



УДК 519.718

**В. А. Романкевич, Е. Р. Потапова**, кандидаты техн. наук,  
**Хедаятоллах Бахтари**, аспирант  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический ин-т»  
(Украина, 03056, Киев, проспект Победы, 37,  
тел. (044) 454-90-32; E-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua)

### **Иерархическая модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем в потоке отказов**

(Статья рекомендована проф. [В. Г. Тоценко](#))

Предложена модель, являющаяся дальнейшим развитием идеи построения графо-логических моделей, отражающих реакцию отказоустойчивой многопроцессорной системы на появление отказов различной кратности. Особенность предлагаемой модели заключается в том, что она состоит из нескольких графов, расположенных на разных уровнях иерархии.

Запропоновано модель, що є подальшим розвитком ідеї побудови графо-логічних моделей, які відображують реакцію відмовостійкої багатопроцесорної системи на появу відмов різної кратності. Особливість запропонованої моделі полягає у тому, що вона складається з декількох графів, які розміщуються на різних рівнях ієрархії.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* отказоустойчивые многопроцессорные системы, модели поведения систем в потоке отказов.

Модели поведения реконфигурируемых отказоустойчивых многопроцессорных систем (ОМС) в потоке отказов находят применение при расчете надежности ОМС путем выполнения статистических экспериментов с ними. Модели отражают реакцию ОМС (остаётся она работоспособной или нет) на появление отказов. Известны так называемые *GL*-модели, суть которых сводится к следующему.

*GL*-модель ОМС, состоящая из  $n$  элементов, представляет собой неориентированный циклический граф  $G$ , и каждому его ребру присваивается булева функция, аргументами которой являются индикаторные переменные  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), равные единице или нулю (в зависимости от состояния соответствующего модуля: работоспособен он или неисправен). Ребро удаляется из графа *GL*-модели, если соответствующая ему реберная функция принимает значение 0. Связность графа моделирует работоспособность системы. ОМС (и её *GL*-модель), включающую  $n$  процессоров и сохраняющую работоспособность при появлении отказов её

процессоров, кратность которых не превышает величины  $m$ , будем называть базовой и обозначим  $K(m, n)$ . Двоичный вектор, компонентами которого являются конкретные значения переменных  $x_i$ , в дальнейшем будем называть вектором состояния ОМС.

Особый практический интерес представляют модели для так называемых небазовых ОМС, т. е. устойчивых к некоторому множеству отказов, кратность которых отличается от  $m$  в ту или иную сторону. Модели для небазовых ОМС могут быть построены путем преобразования базовых. Один из способов такого преобразования — введение дополнительных ребер со своими функциями, которые блокируют потерю связности графа  $GL$ -модели при появлении соответствующих векторов состояния системы. Понятно, что при большом числе микропроцессоров (сотни) модель получается достаточно сложной. Практически всегда систему управления удастся декомпозировать на некоторое множество подсистем, для каждой из которых строится своя модель. Поэтому интерес представляют методы построения различных моделей (как базовых, так и небазовых).

Рассмотрим метод построения многоуровневой базовой модели, которая имеет определенные преимущества при преобразовании в небазовую. Будем опираться на результаты двух работ: [1], где описана минимизация, а фактически описан метод формирования реберных функций базовой  $GL$ -модели, и [2], где установлена иерархия реберных функций, представленная в виде дерева.

Основная идея построения новой модели ( $D$ -модели) заключается в представлении ее в виде множества графов, каждый из которых включает в себя лишь пару функций из представленных вершинами, имеющими общую смежную, на дереве, описанном в [2]. Учитывая результаты, изложенные в работе [2], будем рассматривать 3-отказоустойчивую ОМС, хотя основные результаты могут быть обобщены для систем  $K(m, n)$ . Следует заметить, что в современных зарубежных публикациях подобные системы и их модели обозначают *k-out-of-n* (см., например, [3]).

**Основные положения.** Пусть имеем  $GL$ -модель, построенную в соответствии с [1]. Будем строить новую модель ( $D$ -модель), исходя из реберных функций  $GL$ -модели и их упорядочения согласно [2]. Для рассматриваемого случая  $K(3, n)$  сформулируем следующие положения.

*Положение 1.* Ячейкой модели является граф вида, представленного на рис. 1, где функции  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$  — реберные функции  $GL$ -модели, полученной после минимизации [1], которые зависят от одних и тех же переменных;  $a_{i1}$  и  $a_{i2}$  — реберные функции новой модели, соответствующие состоянию графов следующего уровня иерархии.

