванны.

Преобразование СИУ (17) — (26) при наличии симметрии в распределении сварочного тока относительно координатной плоскости uoz . Если второй контакт подключен к пластине, как показано на рис. 1, то в распределении сварочного тока не наблюдается симметрии относительно координатной плоскости uoz . Такая симметрия возможна, если второй контакт выполнен в виде двух параллельно соединенных частей: первая часть (см. рис. 1) присоединена к стороне S_{6+1} , вторая — к стороне S_{6+6} симметрично первой части относительно плоскости uoz . Плоскость uoz

делит пространство на два полупространства: V и V_x . Координаты точек $M(x_M, y_M, z_M)$, принадлежащих V , удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$. Полупространству V_x принадлежат точки $M_x(-x_M, y_M, z_M)$. В этом случае S_{12} — часть границы дуги и электрода, принадлежащая полупространству V . Аналогично принадлежат полупространству V

- S_{2+} — часть боковой поверхности дуги, граничащая с воздухом;
- S_{23i} — часть границы дуги и металла i -й капли;
- S_{42} — часть границы расплава ванны и дуги;
- S_{45} — часть границы расплава ванны и сварного шва;
- S_{56} — часть границы сварного шва и детали;
- S_{5+} — часть границы сварного шва и внешнего пространства;
- S_{46} — часть границы расплава ванны и детали;
- S_{6+} — часть поверхности детали, граничащая с окружающим пространством;
- S_{76} — часть второго электрода со свариваемой деталью.

i	S_{6+i}	$Q \in S_{6+i}$	\bar{n}_Q	$(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})$	$\frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}$
1	S_{6+1}	$Q \in S_{6+1}$	\bar{e}_x	$x_M - x_Q$	$\frac{x_M - x_Q}{r_{QM}^3}$
2	S_{6+2}	$Q \in S_{6+2}$	\bar{e}_y	$y_M - y_Q$	$\frac{y_M - y_Q}{r_{QM}^3}$
3	S_{6+3}	$Q \in S_{6+3}$	$-\bar{e}_x$	$-(x_M - x_Q)$	$\frac{x_M - x_Q}{r_{QM}^3}$
4	S_{6+4}	$Q \in S_{6+4}$	\bar{e}_x	$x_M - x_Q$	$\frac{x_M - x_Q}{r_{QM}^3}$
5	S_{6+5}	$Q \in S_{6+5}$	\bar{e}_y	$y_M - y_Q$	$\frac{y_M - y_Q}{r_{QM}^3}$
6	S_{6+6}	$Q \in S_{6+6}$	$-\bar{e}_x$	$-(x_M - x_Q)$	$\frac{x_M - x_Q}{r_{QM}^3}$
7	S_{6+7}	$Q \in S_{6+7}$	$-\bar{e}_y$	$-(y_M - y_Q)$	$\frac{y_M - y_Q}{r_{QM}^3}$
8	S_{6+8}	$Q \in S_{6+8}$	$-\bar{e}_z$	$-(z_M - z_Q)$	$\frac{z_M - z_Q}{r_{QM}^3}$
9	S_{6+9}	$Q \in S_{6+9}$	\bar{e}_z	$z_M - z_Q$	$\frac{z_M - z_Q}{r_{QM}^3}$

Плотности зарядов на электродах и на контактных поверхностях в точках M и M_x связаны соотношениями

$$\tau(M_x) = \tau(M); \quad \sigma(M_x) = \sigma(M).$$

Преобразованная СИУ с учетом симметрии распределения сварочного тока относительно координатной плоскости yoz имеет ту же структуру, что и СИУ (17) — (26). Однако в этом случае смысл операторов следующий:

$$T_{ij}^x \sigma_j = \int_{S_j} \sigma_j(M) T^x(Q, M) ds_M, \quad Q \in S_i.$$

Здесь

$$T^x(Q, M) = \frac{1}{r_{QM}} + \frac{1}{r_{QM_x}};$$

$$r_{QM_x} = \sqrt{(-x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2};$$

$$P_{ij}^x \sigma_j = \int_{S_j} P^x(Q, M) \sigma_j(M) ds_M, \quad Q \in S_i,$$

где

$$P^x(Q, M) = \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_Q \vec{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} + \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_Q \vec{r}_{QM_x}})}{r_{QM_x}^2}.$$

Аппроксимация СИУ (17) — (26) алгебраическими системами. При численном решении СИУ (17) — (26) аппроксимируется алгебраической системой. Для этой цели можно применить метод Крылова — Боголюбова (МКБ) [6]. Однако этот метод имеет существенный недостаток: получаемая на его основе аппроксимирующая алгебраическая система для интегральных уравнений (17) и (26) в общем случае имеет несимметричную матрицу, в то время как исходное интегральное уравнение является симметричным (либо симметризуемым элементарной заменой переменных). Потеря симметричности приводит к необходимости использовать для решения алгебраических систем общих методов вместо более экономичных и точных, предназначенных для симметричных систем. В связи с этим появляется дополнительная погрешность и увеличивается время решения вследствие возрастания числа арифметических операций. Кроме того, требуются дополнительные затраты памяти для запоминания всей матрицы, тогда как для симметричной системы достаточно запомнить верхний или нижний ее треугольник.

