УДК 519.6

В. С. Годлевский, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел: (044)4247162, E-mail: disit@sivitonline.com)

Метод восстановления входных сигналов линейных динамических систем

Метод восстановления входных сигналов линейных динамических систем с одним входом и одним выходом характеризуют полученные зависимости для одномерных разностных ядер интегральных уравнений Вольтерры в виде суммы экспоненциальных функций. Предложены способы вычисления этих ядер.

Метод відновлення вхідних сигналів лінійних динамічних систем з одним входом і одним виходом характеризують отримані залежності для одновимірних різницевих ядер інтегральних рівнянь Вольтерри у вигляді суми експоненціальних функцій. Запропоновано способи обчислення цих ядер.

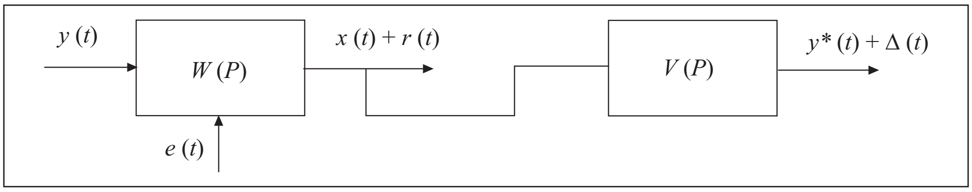
К л ю ч е в ы е   с л о в а: восстановление входных сигналов, линейные динамические системы, передаточная функция, интегральные уравнения Вольтерры, матричная экспонента, устойчивость вычислений.

Применяемый метод восстановления входных сигналов линейных инерционных систем по известным значениям их выходных сигналов основан на использовании обратных передаточных функций систем и известен как метод обратных передаточных функций. Суть его заключается в следующем.

Пусть линейная физическая система (см. рисунок) с одним входным сигналом $y(t)$ (входом) и одним выходным сигналом $x(t)$ (выходом) имеет известную передаточную функцию:

$$W(p)=\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}. \tag{1}$$

На рисунке обозначено: $x(t)$ — составляющая выходного сигнала исходной системы, обусловленная влиянием входного сигнала $y(t)$; $r(t)$ — шумовая составляющая в выходном сигнале, обусловленная внешними источ-



никами (например, электромагнитными полями, вибрациями и др.), а также собственными шумовыми источниками системы (например, температурными шумами элементов, электромагнитными взаимовлияниями блоков и др.); $y^*(t)$ — составляющая выходного сигнала вычислительного устройства, приблизительно равная входному сигналу $y(t)$ и обусловленная влиянием сигнала $x(t)$; $\Delta(t)$ — шумовая составляющая, обусловленная влиянием шумового входного сигнала $r(t)$ и собственным шумом устройства.

Положим, что в (1) $m \geq n$ (что характерно для физических систем), а $b_m = 1$. Сначала рассмотрим случай, когда $a_0 \neq 0$. Поскольку изображение по Лапласу для выходного сигнала системы имеет вид

$$X(p) = W(p)\,Y(p), \tag{2}$$

изображение по Лапласу для входного сигнала можно записать в виде

$$Y(p) = W^{-1}(p)\,X(p).$$

Отсюда видно, что метод обратных передаточных функций восстановления входных сигналов сводится к включению последовательно с исследуемой физической системой вычислительного линейного устройства (аналогового или аналого-цифрового) с передаточной функцией $V(p)$, близкой к функции, обратной (1):

$$V(p) \cong W^{-1}(p). \tag{3}$$

При поступлении выходного сигнала исходной системы на вход этого устройства на его выходе генерируется сигнал, приблизительно равный искомому входному сигналу исходной системы (с масштабным коэффициентом):

$$Y \approx Y^* = V(p)\,X(p).$$

Применение метода обратных передаточных функций приводит к большой зашумленности выходного сигнала вычислительного устройства с передаточной функцией $V(p)$. Это обусловлено тем, что вычислительное устройство содержит блоки, выполняющие операции многократного дифференцирования (в случае, когда значение m в (1) значительно больше значения n). Поэтому шумовой сигнал $r(t)$ существенно усиливается вычислительным устройством вследствие многократного дифференцирования.