Если сравнивать с деревом, описанным в [2], то  $i$  — уровень иерархии вершин дерева (т. е. реберных функций модели), а  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$  — реберные

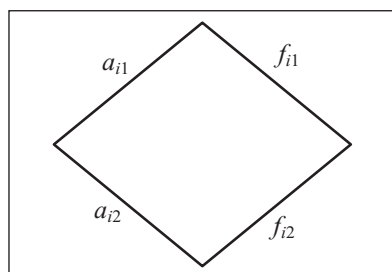


Рис. 1

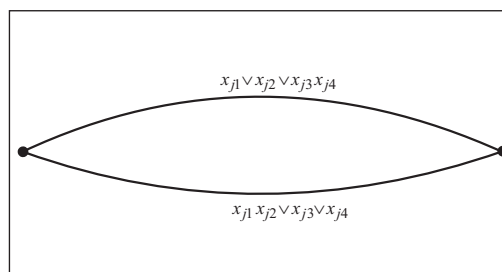


Рис. 2

функции этого уровня, соответствующие двум вершинам, имеющим общую смежную. Для того чтобы различать функции одного и того же уровня, индекс  $i$  представляется как сложный вектор-индекс, фактически — номер этой смежной вершины. Следует обратить внимание на тот факт, что индексы пары функций вида  $a$  и  $f$  совпадают.

Функции вида  $a_i$  формируются на основе графов  $i + 1$  уровня иерархии следующим образом. Функция  $a_{i1}$  приравняется к нулю, если пропадает хотя бы одно ребро в том графе следующего уровня иерархии, индексы всех функций которого формируются на основе функции  $a_{i1}$  добавлением цифры 1 или 2. В противном случае  $a_{i1} = 1$ . Индексы функций формируются точно так же, как в дереве из работы [2], в котором функции двух вершин следующего уровня иерархии зависят от переменных того подмножества переменных функции предыдущего уровня, которое связано с цифрой 2 в ее представлении.

*Положение 2.* На последнем каскаде графов  $D$ -модели, когда число переменных  $3 \leq n_i \leq 5$ , функции вида  $a$  формируются иначе:

$n_i = 3 \Rightarrow$  на месте функции вида  $a_i$  в четырехреберном графе записывается непосредственно функция  $x_{j1} \vee x_{j2} \vee x_{j3}$ ;

$n_i = 4 \Rightarrow$  для образования функции  $a_i$  формируется следующий граф с реберными функциями (рис. 2).

$n_i = 5 \Rightarrow$  для образования функции  $a_i$  формируется граф, представленный на рис. 3.

*Положение 3.* Потеря работоспособности ОМС отражается потерей связности в каком-либо из графов модели  $D$ .

Согласно положению 1, например, для определения значения функции  $a_{i1}$  ( $a_{i2}$ ) достаточно проанализировать состояние ребер двух графов следующего уровня иерархии, описывающих функции  $a_{i11}$  и  $a_{i12}$  (либо  $a_{i21}$  и  $a_{i22}$ ).

В самом деле, если в каком-то из этих графов обнуляется хотя бы одна реберная функция вида  $f$ , то это является решением вопроса:  $a_{i1} = 0$ . Значения функций  $a_{i11}$  и  $a_{i12}$  определяются состоянием ребер графов следующего уровня иерархии и т. д. Иными словами, если хотя бы одно

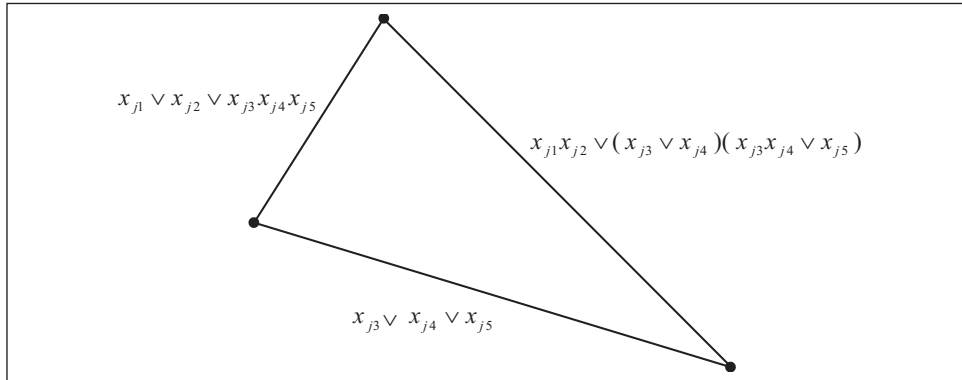


Рис. 3

ребро в исходной  $GL$ -модели пропадает при появлении того или иного вектора состояния ОМС, то пропадет хотя бы одно ребро графа (см. рис. 1) верхнего уровня иерархии. Поэтому, если в каком-то из графов модели  $D$  хотя бы одно ребро, то соответствующие ребра вида  $a$  всех графов более высоких уровней иерархии пропадают (по одному в каждом графе).

