УДК 517.97:519.876

К. Р. Айда-заде, д-р физ.-мат. наук, **С. З.Кулиев**, канд.физ.-мат.наук
Ин-т кибернетики НАН Азербайджана
(Азербайджан, AZ 1141, Баку, ул. Ф. Агаева, 9,
тел. (99412) 5100523, E-mail: kamil_aydazade@rambler.ru, copal@inbox.com)

Об одном классе задач идентификации динамических объектов*

(Статью представил д-р техн. наук А.Ф. Верлань)

Исследован класс задач параметрической идентификации динамических, в общем случае нелинейных, объектов с сосредоточенными параметрами, которые являются постоянными для определенных областей фазового пространства. Получены необходимые условия оптимальности, приведены результаты численных экспериментов.

Досліджено клас задач параметричної ідентифікації динамічних, у загальному випадку нелінійних, об'єктів з зосередженими параметрами, які є константами для визначених областей фазового простору. Отримано необхідні умови оптимальності, наведено результати числових експериментів.

Ключевые слова: динамический объект, фазовое пространство, параметрическая идентификация, критерий идентификации, градиент функционала, обратная задача.

Постановка задачи. Пусть состояние $x(t) \in R^n$ идентифицируемого динамического объекта описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ p(x(t))),\ \ t \in (0,T], \tag{1}$$

где идентифицируемые функции $p(x(t)) \in R^r$ являются параметрами системы, значения которых зависят от состояния системы $x(t)$ ([1—4]); T — заданное время функционирования объекта. Будем предполагать, что вектор-функция $f(.,.) \in R^n$ непрерывно-дифференцируема по своим аргументам.

Обозначим через $X \subseteq R^n$ множество возможных фазовых состояний объекта для различных его возможных начальных условий и допустимых

* Работа выполнена при поддержке INTAS (проект № 06-1000017-8909) в рамках программы «Сотрудничество с Южно-Кавказскими Республиками 2006».

значений параметра $p(x(t))$. Положим, что множество X разбито на конечное число L заданных подмножеств (зон) X^i, $i=1,2,...,L$ таких, что

$$X=\bigcup_{i=1}^{L} X^i,\ X^i \bigcap X^j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,2,...,L.$$

Идентифицируемые параметры $p(x(t))$ предполагаются постоянными в каждой из зон X^i, $i=1,2,...,L$, т. е.

$$p(t)=p(x(t))=p^i=\mathrm{const},\ x(t)\in X^i,\ p^i\in R^r,\ i=1,2,...,L,\ t\in[0,T]. \quad (2)$$

Как правило, идентифицируемые значения p^i в реальных задачах должны удовлетворять ограничениям, обусловленными техническими и технологическими характеристиками объектов. Обозначим P^i, $i=1,2,...,L$, множество допустимых значений параметров p^i, которое предполагается замкнутым и ограниченным.

Простым примером динамической системы рассматриваемого типа может быть одномерное движение материальной точки в какой-либо среде, коэффициент сопротивления в которой зависит от скорости:

$$p(x(t))=\begin{cases} p_1^1\dot{x}(t), & |\dot{x}(t)|\le v_1, \\ p_1^2\dot{x}(t)+p_2^2\dot{x}^2(t), & v_1<|\dot{x}(t)|\le v_2, \\ p_3^3\exp(p_4^3\dot{x}(t)), & v_2<|\dot{x}(t)|, \end{cases} \quad (3)$$

где v_1, v_2 — заданные критические значения скорости движения материальной точки. Таким образом, предполагая, что идентифицируемая функция от состояния объекта в общем случае имеет вид $p(x(t))=p_1\dot{x}(t)+$ $+p_2\dot{x}^2(t)+p_3\exp(p_4\dot{x}(t))$, из (3) следует

$$p_1=\begin{cases} p_1^1, & |\dot{x}(t)|\le v_1, \\ p_1^2, & v_1<|\dot{x}(t)|\le v_2, \\ 0, & v_2<|\dot{x}(t)|, \end{cases} \quad p_2=\begin{cases} p_2^2, & \dot{x}(t)\in[v_1,v_2], \\ 0, & \dot{x}(t)\notin[v_1,v_2], \end{cases}$$

$$p_3=\begin{cases} p_3^3, & |\dot{x}(t)|\ge v_2, \\ 0, & |\dot{x}(t)|<v_2, \end{cases} \quad p_4=\begin{cases} p_4^3, & |\dot{x}(t)|\ge v_2, \\ 0, & |\dot{x}(t)|<v_2, \end{cases}$$

т.е. $r=4$, $p^1=(p_1^1,0,0,0)$, $p^2=(p_1^2,p_2^2,0,0)$, $p^3=(0,0,p_3^3,p_4^3)$.