Кроме того, дифференцирующие блоки имеют большие собственные погрешности при переменных входных сигналах. В результате шумовая составляющая $\Delta(t)$ выходного сигнала вычислительного устройства обычно существенно превышает по уровню шумовую составляющую $r(t)$ входного сигнала.

Следует заметить, что введение дополнительного фильтрующего блока на входе вычислительного устройства для фильтрации шумового сигнала $r(t)$ не является эффективным решением при переменном полезном сигнале $x(t)$. Это объясняется тем, что все известные в настоящее время линейные частотные фильтры эффективны при постоянных во времени входных сигналах. Однако, выполняя операцию фильтрации шумового сигнала, они одновременно искажают входной полезный сигнал, если он является переменным во времени. Искажают переменные во времени полезные сигналы и медианные фильтры, поскольку они вносят запаздывания. Оценки динамических погрешностей обработки переменных полезных сигналов линейными динамическими системами (фильтрами) приведены в работах [1, 2].

Рассмотрим метод восстановления входных сигналов линейных систем решением интегральных уравнений, при реализации которого отсутствует необходимость применения дифференцирующих блоков или операций дифференцирования. Метод интегральных уравнений обусловливает необходимость перехода от описания физической системы с передаточной функцией (1) в виде одного дифференциального уравнения высокого порядка

$$\sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} \tag{4}$$

с начальными условиями $x^{(i)}(0)=0$ к интегральному уравнению. Известный метод такого перехода (см., например, [3, 4]) имеет ограниченное применение, так как при его использовании требуется, чтобы в (4) n равнялось нулю. Согласно этому методу при $b_m=1$ в (4) интегральное уравнение имеет вид

$$\varphi(t)+\int_0^t \sum_{i=1}^{m} b_{m-1} \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(m-i)!} \varphi(\tau)\, d\tau = y(t), \tag{5}$$

где $\varphi(t)=x^{(m)}(t)$. Отсюда

$$x(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{(m-1)} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Система уравнений (5), (6) дает возможность определять входной сигнал $y(t)$ физической системы по измеренным значениям ее выходного сигнала. Однако разностные степенные ядра в (5), (6) при численном решении этих уравнений порождают существенные сложности обеспечения точности вычислений в случае больших значений m.

Рассмотрим метод сведения дифференциального уравнения (4) при произвольном значении $n \le m$ к интегральному уравнению с разностным ядром в виде суммы экспоненциальных функций. Этот метод основан на использовании многомерных ядер типа матричных экспонент для вспомогательных систем интегральных уравнений.

С целью получения вспомогательной системы интегральных уравнений запишем систему уравнений для исходной физической системы с передаточной функцией (1) в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений, используя данные из работы [5]:

$$X' = AX + Y(t),\quad X(0) = X_0 = 0, \tag{7}$$

$$x(t) = x_1(t) + d_0 y(t), \tag{8}$$

где $X = (x_1, ..., x_m)^T$ — вектор решения системы (7) (вектор вспомогательных переменных); $y(t)$ — входной сигнал системы; $x(t)$ — выходной измеряемый сигнал; $A = (a_{ij})_1^m$ — квадратная матрица Фробениуса с размерностью m; $Y(t) = (d_1 y(t), ..., d_m y(t))^T$. Коэффициенты матрицы A в (7) определяются с помощью коэффициентов b_i в знаменателе (1) при $b_m = 1$:

$$A = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & -1 \\ b_0 & b_1 & . & . & b_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Коэффициенты d_i $(i = 1, ..., m)$ вектора $Y(t)$ и коэффициент d_0 для (8) определяются с помощью коэффициентов числителя и знаменателя функции (1):

$$d_0 = b_m;\quad d_1 = b_{m-1} - a_{m-1} d_0;\ d_2 = b_{m-2} - a_{m-1} d_1 - a_{m-2} d_0, \dots,$$
$$d_n = b_0 - a_{m-1} d_{m-1} - a_{m-2} d_{m-2} - ... - a_0 d_0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что система алгебро-дифференциальных уравнений (7), (8) практически вырождается в систему линейных дифференциальных уравнений, если в (1) степень числителя меньше степени знаменателя.