Тот факт, что иногда функции  $a_i$  в графе предпоследнего уровня иерархии на последнем уровне представляются графами с двумя или тремя ребрами с их функциями, объясняется следующим: если все неисправности (четыре отказа) сосредоточены в таком небольшом подмножестве процессоров, то потерю работоспособности системой необходимо отобразить пропаданием двух ребер в соответствующем графе именно последнего уровня.

В [1] предлагается метод построения  $GL$ -модели  $K(m, n)$ , теряющей ровно два ребра при появлении вектора состояния системы, содержащего  $m + 1$  нулевую компоненту. В данном случае, очевидно, это векторы  $w_i \in W$ , где  $W$  — множество всех векторов, содержащих четыре нуля. Очевидно, функции  $f_i$  графа предпоследнего каскада при таком сосредоточении нулей в векторе состояния ОМС не обнуляются.

Рассмотрим построение  $D$ -модели на примере ОМС  $K(3, 13)$ .  $GL$ -модель этой системы представляет собой циклический граф, каждому ребру которого приписана (произвольно) одна из следующих функций:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (x_1 \vee x_2)(x_1 x_2 \vee x_3)(x_1 x_2 x_3 \vee x_4 x_5 x_6)(x_4 \vee x_5)(x_4 x_5 \vee x_6) \vee \\
 &\vee x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13}, \\
 f_2 &= (x_7 \vee x_8)(x_7 x_8 \vee x_9)(x_7 x_8 x_9 \vee x_{10} x_{11} x_{12} x_{13})(x_{10} \vee x_{11})(x_{12} \vee x_{13}) \\
 &(x_{10} x_{11} \vee x_{12} x_{13}) \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \\
 f_{11} &= (x_1 x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2) \vee x_4 x_5 x_6,
 \end{aligned}$$

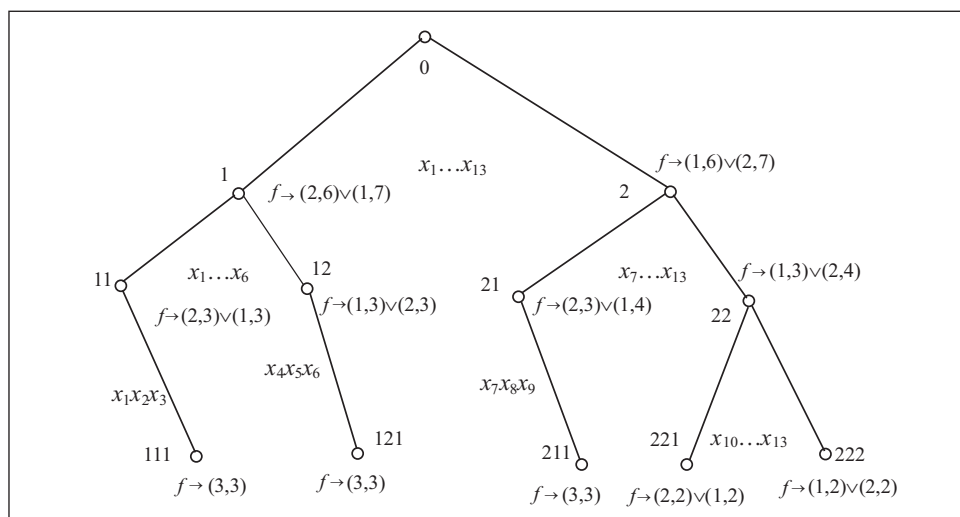


Рис. 4

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= (x_4x_5 \vee x_6)(x_4 \vee x_5) \vee x_1x_2x_3, \\
 f_{21} &= (x_7x_8 \vee x_9)(x_7 \vee x_8) \vee x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}, \\
 f_{22} &= (x_{10} \vee x_{11})(x_{12} \vee x_{13})(x_{10}x_{11} \vee x_{12}x_{13}) \vee x_7x_8x_9, \\
 f_{111} &= x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\
 f_{121} &= x_4 \vee x_5 \vee x_6, \\
 f_{211} &= x_7 \vee x_8 \vee x_9, \\
 f_{221} &= x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12}x_{13}, \\
 f_{222} &= x_{10}x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}.
 \end{aligned}$$

Функции получены согласно методике, изложенной в [1]. Определенную упорядоченность вносит дерево иерархии реберных функций (рис. 4). Теперь легко построить  $D$ -модель (рис. 5), руководствуясь положениями 1 и 2.