Фазовое пространство $X\subset R^2$ материальной точки в данном случае является двумерным и определяется парой $(x,\dot{x})$, а подмножества X^i, $i=1,2,3$, есть

$$X^1 = \{(x,\dot{x}) : -l \le x \le +l,\ \ \dot{x} < v_1\},$$
$$X^2 = \{(x,\dot{x}) : -l \le x \le +l,\ \ v_1 < \dot{x} \le v_2\},$$
$$X^3 = \{(x,\dot{x}) : -l \le x \le +l,\ \ v_2 < \dot{x}\},$$

где l — положительная величина, определяемая по реальным физическим свойствам динамики объекта. Ясно, что $X = X^1 \cup X^2 \cup X^3$, $X^1 \cap X^2 = \varnothing$, $X^2 \cap X^3 = \varnothing$, $X^1 \cap X^3 = \varnothing$. Приведенный пример динамической системы является иллюстративным, но в нем содержится суть исследуемого класса задач параметрической идентификации.

Предположим, что для идентификации параметров математической модели было проведено M независимых наблюдений за динамикой исследуемого объекта при различных начальных его состояниях:

$$x^i(0) = x_0^i,\ \ i = 1, 2, \ldots, M. \tag{4}$$

Текущее состояние объекта зависит как от его начального состояния x_0, так и от зональных значений параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L) \in R^{rL}$, т. е. $x(t) = x(t; x_0, p)$. При этом существенным является то, что начальные состояния объекта и зональные значения параметров независимы. Могут рассматриваться либо компоненты, либо весь вектор состояния в отдельные моменты времени,

$$x^i(t_{ij}; x_0^i, p) = x_j^i,\ \ j = 1, 2, \ldots, M_i, \tag{5}$$

в частности моменты времени T^i:

$$x^i(T^i; x_0^i, p) = x_{T_i}^i,\ \ i = 1, 2, \ldots, M, \tag{6}$$

где M_i — количество моментов времени, в которые за состоянием объекта с начальным условием x_0^i проводились наблюдения. Возможны состояния объекта при различных начальных условиях в некоторых промежутках времени:

$$x^i(t; x_0^i, p) = \varphi^{ij}(t),\ \ t \in [\tau_{ij-1}, \tau_{ij}],\ \ \tau_{ij} \in [0, T],\ \ \tau_{ij-1} < \tau_{ij},$$
$$j = 1, 2, \ldots, m_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, M, \tag{7}$$

где m_i — количество наблюдаемых временных интервалов при начальном состоянии x_0^i. Наблюдения могут быть также смешанного типа, т. е. как точечные (5), так и интервальные (7).

Задача параметрической идентификации заключается в определении значений параметров $p(x(t))$ при условиях (1), (2), (4) и дополнительных условиях наблюдения (5), (6) или (7). Например, в случае наблюдений вида (6), используя для идентификации параметров метод наименьших квадратов, исследуемую задачу параметрической идентификации можно привести к задаче параметрического оптимального управления, которая заключается в минимизации при условиях (1), (2), (4) функционала [5]

$$J(p) = f_0(x(t; x_0, p),\ p(t)) + F(x(T; x_0, p)) . \qquad (8)$$

Здесь

$$f_0(.,.) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[T^i(x_0^i; p) - T^{i\_obs.}]^2,\ F(.) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\| x^i(T^i;\ x_0^i, p) - x^i_{T^{i\_obs.}} \right\|^2,$$

где $T^{i\_obs.}$ — наблюдаемое ($obs.$) время попадания траектории с начальным условием x_0^i в точку $x^i_{T^{i\_obs.}}$. Первое слагаемое в (8) характеризует невязку между расчетными и фактическими временами функционирования системы, а второе — невязку по конечному состоянию. Ясно, что для рассматриваемой постановки задачи идентификации число наблюдений должно превышать число идентифицируемых параметров.