Этого недостатка лишен метод полного осреднения (МПО) [7, 8]. С его помощью можно сохранить в дискретной форме свойство симметрич-

ности интегральных уравнений (17) и (26), так как аппроксимирующая алгебраическая система имеет симметричную матрицу при разбиении расчетной области на элементарные площадки различных форм и размеров.

Аналогично по МКБ и МПО можно аппроксимировать алгебраической системой уравнения (18) — (25). Однако более точную аппроксимацию позволяет получить МПО. Для подобных уравнений метод МПО точно трансформирует собственное число интегрального уравнения в собственное число матрицы.

Полученную алгебраическую систему можно эффективно решать методом подобластей подобно тому, как это сделано в [5]. При этом в качестве подобластей выбираются поверхности электродов и контактные поверхности, разделяющие однородные по проводимости области.

Выводы. В основе предложенной трехмерной интегральной модели распределения сварочного тока лежит СИУ относительно зарядов на поверхностях электродов и на контактных поверхностях, которые определяют распределение сварочного тока. При решении СИУ следует использовать опыт, накопленный при решении близких электротехнических задач [5], а именно: СИУ необходимо аппроксимировать алгебраическими системами по МПО, полученную алгебраическую систему необходимо решать методом подобластей. После решения СИУ плотность сварочного тока может быть найдена в любой изолированной точке или в любом объеме проводника, что является существенным преимуществом этой модели по сравнению с конечно-разностными или конечно-элементными моделями, с помощью которых распределение тока находится во всем объеме проводников, в чем, как правило, нет необходимости.

The three-dimensional integrated model of the welding current distribution during arc welding in the plate gap is suggested enabling one to account the actual electrophysical characteristics of materials forming the essentially non-uniform media — the calculation region.

1. Рыжов Р. Н., Кузнецов В. Д. Внешние электромагнитные воздействия в процессах дуговой сварки и наплавки (обзор). // Автомат. сварка. — 2006. — № 10. — С. 36—43.
2. Максимов С. Ю., Прилипко Е. А., Рыжов Р. Н., Кожухарь В. А. Влияние внешнего электромагнитного воздействия на содержание водорода в металле швов при мокрой подводной сварке. // Там же. — 2003. — № 6. — С. 55—56.
3. Максимов С. Ю., Прилипко Е. А., Рыжов Р. Н., Кожухарь В. А. Влияние внешних электромагнитных воздействий на структуру и химический состав швов при мокрой подводной сварке. // Там же. — 2005. — № 11. — С. 41—44.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М. : ГИФМЛ, 1959. — 232 с.
5. Зайцева В. Б., Пашко А. И., Петрушенко Е. И. и др. О расчете на ЭВМ трехмерных электрических полей в электрических стекловаренных печах методом интегральных уравнений. // Гибридные вычислительные машины и комплексы. — 1990. — № 13. — С. 15—19.

6. *Конторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа. — М. : ГИФМЛ, 1962. — 708 с.
7. *Петрушенко С. И.* До апроксимації інтегральних рівнянь теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами// ДАН УРС. Сер. А. — 1969. — № 7. — С. 618 — 621.
8. *Петрушенко Е. И., Гаврющенко О. Е.* Алгоритмы расчета на ЭЦВМ критических кривых продольных криотронов// Математическое моделирование и теория электрических цепей. — 1971. — № 9. — С. 144 — 150.

Поступила 27.05.08

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, и. о. ст. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, математическое моделирование МГД процессов.

МАКСИМОВ Сергей Юрьевич, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та электросварки им. Е.О. Потона НАН Украины. В 1979 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — физико-металлургические процессы дуговой сварки под водой.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

ПРИЛИПКО Елена Александровна, мл. науч. сотр. Ин-та электросварки им. Е.О. Потона НАН Украины. В 1979 г. окончила Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей при подводной сварке.

РЫБАЛКИН Евгений Александрович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2007 г. окончил Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.