Построим модель для общего случая. Из положения 1, в котором заключается суть построения модели вида  $D$ , непосредственно следует, что она имеет иерархический характер и состоит из множества четырех-реберных графов одинакового вида (см. рис. 1), причем каждому графу  $i$ -го уровня иерархии соответствуют в точности два графа  $i + 1$ -го уровня. Исключение составляют графы последнего уровня иерархии.

**Утверждение 1.** Модель  $D$  адекватна поведению ОМС в потоке отказов.

Доказательство основано на общих положениях формирования и функционирования  $GL$ -моделей. Действительно, все реберные функции  $GL$ -модели  $K(3, n)$ , построенной по методике, изложенной в [1], в  $D$ -модели

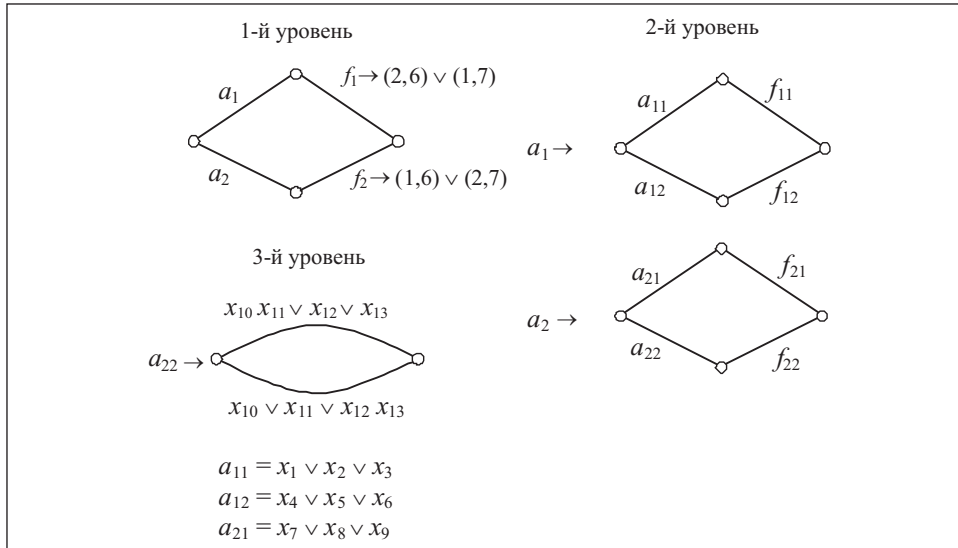


Рис. 5

присутствуют, причем каждое — ровно один раз. Следовательно, если число отказов в ОМС не превышает трех, то в графах обеих моделей выпадает не более, чем по одному ребру, что подтверждает адекватность  $D$ -модели для рассматриваемого случая.

Рассмотрим случай появления четырех отказов. В  $D$ -модели, как и в модели, описанной в [1], выпадает два ребра (с теми же реберными функциями), что соответствует потере работоспособности системой. Возможны два варианта:

1. Выпадают два ребра в одном графе, т. е. функции  $f_{11}$  и  $f_{12}$  становятся равными нулю (см. рис. 1). Связность этого графа пропадает, и, следовательно, существует адекватность поведения ОМС и ее  $D$ -модели. Рассматриваемый случай соответствует условию «б» утверждения 2 из работы [2] (дерево иерархии ребер  $GL$ -модели). Действительно, согласно положению 1 формирования  $D$ -модели именно эти функции присутствуют в одном графе вида, изображенного на рис. 1. Следовательно, функции вида  $f$  всех графов одного уровня иерархии соответствуют вершинам одного уровня дерева иерархии, и две функции одного графа соответствуют тем вершинам одного уровня на дереве, которые имеют общую смежную вершину. Отсюда, а также из лемм 1 и 2 работы [2] вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Не существует вектора  $w_i \in W$ , в котором нулевые компоненты расположены так, чтобы в одном графе  $D$ -модели выпадали ребра  $a_{i1}$  и  $a_{i2}$ .