Специфика рассматриваемой задачи идентификации динамического процесса заключается в том, что идентифицируемые параметры непосредственно связаны не только с динамическим объектом, но и с внешней средой, и математическая модель движения объекта определяется взаимным соотношением состояний объекта и среды. Задачи параметрической идентификации зональных значений параметров объекта встречаются во многих реальных практических ситуациях, например в томографии, геофизике, медицине, химических процессах.

Численное решение задачи. Рассматриваемая задача параметрической идентификации для нелинейных процессов, с одной стороны, является задачей параметрического оптимального управления, а с другой стороны, вследствие конечномерности вектора идентифицируемых параметров ее можно рассматривать как задачу конечномерной оптимизации, т. е. как специальную задачу математического программирования. Поэтому для ее решения можно использовать соответствующие известные эффективные численные методы, в частности методы первого порядка. Для их применения важное значение имеет наличие (а в случае отсутствия — получение) аналитических формул для вычисления компонент градиента функционала рассматриваемой задачи [5].

Из (2) следует, что идентифицируемые значения параметров $p(t)$, определяются числовой матрицей размерности $(L \times r): P = ((p_j^i)), i = 1, 2, ..., L$, $j = 1, 2, ..., r$, где p_j^i согласно (2) является значением j-го параметра в i-й зоне X^i, а p^i — значения всех параметров i-й зоны, $p^i \in R^r$. Тогда градиент целевого функционала представляет собой следующую $(L \times r)$-мерную матрицу:

$$\operatorname{grad} J(p) = \left(\left(\frac{\partial J(p)}{\partial p_j^i}\right)\right),\ j = 1, 2, ..., r,\ i = 1, 2, ..., L .$$

Таким образом, i-м столбцом этой матрицы является вектор

$$\frac{\partial J(p)}{\partial p^i} = \left(\frac{\partial J(p)}{\partial p_1^i}, \frac{\partial J(p)}{\partial p_2^i}, ..., \frac{\partial J(p)}{\partial p_r^i} \right) \in R^r,$$

определяющий влияние на функционал (8) всех величин идентифицируемых параметров в i-й зоне X^i.

Интервалы времени, в течение которых фазовая траектория $x(t; x_0^i, p)$ с начальным состоянием x_0^i при заданных значениях параметров p находится в j-й фазовой зоне X^j обозначим $\Pi_j(x_0^i, p)$, т. е.

$$\Pi_j(x_0^i, p) \subseteq [0, T^i], \quad j = 1, 2, ..., L, \tag{9}$$

откуда следует, что $x(t; x_0^i, p) \in X^j$, $t \in \Pi_j(x_0^i, p)$, $i = 1, 2, ..., M$, где $T^i = T^i(x_0^i, p)$. Ясно, что

$$\bigcup_{j=1}^{L} \Pi_j(x_0^i, p) = T^i, \; i = 1, 2, ..., M.$$

Возможно, множество $\Pi_j(x_0^i, p)$ является многосвязным, так как траектория $x(t; x_0^i, p)$ может неоднократно пересекать j-ю зону состояний X^j. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Компоненты градиента целевого функционала задачи (1), (2), (4), (6), (8) для допустимых зональных значений идентифицируемых параметров p определяются по формуле

$$\frac{\partial J(p)}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{M} \int\limits_{\Pi_i(x_0^j, p)} \left[-\frac{\partial f^*(x(\tau; x_0^j, p), p(\tau))}{\partial p^i} \psi(\tau; x_0^j, p) + \frac{\partial f_0(x(\tau; x_0^j, p), p(\tau))}{\partial p^i} \right] d\tau, \quad i = 1, 2, ..., L, \tag{10}$$

где $\psi(\tau; x_0^j, p)$ — решение сопряженной задачи:

$$\dot{\psi}(t; x_0^j, p) = -\frac{\partial f^*(x(t; x_0^j, p), p(t))}{\partial x} \psi(t; x_0^j, p) + \frac{\partial f_0(x(t; x_0^j, p), p(t))}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\psi(T^j; x_0^j, p) = -\frac{\partial F(x(T^j; x_0^j, p))}{\partial x}, \quad j = 1, 2, ..., M; \tag{12}$$

* — знак транспонирования.

