



УДК 517.949.8

**С. З. Шихалиев**

Ин-т проблем моделирования в энергетике  
им. Г. Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,  
тел.: (044) 4241063; E-mail: svetlana@ipme.kiev.ua)

### **Результаты апробации $T_{m,n}$ -методов в тепловой численной модели установки для прессовой магнито-дуговой сварки**

Показаны потенциальные возможности  $T_{m,n}$ -методов, как средства решения сложных практических задач типа диффузии. Тестирование проведено на примере расчета температуры в численной нелинейной модели динамического электромагнитно-теплого взаимодействия неподвижной квазинейтральной локально-равновесной плазмы с металлическим трубчатым электродом, представленной осесимметричной начально-краевой задачей для уравнения термодиффузии.

Показано потенційні можливості  $T_{m,n}$ -методів, як способу розв'язування складних практичних задач типу дифузії. Тестування проведено на прикладі розрахунку температури у чисельній нелінійній моделі динамічної електромагнітно-теплової взаємодії нерухомої квазинейтральної локально-рівноважної плазми з металевим трубчастим електродом, яку представлено осесиметричною початково-крайовою задачею для рівняння термодифузії.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* чебышевские методы, начально-краевая задача, термодиффузия, математическая модель.

В работе [1] показано, что процедура минимизации весов чебышевских методов ( $T_{m,n}$ -методов,  $m > n$ ) —  $s$ -оптимизация позволяет существенно повышать их эффективность при решении простейших одномерных начально-краевых задач. Установлено, что число стадий этих методов может существенно превышать  $n \gg 1$ .

Рассмотрим возможности  $T_{m,n}$ -методов при  $m \gg n \gg 1$  как средства решения сложных прикладных задач на примере расчета теплового процесса в плазмозлектродной системе (ПЭС) [2] установки для прессовой магнито-дуговой сварки соосных трубчатых металлических электродов [3, 4]. Поскольку свойства  $T_{m,n}$ -методов, реализующая их версия алгоритма полиномиального ускорения [2, 5] и рассматриваемая задача достаточно подробно изложены в работах [2, 5 — 7], ограничимся краткими сведениями, необходимыми для дальнейшего изложения.