2. Выпадает два ребра в разных графах. Пусть это ребра с функциями  $f_{ij}$  и  $f_{ik}$ , причем  $f_{ij}$  соответствует более высокому уровню иерархии. Если снова вернуться к дереву иерархии ребер модели, то можно увидеть, что этот случай соответствует условию «а» утверждения 2 из работы [2], т. е. соответствующие этим ребрам вершины лежат на одной ветви дерева. В предлагаемой модели эти ребра находятся в разных графах, на разных уровнях иерархии, но в тех графах, которые связаны единой иерархической линией по ребрам типа  $a$ . В каком-то из этих графов уровня  $k$  выпадает одно ребро с функцией  $f_{ik}$ . Это означает, что в графах всех уровней иерархии выше  $k$ -го, выпадает по одному ребру типа  $a$  согласно указанному выше свойству. Это справедливо и для  $j$ -го уровня иерархии, а значит, в соответствующем графе, где присутствуют ребра с функцией  $f_{ij}$ , выпадает два ребра, и он теряет связность.

В графах последнего уровня иерархии, где  $n_i = 4$  либо  $n_i = 5$ , сосредоточение четырех нулей в соответствующем подмножестве переменных приведет к потере связности в графе, описанном в положении 2. Следует заметить, что вариант обнуления двух реберных функций в разных графах одного уровня иерархии невозможен при четырех переменных, равных нулю, так как соответствующие множества переменных не пересекаются. Если число реальных отказов в системе превышает четыре, то, очевидно, будет наблюдаться потеря связности хотя бы в одном графе. Этим завершается доказательство утверждения 1.

Изложенное свидетельствует об относительной простоте формирования базовой  $D$ -модели. Рассмотрим возможность ее трансформации для случая, когда ОМС устойчива к некоторым четырехкратным отказам. Как было указано выше, при появлении вектора  $w_i \in W$  состояния ОМС, имеющей четыре отказа, среди графов  $D$ -модели всегда найдется граф, в котором выпадут два ребра. Докажем следующее.

**Утверждение 3.** Граф  $D$ -модели, в котором выпадает два ребра при появлении вектора  $w_i \in W$ , будет единственным.

Рассмотрим те же два случая.

1. В каком-либо графе модели  $D$ , выпадают два ребра с функциями вида  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$  (см. рис. 1). В графах более низких уровней иерархии никакие ребра не выпадают, так как при появлении вектора  $w_i$  равны нулю всего две функции. В графах более высоких уровней иерархии выпадает по одному ребру вида  $a$ . Следовательно, этот граф единственный, где выпадут два ребра.

2. Выпадают два ребра в разных графах. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что нарушение связности также будет наблюдаться в единственном графе, а именно, в графе более высокого уровня, о котором шла речь при доказательстве адекватности модели  $D$ .



Любой из графов последнего каскада теряет связность, если число нулей в векторе состояния больше трех и они сосредоточены в соответствующих множествах процессоров. Очевидно, такой граф также будет единственным.

Утверждение 3 упрощает и уточняет задачу трансформации модели. Если ОМС остается работоспособной при появлении вектора  $w_i \in W$ , то в модели  $D$  для блокирования потери связности (чтобы модель оставалась адекватной поведению системы) достаточно провести одно дополнительное ребро в том графе, о котором идет речь в утверждении 3. Если при появлении вектора  $w_i \in W$  обнуляются функции  $f_{i1}$  и  $f_{j2}$ , то функция  $f_g$ , приписываемая дополнительному ребру, имеет вид  $f_g = f_{i1} \vee f_{j2}$ .

$D$ -модель имеет еще одно достоинство. Как упомянуто выше, при переходе от модели базовой ОМС к небазовой для блокирования потери связности при появлении вектора состояния ОМС (для простоты будем в таких случаях употреблять термин «блокирование вектора»), который вызывает пропадание в модели двух ребер, достаточно одного дополнительного ребра со своей функцией. Если возникает необходимость блокирования некоторого множества векторов состояния (таких, что в случае появления любого из них из модели удаляются два ребра), то для этого во многих случаях тоже достаточно одного дополнительного ребра (напомним, что ребра в модели можно переставлять как угодно). Однако так бывает не всегда, в частности тогда, когда некоторые векторы состояния образуют так называемые «попарные реберные циклы».