Для доказательства теоремы можно использовать технологию вариации аргумента, предложенную, например, в работе [6].

Алгоритм решения исследуемой задачи параметрической идентификации динамического объекта состоит из следующих основных этапов.

1. Назначить какие-либо начальные значения зональных параметров $P_0 = p_0^i \in R^r$, $i = 1, 2, ..., L$.

2. Решить прямую начальную задачу (1), (2), (4) с использованием какого-либо численного метода решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) при заданных начальных значениях x_0^i и определить интервалы времени $\Pi_j(x_0^i, p)$ и траектории $x(t; x_0^i, p)$ для всех $i = 1, 2, ..., M$.

3. По формулам (11), (12) решить сопряженную задачу для всех $i = 1, 2, ..., M$ в обратном порядке по $t, t \in [T, 0]$ и определить функции $\psi_i(t; x_0^i, p)$, $i = 1, 2, ..., M$.

4. По формуле (10) провести расчет искомых компонент градиента целевого функционала в пространстве идентифицируемых параметров.

5. В пространстве идентифицируемых параметров P в направлении антиградиента целевого функционала сделать шаг, например методом проекции градиента, и получить новые значения параметров p^i, $i = 1, 2, ..., L$.

6. Если критерий окончания метода оптимизации не выполнен, то перейти к шагу 2, в противном случае завершить процедуру.

Численные эксперименты и анализ результатов. Рассмотрим задачу параметрической идентификации динамического объекта, движение которого описывается следующей автономной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ &\dot{x}_2(t) = a(x(t))\, x_2(t) + b(x(t))\, x_1(t) + 1, \\ &\dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ &\dot{x}_4(t) = a(x(t))\, x_4(t) + b(x(t))\, x_3(t) + 1, \end{aligned} \quad t \in (0, T], \tag{13}$$

где $a(x(t)), b(x(t))$ — неизвестные параметры объекта, подлежащие определению; $(x_1(t), x_3(t))$ — координаты движения объекта на плоскости $x_1 x_3$; $(x_2(t), x_4(t))$ — скорости их движения относительно соответствующих координат.

Предположим, что фазовое пространство в двумерной плоскости движения объекта разделено на три зоны гиперплоскостями $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, перпендикулярными оси x_1 и образующими подмножества

$$X_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 \le 1\},\ X_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): 1 < x_1 \le 2\},$$
$$X_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): 2 < x_1\},$$

в каждом из которых параметры $a(x(t)), b(x(t))$ являются постоянными. Таким образом, общее число зон, покрывающих все фазовое пространство, $L=3$. Проводились наблюдения за движением объекта, в которых начальные состояния принимали значения из множества

$$X_0=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1^i(0)=0; x_2^i(0)=0{,}1i; x_3^i(0)=0{,}1i; x_4^i(0)=1\},\ i=1,2,\ldots,50.$$

Было проведено $M=50$ наблюдений как за временем $T^{i\_obs.}$, которое понадобилось объекту, чтобы достичь окрестности гиперплоскости $x_1=3$ при начальных условиях $x^i(0)=x_0^i$, так и за координатами траектории системы $x_1(T^{i\_obs.}), x_2(T^{i\_obs.}), x_3(T^{i\_obs.}), x_4(T^{i\_obs.})$ при $t=T^{i\_obs.}$ (табл. 1).