Известен еще один метод получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) для физической системы, имеющей передаточную функцию (1). Это — метод разложения (1) на элементарные дроби функции (1). Однако он имеет определенные сложности при наличии кратных корней высокого порядка многочлена в знаменателе (1) [5].

Решение (3) на интервале времени наблюдения за системой представим в форме уравнения Коши:

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Y(\tau)\,d\tau, \qquad (11)$$

где $e^{A(t-t_0)}$, $e^{A(t-\tau)}$— матричные экспоненты; t_0 — начало времени наблюдения за системой; $X(t_0)$— начальное значение вектора решения (7).

Систему (11) используем в качестве вспомогательной системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода относительно вектора $Y(t)$ совместно с алгебраическим уравнением (8). Подчеркнем, что при $n=m$ все элементы векторов $X(t_0)$ и $X(t)$ в (7) являются неизвестными величинами, а при $n<m$ для $X(t_0)$ и $X(t)$ известными являются только элементы $x_1(t_0)=x(t_0)$ и $x_1(t)=x(t)$ (так как только $x(t)$ — измеряемая функция, остальные элементы векторов $X(t_0)$ и $X(t)$ являются виртуальными и неизмеряемыми). Чтобы исключить влияние первого слагаемого в (11), выполним восстановление входного сигнала $y(t)$ для достаточно большого значения t:

$$t\ge t_0+\Delta.$$

Здесь Δ — величина, для которой подчиненная норма

$$\left\| e^{A\Delta} \right\| \le \varepsilon, \qquad (12)$$

где ε — малая величина. С учетом (12) приведем (11) к виду

$$X(t)\cong \int_{t_0+\Delta}^{t} e^{A(t-\tau)}Y(\tau)\,d\tau. \qquad (13)$$

С учетом неравенства (12) преобразуем (13) при $t\ge t_0+\Delta$ к виду

$$X(t)\cong \int_{t-\Delta}^{t} e^{A(t-\tau)}Y(\tau)\,d\tau. \qquad (14)$$

Интервал интегрирования в (14) принят максимально большим, что позволяет более полно использовать свойство операции интегрирования в качестве фильтра для подавления влияния шумовых составляющих в выходном сигнале физической системы.

Представим (14) в виде

$$X(t_k) \cong \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_k-\Delta+jh-h}^{t_k-\Delta+jh} e^{A(t_k-\tau)} Y(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Применив в (15) для каждого j-го слагаемого аппроксимацию первого порядка точности, запишем

$$X(t_k) \cong \sum_{j=1}^{k} e^{A(\Delta-jh+h)} Y(t_k-\Delta+jh). \tag{16}$$

Следует заметить, что в (15), (16) $\Delta = kh$ и при $j = k$

$$e^{A(\Delta-jh+h)} = e^{Ah}, \quad Y(t_k-\Delta+jh) = Y(t_k),$$

т. е. при переходе от (13) к (16) для исключения вырожденности матричной экспоненты (потери в ней информации о матрице A) на последнем шаге интегрирования в (16) используются значения матричной экспоненты и вектора $Y(\tau)$ при $j = k$.

В системе (16) будем учитывать только одно уравнение, содержащее элемент $x_1(t_k)$, входящий в уравнение (8) с выходным измеряемым сигналом $x(t)$ физической системы:

$$x_1(t_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} e_{1i}(\Delta-jh+h)\, d_i\, y(t_k-\Delta+jh), \tag{17}$$

где $e_{1i}(\Delta-jh+h)$ — элементы первой строки матричной экспоненты $e^{A(\Delta-jh+h)}$. С учетом (8) перейдем от (17) к уравнению

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{k} e_{1i}(\Delta-jh+h)\, d_i\, y(t_k-\Delta+jh) + d_0 y(t_k)$$

и затем к уравнению

$$x(t_k) = \sum_{j=1}^{k} y(t_k-\Delta+jh)\left[\sum_{i=1}^{m} e_{1i}(\Delta-jh+h)\, d_i\right] + d_0 y(t_k), \tag{18}$$