Суть попарных реберных циклов [2] заключается в следующем. Допустим, есть три вектора состояния. Появление каждого из них приводит к выпадению в модели двух ребер. Положим, что при появлении первого вектора состояния из модели удаляются ребра  $i$  и  $j$ , при появлении второго вектора состояния — ребра  $j$  и  $k$ , при появлении третьего вектора состояния — ребра  $i$  и  $k$ . Таким образом, ребра  $i, j, k$  составляют своеобразный цикл, который назовем попарным реберным циклом (ПРЦ). В описанном примере ПРЦ состоит из трех ребер, хотя в общем случае ПРЦ может содержать  $p$  ребер ( $2 \leq p \leq n$ ). Все сказанное относится к обычным  $GL$ -моделям циклического типа.

**Утверждение 4.** В  $D$ -модели отсутствуют ПРЦ.

По определению ПРЦ может возникнуть только в одном графе. В модели  $D$  большинство графов — четырехреберные, и ни в одном из них не может быть ПРЦ. Теоретически можно рассмотреть два варианта:

1) ПРЦ образуется двумя ребрами  $a$  и одним ребром с функцией  $f$ . Это невозможно по утверждению 2.



2) ПРЦ образуется двумя ребрами с функциями  $f_{i1}$  и  $f_{i2}$  и одним ребром  $a$ . Это также невозможно, поскольку функция вида  $a$  обнуляется при равенстве нулю какой-либо реберной функции более низкого (но не более высокого) уровня дерева иерархии реберных функций, что не соответствует условию 2.2 утверждения 3 из работы [2].

О графах последнего каскада следует заметить, что при  $n_i=4$  ПРЦ просто невозможен, так как в графе всего два ребра. При  $n_i=5$  граф имеет три ребра, однако очевидно, что не существует вектора  $w_i \in W$ , который приводит к пропаданию ребер с функциями  $x_{j3} \vee x_{j4} \vee x_{j5}$  и  $x_{j1} \vee x_{j2} \vee x_{j3}x_{j4}x_{j5}$  (см. положение 2). Следовательно, ПРЦ и в этом случае невозможен. Утверждение 4 доказано.

**Выводы.** В  $D$ -модели расположение дополнительных ребер в общем случае для блокирования заданного множества векторов  $w_i \in W$  не вызывает трудностей, так как графы имеют всего по четыре ребра. В  $GL$ -модели общего вида это — проблема, решение которой требует немалых усилий [4]. Преимуществом  $D$ -модели является также простота определения связности графа (в первую очередь для моделей небазовых систем).

Число дополнительных ребер, которые необходимо вводить в модель при ее преобразовании в небазовую, может быть различным в разных моделях, причем с преимуществом для одной или другой модели. Однако границы числа дополнительных ребер, которые могут быть проведены в  $D$ -моделях, свидетельствуют в пользу последних.

The model is offered which is a subsequent development of a graph logical models construction idea. These models reflects reaction of a failure-resistance multi-processor system for different multiplicity failure occurrence. Peculiarity of offered model is presence of several graphs on different levels of hierarchy.

1. Романкевич В. А., Потапова Е. Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В. В.  $GL$ -модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых ребер // Вісн. НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та ОТ. — 2006. — № 45. — С. 93—100.
2. Романкевич В. А., Кононова А. А., Бахтари Хедаятоллах. Условия существования попарных реберных циклов в  $GL$ -моделях  $K(3, n)$  // Там же. — 2007. — № 46. — С. 54—61.
3. Yamamoto H., Zuo V. J., Akiba T., Tian Z. Recursive Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems // IEEE Transactions on Reliability. — 2006. — Vol. 55, № 1. — P. 98—104.
4. Романкевич А. М., Иванов В. В., Романкевич В. А. Анализ отказоустойчивых многомодульных систем со сложным распределением отказов на основе циклических  $GL$ -моделей // Электрон. моделирование. — 2004. — 26, № 5. — С. 67—81.

Поступила 14.01.08

*РОМАНКЕВИЧ Виталий Алексеевич, канд. техн. наук, доцент кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета Украины «КПИ», который окончил в 1996 г. Область научных исследований — модели поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем в потоке отказов, расчет надежности таких систем.*

*ПОТАПОВА Екатерина Романовна, канд. техн. наук, ассистент кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета Украины «КПИ», который окончила в 1996 г. Область научных исследований — архитектура компьютерных систем.*

*БАХТАРИ Хедаятоллах — аспирант кафедры специализированных компьютерных систем Национального технического университета Украины «КПИ», который окончил в 2005 г. Область научных исследований — отказоустойчивые многопроцессорные системы, выполнение экспериментов с их моделями.*