Минимизируемый в задаче функционал следующий:

$$J(p)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\{[T^i(x_0^i,p)-T^{i\_obs.}]^2+R[\max([x_1(T^i)-x_1(T^{i\_obs.})]^2+$$
$$+[x_2(T^i)-x_2(T^{i\_obs.})]^2+[x_3(T^i)-x_3(T^{i\_obs.})]^2+$$
$$+[x_4(T^i)-x_4(T^{i\_obs.})]^2-\delta^2,0)]^2\}\to\min_p, \qquad (14)$$

где R — заданная достаточно большая положительная величина, определяющая величину штрафа за нарушение условий $x(T^i)=x(T^{i\_obs.})$, $i=1,2,\ldots,M$; δ — достаточно малая положительная величина. Для того чтобы избежать решения задачи Коши на отрезке с переменным интервалом времени, введем замену переменных по формуле $t=u\tau$, где $u>0$, $\tau\in[0,1]$. Снова обозначая τ через t, систему (13) записываем в виде

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=ux_2(t),\\&\dot{x}_2(t)=u(a(x(t))x_2(t)+b(x(t))x_1(t)+1),\\&\dot{x}_3(t)=ux_4(t),\\&\dot{x}_4(t)=u(a(x(t))x_4(t)+b(x(t))x_3(t)+1),\end{aligned}\quad t\in[0,1]. \qquad (15)$$

Целевой функционал (14) примет следующий вид:

$$J(p,u)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\{[u^i-T^{i\_obs.}]^2+R[\max([x_1(1)-x_1(T^{i\_obs.})]^2+$$
$$+[x_2(1)-x_2(T^{i\_obs.})]^2+[x_3(1)-x_3(T^{i\_obs.})]^2+$$
$$+[x_4(1)-x_4(T^{i\_obs.})]^2-\delta^2,0)]^2\}\to\min_{p,\,u}, \qquad (16)$$

где $u=(u^1, u^2, ..., u^M)$ — оптимизируемый вектор. Соответствующая (15) сопряженная система принимает вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}_1(t)=-b(x(t))\,u\,\psi_2(t),\\
&\dot{\psi}_2(t)=-u\,\psi_1(t)-a(x(t))\,u\,\psi_2(t),\\
&\dot{\psi}_3(t)=-b(x(t))\,u\,\psi_4(t),\\
&\dot{\psi}_4(t)=-u\,\psi_3(t)-a(x(t))\,u\,\psi_4(t),
\end{aligned}\qquad t\in[0,1), \tag{17}$$

с начальным условием на правом конце временного интервала в форме

$$\begin{aligned}
&\psi_1(1)=-4R\sum_{i=1}^{M}(x_1^i(1)-x_1^i(T^{i_obs.})\max\left[\sum_{j=1}^{4}(x_j^i(1)-x_j^i(T^{i_obs.}))^2,0\right],\\
&\psi_2(1)=-4R\sum_{i=1}^{M}(x_2^i(1)-x_2^i(T^{i_obs.})\max\left[\sum_{j=1}^{4}(x_j^i(1)-x_j^i(T^{i_obs.}))^2,0\right],\\
&\psi_3(1)=-4R\sum_{i=1}^{M}(x_3^i(1)-x_3^i(T^{i_obs.})\max\left[\sum_{j=1}^{4}(x_j^i(1)-x_j^i(T^{i_obs.}))^2,0\right],\\
&\psi_4(1)=-4R\sum_{i=1}^{M}(x_4^i(1)-x_4^i(T^{i_obs.})\max\left[\sum_{j=1}^{4}(x_j^i(1)-x_j^i(T^{i_obs.}))^2,0\right].
\end{aligned}\tag{18}$$

Тогда компоненты градиента целевого функционала по оптимизируемым параметрам вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial J}{\partial u^i}=\frac{2}{M}(u^i-T^{i\_obs.})+\int_0^1[-\psi_1(t)\,x_2(t)-\psi_2(t)\,(a(x(t))\,x_2(t)+$$

$$+b(x(t))\,x_1(t)+1)-\psi_3(t)x_4(t)-\psi_4(t)\,(a(x(t))\,x_4(t)+b(x(t))\,x_3(t)+1)]dt,$$

$$i=1,2,...,M, \tag{19}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a^i}=\sum_{j=1}^{M}\int_{\Pi_i(x_0^j;a,\,b)}[-x_2(t)\,u^j\psi_2(t)-x_4(t)\,u^j\psi_4(t)]\,dt,\ i=1,2,3, \tag{20}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b^i}=\sum_{j=1}^{M}\int_{\Pi_i(x_0^j;a,\,b)}[-x_1(t)\,u^j\psi_1(t)-x_3(t)\,u^j\psi_3(t)]\,dt,\ i=1,2,3. \tag{21}$$