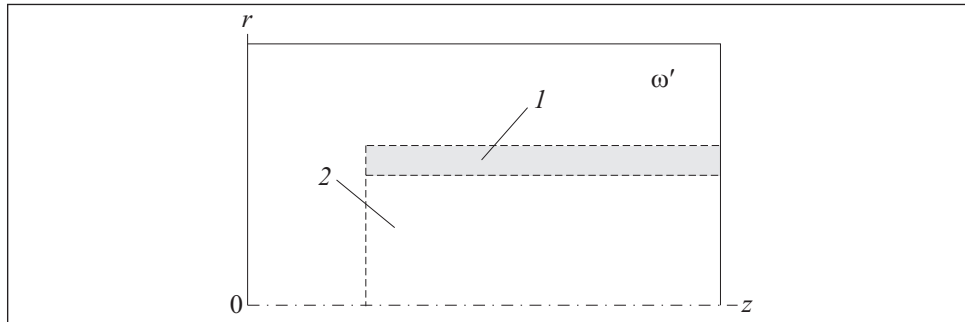


Рис. 1

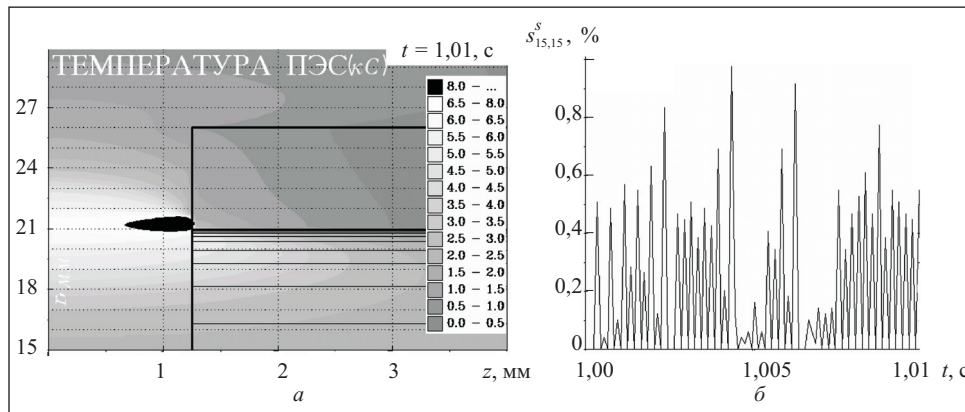


Рис. 2

Математическая модель [2] сформулирована в виде осесимметричной начально-краевой задачи для системы двух параболических уравнений 2-го порядка с самосопряженными эллиптическими операторами, действующими по пространственным переменным  $r$  (радиальной) и  $z$  (аксиальной).

Электромагнитная задача сформулирована относительно тангенциальной компоненты вектора напряженности магнитного поля тока дуги с соответствующими характеру процесса начальными и граничными условиями. Распределения температуры  $\Theta = \Theta(t, r, z)$  получены в результате решения второй начально-краевой задачей с помощью уравнения термодиффузии с начальной температурой  $\Theta^0 = \Theta(t_0, r, z)$ , заданной для момента времени  $t = t_0 = 1$  с. На рис. 1 эти распределения температуры представлены не на всей области задания  $\omega = \mathcal{D}(\Theta)$ , а лишь на ее части  $\omega'$ . Штриховыми линиями на рис. 1 обозначены «следы» контуров границ сечений электрода ( $1$ ), стенки электрода и внутри электродной воздушной полости ( $2$ ).

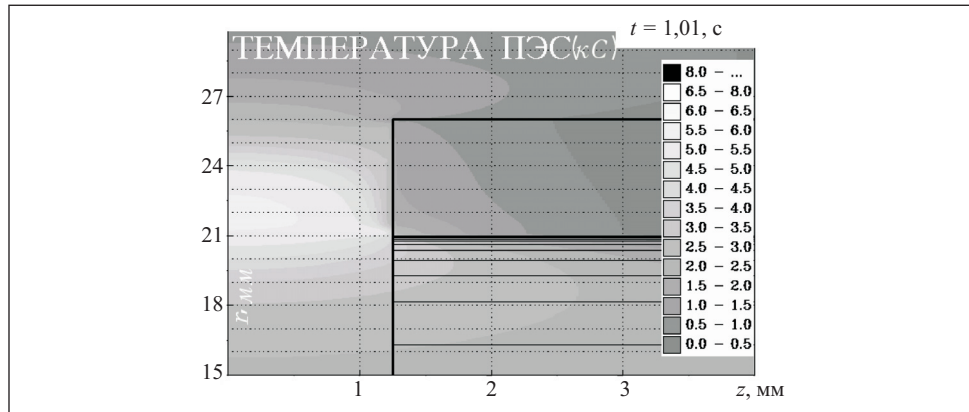


Рис. 3

Исходные уравнения аппроксимированы интегро-интерполяционным методом 1-го порядка точности [8] по всем независимым переменным. Пространственные шаблоны всех методов трехточечные в обоих направлениях. Сетки, содержащие  $(n_r=157) \times (n_z=129)$  ячеек, существенно неравномерны.

Магнитная напряженность рассчитана неявным локально-одномерным методом [8], а температура — явным, а также  $T_{15, 15}$ - и  $T_{230, 15}$ -методами с обращением целых операторов шага методом последовательной верхней релаксации. Явный метод использован в качестве контрольного.

На рис. 2, а показано распределение температуры ПЭС, рассчитанное  $T_{15, 15}$ -методом с шагом интегрирования по времени  $\tau = \tau_{\text{imp}} = 10^{-4}$  с. Наличие черного пятна в области, примыкающей к нижней кромке торца электрода, свидетельствует о превышении расчетной температуры в этой области  $8000^\circ\text{C}$  (8 кС), тогда как в реальном процессе сварки она не может быть столь высокой [9].