из которого можно определить искомое значение $y(t_k)$ входного сигнала физической системы при условии, что ранее были определены $y(t_k-\Delta+jh)$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Рассмотрим возможность рекуррентного определения $y(t_k-\Delta+jh)$, начиная с момента времени $t = t_0 + \Delta$. На первом шаге примем в (13) интервал интегрирования минимальным, положив $t = t_0 + \Delta + h$. При этом (15) принимает вид

$$X(t_0 + \Delta + h) \cong \int_{t_0+\Delta}^{t_0+\Delta+h} e^{A(t_0+\Delta+h-\tau)} Y(\tau)\, d\tau,$$

или

$$X(t_0 + \Delta + h) \cong e^{Ah} Y(t_0 + \Delta + h). \tag{19}$$

Из (19) следует уравнение типа (18):

$$x(t_0 + \Delta + h) = y(t_0 + \Delta + h)\left[\sum_{i=1}^{m} e_{1i}(Ah)\, d_i\right] + d_0 y(t_0 + \Delta + h).$$

На втором шаге интервал интегрирования увеличивается в два раза: $(t_0 + \Delta,\ t_0 + \Delta + 2h)$. Система (15) при этом принимает вид

$$X(t_0 + \Delta + 2h) \cong \sum_{j=1}^{k} e^{A(3h - jh)} Y(t_0 + \Delta + jh),$$

а уравнение (18), соответственно, следующий вид:

$$x(t_0 + \Delta + 2h) = \sum_{j=1}^{2} y(t_0 + \Delta + jh)\left[\sum_{i=1}^{m} e_{1i}(\Delta - jh + h)\, d_i\right] + d_0 y(t_0 + \Delta + 2h).$$

Отсюда определяем значение входного сигнала $y(t_0 + \Delta + 2h)$. Последовательно увеличивая интервал интегрирования на каждом шаге, рекуррентно находим значения $y(t_0 + \Delta + ih)$ до k-го измерения, при котором $kh = \Delta$. После этого возможен переход к использованию (18).

Рассмотрим случай, когда (1) имеет вид

$$W(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}\, p, \tag{20}$$

где $b_m = 1$ (как и в (1)), $n \le m-1$. Примерами физических систем, имеющих передаточные функции типа (20), могут быть линейные фильтры, электроизмерительные трансформаторы тока [6], трансформаторы напряжения. Система уравнений (7), (8) для физического объекта с передаточной функцией (20) имеет вид

$$X' = AX + Y'(t),\ X(t_0) = 0,$$

$$x_1(t) = x(t), \tag{21}$$

где матрица A и векторы X, Y определены в (7) — (10). Используя для решения (21) зависимость

$$X(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Y'(\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

можно получить интегральное уравнение Вольтерры первого рода относительно $y(t)$. Однако задача восстановления входного сигнала $y(t)$ непосредственным решением интегральных уравнений вида (22) с последующим интегрированием результата решения относится к условно некорректным задачам вследствие влияния операции дифференцирования при восстановлении $y(t)$.

Для получения уравнения относительно $y(t_k)$, интегрируя по частям (22), переходим к системе интегральных уравнений Вольтерры второго рода:

$$X(t)\cong -A\int_{t_0+\Delta}^{t} e^{A(t-\tau)}Y(\tau)\,d\tau+Y(t). \tag{23}$$

Точно так же от (23) переходим к системе

$$X(t_k)\cong -A\sum_{j=1}^{k}\int_{t_k-\Delta+jh-h}^{t_k-\Delta+jh} e^{A(t_k-\tau)}Y(\tau)\,d\tau+Y(t_k). \tag{24}$$

При аппроксимации интегралов в (24) получаем систему алгебраических уравнений

$$X(t_k)\cong -A\sum_{j=1}^{k}e^{A(\Delta-jh+h)}Y(t_k-\Delta+jh)+Y(t_k),$$

откуда следует интегральное уравнение типа (16) относительно $y(t_k)$.