В табл. 1 приведены наблюдаемые значения времени и конечного состояния для различных начальных состояний объекта, т. е. результаты

Таблица 1

i	x_0^i	$T^{i\_obs.}$	$x(T^{i\_obs.})$	i	x_0^i	$T^{i\_obs.}$	$x(T^{i\_obs.})$
1	(0, 0.1, 0.1, 1.0)	2.0714	(3.03, 3.40, 6.85, 6.50)	26	(0, 2.6, 2.6, 1.0)	0.8857	(3.05, 4.44, 4.47, 3.42)
2	(0, 0.2, 0.2, 1.0)	1.9714	(3.02, 3.39, 6.36, 6.11)	27	(0, 2.7, 2.7, 1.0)	0.8571	(3.02, 4.49, 4.48, 3.37)
3	(0, 0.3, 0.3, 1.0)	1.8857	(3.02, 3.40, 6.00, 5.80)	28	(0, 2.8, 2.8, 1.0)	0.8428	(3.05, 4.57, 4.55, 3.35)
4	(0, 0.4, 0.4, 1.0)	1.8000	(3.01, 3.40, 5.67, 5.51)	29	(0, 2.9, 2.9, 1.0)	0.8142	(3.01, 4.62, 4.56, 3.29)
5	(0, 0.5, 0.5, 1.0)	1.7285	(3.02, 3.42, 5.43, 5.29)	30	(0, 3.0, 3.0, 1.0)	0.8000	(3.03, 4.71, 4.63, 3.27)
6	(0, 0.6, 0.6, 1.0)	1.6571	(3.01, 3.44, 5.20, 5.09)	31	(0, 3.1, 3.1, 1.0)	0.7857	(3.05, 4.79, 4.69, 3.26)
7	(0, 0.7, 0.7, 1.0)	1.6000	(3.04, 3.48, 5.05, 4.92)	32	(0, 3.2, 3.2, 1.0)	0.7714	(3.06, 4.87, 4.76, 3.24)
8	(0, 0.8, 0.8, 1.0)	1.5285	(3.00, 3.48, 4.85, 4.74)	33	(0, 3.3, 3.3, 1.0)	0.7428	(3.01, 4.92, 4.77, 3.18)
9	(0, 0.9, 0.9, 1.0)	1.4857	(3.04, 3.53, 4.78, 4.62)	34	(0, 3.4, 3.4, 1.0)	0.7285	(3.02, 5.00, 4.84, 3.16)
10	(0, 1.0, 1.0, 1.0)	1.4285	(3.03, 3.57, 4.66, 4.49)	35	(0, 3.5, 3.5, 1.0)	0.7142	(3.02, 5.08, 4.90, 3.15)
11	(0, 1.1, 1.1, 1.0)	1.3714	(3.01, 3.59, 4.54, 4.36)	36	(0, 3.6, 3.6, 1.0)	0.7000	(3.03, 5.17, 4.97, 3.13)
12	(0, 1.2, 1.2, 1.0)	1.3285	(3.02, 3.63, 4.48, 4.26)	37	(0, 3.7, 3.7, 1.0)	0.6857	(3.03, 5.24, 5.03, 3.10)
13	(0, 1.3, 1.3, 1.0)	1.2857	(3.02, 3.68, 4.43, 4.16)	38	(0, 3.8, 3.8, 1.0)	0.6714	(3.03, 5.32, 5.09, 3.08)
14	(0, 1.4, 1.4, 1.0)	1.2428	(3.02, 3.72, 4.37, 4.07)	39	(0, 3.9, 3.9, 1.0)	0.6571	(3.02, 5.41, 5.16, 3.07)
15	(0, 1.5, 1.5, 1.0)	1.2000	(3.01, 3.76, 4.33, 3.98)	40	(0, 4.0, 4.0, 1.0)	0.6428	(3.01, 5.48, 5.22, 3.04)
16	(0, 1.6, 1.6, 1.0)	1.1714	(3.04, 3.84, 4.34, 3.94)	41	(0, 4.1, 4.1, 1.0)	0.6285	(3.00, 5.55, 5.29, 3.01)
17	(0, 1.7, 1.7, 1.0)	1.1285	(3.01, 3.86, 4.29, 3.84)	42	(0, 4.2, 4.2, 1.0)	0.6285	(3.07, 5.67, 5.39, 3.03)
18	(0, 1.8, 1.8, 1.0)	1.1000	(3.03, 3.93, 4.31, 3.79)	43	(0, 4.3, 4.3, 1.0)	0.6142	(3.06, 5.74, 5.46, 3.01)
19	(0, 1.9, 1.9, 1.0)	1.0714	(3.05, 4.00, 4.32, 3.75)	44	(0, 4.4, 4.4, 1.0)	0.6000	(3.04, 5.82, 5.52, 2.98)
20	(0, 2.0, 2.0, 1.0)	1.0285	(3.00, 4.03, 4.28, 3.66)	45	(0, 4.5, 4.5, 1.0)	0.5857	(3.02, 5.89, 5.58, 2.95)
21	(0, 2.1, 2.1, 1.0)	1.0000	(3.00, 4.09, 4.29, 3.61)	46	(0, 4.6, 4.6, 1.0)	0.5857	(3.08, 6.00, 5.69, 2.97)
22	(0, 2.2, 2.2, 1.0)	0.9857	(3.05, 4.18, 4.36, 3.59)	47	(0, 4.7, 4.7, 1.0)	0.5714	(3.06, 6.08, 5.75, 2.95)
23	(0, 2.3, 2.3, 1.0)	0.9571	(3.04, 4.24, 4.37, 3.54)	48	(0, 4.8, 4.8, 1.0)	0.5571	(3.03, 6.15, 5.82, 2.92)
24	(0, 2.4, 2.4, 1.0)	0.9285	(3.03, 4.29, 4.39, 3.49)	49	(0, 4.9, 4.9, 1.0)	0.5428	(3.00, 6.23, 5.88, 2.89)
25	(0, 2.5, 2.5, 1.0)	0.9000	(3.01, 4.35, 4.40, 3.44)	50	(0, 5.0, 5.0, 1.0)	0.5428	(3.05, 6.33, 5.98, 2.90)