Для анализа такого несоответствия результатов расчета реальному процессу сформулирована зависимость от времени  $s^8 = s^8(t)$ , представляющая собой отношение площади черных пятен (в процентах) к общей площади всей области определения  $\omega(s_\omega)$  в численных расчетах температуры ПЭС усредненное по длине интервала наблюдения  $T - t_0$ :

$$s^8(t) = \frac{100}{s_\omega(T-t_0)} \iint_{\omega} \delta(r, z, t) drdz, \quad (1)$$

где

$$\delta(r, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Theta > 8 \text{ кС}; \\ 0, & \text{если } \Theta \leq 8 \text{ кС}. \end{cases}$$

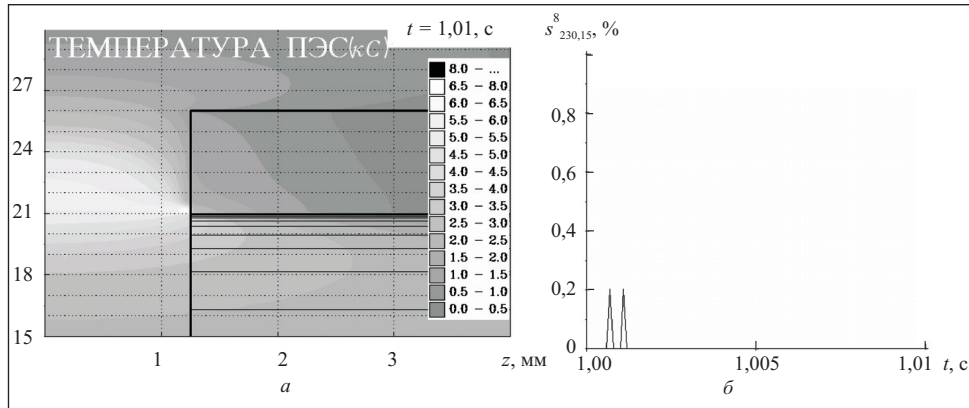


Рис. 4

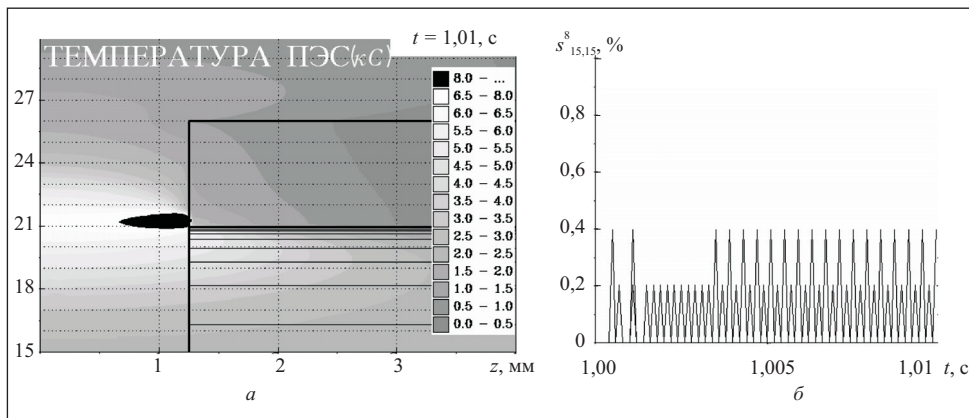


Рис. 5

Из рис 2, б видно, что упомянутый выше деффект  $T_{15, 15}$ -метода проявляется и при других значениях  $t \in (t_0, T = 1,01)$ , отличных от  $t = T$ .

На рис. 3 представлен результат моделирования ПЭС явным методом с шагом  $\tau = t_{\text{exp}} = 10^{-7}$  с, обеспечивающим его устойчивость. Результат расчета подтверждает практическое наблюдение, согласно которому температура дуги в рассматриваемом процессе не превышает 6 кС.

Весьма близок к последнему представленный на рис. 4, а результат расчета температуры  $T_{230, 15}$ -методом с таким же шагом интегрирования, с каким задача решена  $T_{15, 15}$ -методом. Схожесть рис. 3 и 4, а и совпадение почти всегда функции  $s^8(t) \equiv 0$  в явном ( $s^8 \equiv 0$ ) и в  $T_{230, 15}$ -методе (рис. 4, б,  $s^8 = s^8_{230,15}(t)$ ) является подтверждением перспективности применения  $T_{m,n}$ -методов ( $m \gg n \gg 1$ ) для построения моделей сложных практических задач.