Рассмотрим способы увеличения точности перехода от системы интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений, т. е. способы уменьшения погрешностей при замене интегралов в системах (15) и (24) конечными суммами. Один из возможных способов заключается в применении частичного аналитического интегрирования в системах (15) и (24). Например для (15) можно записать

$$X(t_k)\cong e^{At_k}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_k-\Delta+jh}^{t_k-\Delta+jh+h} e^{-A\tau}\,Y(\tau)\,d\tau=$$

$$=-A^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}(e^{A(\Delta-jh-h)}-e^{A(\Delta-jh)})\,Y(t_j-\Delta+jh)\,.$$

Отсюда

$$X(t_k) \cong -A^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}(e^{A(\Delta-jh-h)} - e^{A(\Delta-jh)})\,Y(t_j-\Delta+jh). \tag{25}$$

Для вычисления матричных экспонент целесообразно использовать рекуррентную формулу [7]

$$e^{Ajh} = e^{A(j-1)h}e^{Ah}, \quad j=1,\ldots,k. \tag{26}$$

Вычисление базовой матричной экспоненты e^{Ah} в [7] проводится с помощью конечного степенного ряда:

$$e^{Ah} \cong \sum_{i-0}^{r} A^i h^i / i!\,. \tag{27}$$

В некоторых случаях, например в случае жесткой системы уравнений (7), разложение (27) может приводить к неустойчивости вычислений в (26) при больших значениях шага h и в итоге — к недопустимым погрешностям расчетов. Для обеспечения устойчивости вычислений в (26) вместо (27) целесообразно использовать формулу

$$e^{Akh} \cong (E+0{,}5Ah)(E-0{,}5Ah)^{=1}\,. \tag{28}$$

Аппроксимацию (28) можно назвать A-устойчивой формулой для рекуррентного вычисления (26), поскольку она соответствует неявному методу трапеций решения систем однородных дифференциальных уравнений

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0.$$

Точность аппроксимации (28) определяется главным членом погрешности $\eta(h) = A^3h^3/24$.

В случае, когда используемый цифровой контроллер имеет достаточно большой объем оперативной памяти, целесообразно применять иной способ вычисления матричной экспоненты, суть которого состоит в следующем.

Каждый w-й столбец матричной экспоненты e^{At} можно представить в виде решения системы однородных уравнений

$$X'_w = AX_w \tag{29}$$

с вектором начальных условий

$$X_w(0) = (x_{w1}(0),\ \ldots,\ x_{wm}(0))^T, \tag{30}$$

все элементы которого $x_{wj(0)} = 0$ при $j \neq w$ и $x_{ww}(0) = 1$. Все столбцы матричной экспоненты для (16) и (25) на интервале времени $(0,\Delta)$ можно предварительно вычислить последовательным решением системы (29) с вектором начальных значений (30) при $w = 1, \dots, m$. Вычисленная таким способом матричная экспонента сохраняется в трехмерном массиве, который используется при решении интегральных уравнений типа (18), (24).

Положительным свойством изложенного метода восстановления входных сигналов линейных динамических систем с одним входом и одним выходом является его естественное обобщение на многосвязные динамические системы со многими входными сигналами. Ограничением при этом является условие, состоящее в том, что число определяемых входных сигналов должно быть не больше числа измеряемых выходных сигналов.

The method for restoring the input signals of the linear dynamic systems with one input and one output are characterized by the dependences obtained for one-dimensional difference kernels of the Volterra integral equations in a form of a sum of exponential functions. The methods for calculating those kernels are proposed.

1. *Годлевский В. С.* Об оценке динамических погрешностей линейных блоков АВМ // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 3. — С. 155—161.
2. *Годлевский В. С.* К вычислению и оценке динамических погрешностей линейных многосвязных следящих систем // Изв. вузов. Электромеханика. — 1977. — № 3. — С. 322—337.
3. *Голубенцев А. Н.* Интегральные методы в динамике. — Киев : Техніка, 1967. — 350 с.
4. *Краснов М. П.* Интегральные уравнения. — М. : Наука, 1975. — 301 с.
5. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. — М. : Наука, 1970. — 620 с.
6. *Стогний Б. С., Годлевский В. С., Демин А. Е., Кириленко А. В.* Структурные методы восстановления входного сигнала электроизмерительного преобразователя тока // Техническая электродинамика. — 1985. — № 1, — С.
7. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий Н. Г.* Численные методы решения жестких систем. — М. : Наука, 1979. — 281 с.

Поступила 19.02.09

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, директор МП «ДИСИТ» НАН Украины. В 1966 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория точности и диагностика технических систем.