Таблица 2

i	u_o^i	u_p^i	i	u_o^i	u_p^i
1	2.07142837	2.07142857	26	0.88571480	0.88571429
2	1.97142830	1.97142857	27	0.85714283	0.85714286
3	1.88571393	1.88571429	28	0.84285757	0.84285714
4	1.79999998	1.80000000	29	0.81428588	0.81428571
5	1.72857119	1.72857143	30	0.79999967	0.80000000
6	1.65714283	1.65714286	31	0.78571380	0.78571429
7	1.60000043	1.60000000	32	0.77142901	0.77142857
8	1.52857121	1.52857143	33	0.74285694	0.74285714
9	1.48571383	1.48571429	34	0.72857145	0.72857143
10	1.42857190	1.42857143	35	0.71428573	0.71428571
11	1.37142906	1.37142857	36	0.69999994	0.70000000
12	1.32857093	1.32857143	37	0.68571395	0.68571429
13	1.28571550	1.28571429	38	0.67142818	0.67142857
14	1.24285758	1.24285714	39	0.65714241	0.65714286
15	1.19999949	1.20000000	40	0.64285670	0.64285714
16	1.17142807	1.17142857	41	0.62857132	0.62857143
17	1.12857186	1.12857143	42	0.62857180	0.62857143
18	1.10000053	1.10000000	43	0.61428595	0.61428571
19	1.07143019	1.07142857	44	0.60000041	0.60000000
20	1.02857135	1.02857143	45	0.58571387	0.58571429
21	0.99999948	1.00000000	46	0.58571468	0.58571429
22	0.98571482	0.98571429	47	0.57142877	0.57142857
23	0.95714233	0.95714286	48	0.55714325	0.55714286
24	0.92857107	0.92857143	49	0.54285726	0.54285714
25	0.89999986	0.90000000	50	0.54285756	0.54285714