Рассмотрим результаты еще двух расчетов. Сравнение  $T_{230, 15}$ - и  $T_{15, 15}$ -методов проведено выше без учета вычислительных затрат на их реализацию. Формально первый из этих методов требует для своей реализации в  $Q \approx 230/15 \approx 15$  раз больше вычислений, чем второй, но фактически это не так. Объясняется это тем, что зависимость объема вычислений от числа стадий  $T_{m,n}$ -методов сложнее линейной, а именно: основной объем вычислений, необходимый для решения задачи этими методами, приходится на реализацию первой стадии, а «элементарные» решения на последующих  $m - 1$  стадиях вычисляются за одну итерацию, так как в итерационных процессах при реализации каждой последующей стадии в качестве нулевого приближения используются решения, полученные на предыдущей стадии.

Следует заметить, что высокая эффективность  $T_{m,n}$ -методов, обнаруженная при решении задачи с помощью уравнения термодиффузии, не может быть в должной мере использована в полной модели ПЭС, поскольку эта модель содержит гидродинамическую компоненту, ограничивающую шаг устойчивого интегрирования по времени значительно меньшими значениями, чем использованный в рассмотренном примере шаг  $\tau = \tau_{230, 15} = 10^{-4}$  с.

Если процессорное время, затраченное на решение тепловой задачи  $T_{230, 15}$ - и  $T_{15, 15}$ -методами с шагом  $\tau = 10^{-4}$  (см. рис. 2 и 4), обозначить соответственно  $t_{230, 15}^{CPU}$  ( $\tau = 10^{-4}$ ) и  $t_{15, 15}^{CPU}$  ( $\tau = 10^{-4}$ ), то можно записать  $t_{230, 15}^{CPU}$  ( $\tau = 10^{-4}$ )  $\approx 6 t_{15, 15}^{CPU}$  ( $\tau = 10^{-4}$ ). Для сравнения затрат времени на решение задачи этими методами проведен расчет при  $\tau_{15, 15}^{CPU} = \tau_{230, 15}^{CPU} / 10$ , результаты которого приведены на рис. 5. Однако согласно полученным результатам делать вывод о предпочтительности  $T_{230, 15}$ -метода пока преждевременно.

$T_{m,n}$ -methods potential possibilities are shown as a way of complex practical problems of diffusion type solution. Testing is done as an example of temperature calculation by numerical non-linear model of dynamic electromagnetic and heat interaction of static quasi-neutral locally-equilibrium plasma with metal tubular electrode. The model is formulated as a axially symmetric initially-boundary problem for thermal diffusion equation.

1. Шихалиев С. З. Чебышевские методы с минимальными весами решения начально-краевых задач для параболических уравнений //Электрон. моделирование. — 2004. — 26, № 3. — С. 15—25.
2. Борукаев З. Х., Евдокимов В. Ф., Шихалиев С. З. Элементы упрощенной численной модели взаимодействия магнитоуправляемой дуги с электродом. — Киев: Энергетика и электрификация, 2005.— 34 с.
3. Гаген Ю. Г., Таран В. Д. Сварка магнитоуправляемой дугой. — М. : Машиностроение, 1970. —160 с.
4. Кучук-Яценко С. И., Кузнецов П. В., Игнатенко, В. Ю. Котерев С. А. Управление дугой, движущейся в узком зазоре под действием магнитного поля при сварке труб // Автоматическая сварка. — 1987. — № 10. — С. 27—31.
5. Хейгман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М. : Мир, 1986. — 448 с.

6. Saff E. D., Shönhage A., Varga R. S. Geometric Convergence to  $e^{-z}$  by Rational Functions with Real Poles // Numerical Mathematics. — 1976. — Vol. 25, № 3. — P. 307—322.
7. Шихалиев С. З. Об использовании чебышевских однополосных аппроксимаций экспоненты в методах решения начально-краевых задач диффузии. — Киев: Энергетика и электрификация, 2005. — 48 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
9. Лесков Г. И. Электрическая сварочная дуга. — М. : Машиностроение, 1970. — 335 с.

Поступила 02.02.07

*ШИХАЛИЕВ Сабир Заурович, науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1967 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — вычислительная физика.*