Таблица 3

Параметр	Градиент по формулам			
	(17), (18)	(19) при $\delta = 10^{-5}$	(19) при $\delta = 10^{-6}$	(19) при $\delta = 10^{-7}$
$\partial J / \partial a^1$	784045.97	784136.48	784104.78	784065.34
$\partial J / \partial a^2$	676731.75	677542.81	677509.47	677465.19
$\partial J / \partial a^3$	2671938.86	2713684.21	2713421.21	2713024.13
$\partial J / \partial b^1$	329855.56	336443.86	336141.97	336002.81
$\partial J / \partial b^2$	414728.79	420723.54	420421.59	420072.43
$\partial J / \partial b^3$	2995558.32	3019852.55	3014761.40	3010633.43

решения задач Коши согласно системе (15) при значениях параметров $a^* = (0{,}3; 0{,}2; 0{,}1)$ и $b^* = (0{,}5; 0{,}4; 0{,}3)$, обеспечивающих минимум функционала (16).

В результате численного решения задачи с применением предложенных формул при начальных приближениях искомых параметров $a^0 = b^0 = (0; 0; 0)$, $u^{i0} = 2$, $i = 1, 2, \ldots, M$ получены векторы $\overline{a} = (0{,}3025; 0{,}1956; 0{,}0974)$, $\overline{b} = (0{,}4982; 0{,}3967; 0{,}3077)$. Значения параметров u^i, $i = 1, 2, \ldots, M$, приведены в табл. 2, где u_o^i — оптимальные и u_p^i — точные значения параметров. Значения компонент градиента целевого функционала по параметрам a^i, b^i, $i = 1, 2, 3$, в начальной точке вычисленные по формулам (20), (21) приведены в табл. 3. Там же приведены значения компонент градиента целевого функционала, вычисленные с применением разностной аппроксимации производных по формуле

$$\frac{\partial J(z)}{\partial z} \approx \frac{J(z+\delta) - J(z-\delta)}{2\delta}. \qquad (22)$$

Следует заметить, что выбор значения δ существенно влияет на получаемые приближенные значения компонент градиента.

Полученное методом сопряженных градиентов оптимальное значение целевого функционала $J^* = 2 \cdot 10^{-4}$. Точность решения задачи оптимизации методом сопряженных градиентов $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, точность решения одномерной задачи оптимизации $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, значение параметра штрафа $R = 5 \cdot 10^2$. Для решения прямой и сопряженной задач Коши был использован метод Рунге — Кутта четвертого порядка с шагом 10^{-2}. Все расчеты проводились с двойной точностью.

Вывод. Задача конечномерной оптимизации, к которой приведена исходная задача, при наличии точных формул вычисления градиента целевой функции не представляет больших сложностей. Для ее решения имеются хорошо развитые стандартные программные средства, в частности пакет прикладного программного обеспечения Matlab. Предлагаемый подход можно распространить и на объекты с распределенными параметрами, описываемые уравнениями с частными производными.

A class of problems of parametrical identification of dynamic, in the general case, non-linear objects with concentrated parameters is investigated in the work. The specificity of the considered problems lies in identification of the values of the parameters of the mathematical model of the object, which are constant for definite domains of the phase space. Necessary conditions of optimality have been obtained; the results of numerical experiments are given.

1. *Айда-заде К. Р.* Задача управления в среднем по региональным управляющим воздействиям и множеству начальных условий // Докл. НАН Азербайджана. Серия ФМТН. — 2003. — № 4. — С. 48—53.
2. *Ivanova A. P.* Feedback control for stochastic heat equation // J. of Computer and System Sciences International. — 2003. — Vol. 42, № 5. — P. 683—691.
3. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастное управление и стабильность. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
4. *Aida-zade K. R., Guliev S. Z.* On a problem of feedback control for non-linear systems. Automatic Control and Computer Sciences (Latvia). — 2005. — № 1. — P. 15—23.
5. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М. : Наука, 1982. — 432 с.
6. *Габассов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — М. : Наука и техника, 1974. — 272 с.

Поступила 12.09.07

АЙДА-ЗАДЕ Камиль Раджаб, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб. Ин-та кибернетики НАН Азербайджана. В 1972 г. окончил Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — численные методы оптимизации, оптимальное управление и их приложения.

КУЛИЕВ Самир Закир, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Ин-та кибернетики НАН Азербайджана. В 2005 г. окончил Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — численные методы оптимизации, оптимальное управление и их приложения.