



УДК 517.95+518.517+519.685

К. В. Максименко-Шейко, канд. физ.-мат. наук,

Т. И. Шейко, д-р техн. наук

Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

(Украина, 61046, Харьков, ул. Дм.Пожарского, 2/10,

тел. (0572)94-27-74, E-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua),

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

(61077, Харьков, пл. Свободы, 4),

Р. А. Уваров, канд. физ.-мат. наук

Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

(Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10,

тел. (0572)94-27-74, E-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua)

Математическое и компьютерное моделирование тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры методом R -функций

(Статью представил д-р техн. наук В. Я. Кондращенко)

Рассмотрены вопросы автоматизации решения задач расчета температурных полей плат с локальными источниками теплоты на их поверхностях методом R -функций. Приведены структуры решений для различных типов граничных условий. При решении использован метод Ритца. Примеры численной реализации выполнены в системе ПОЛЕ. Исследовано влияние расположения симметричных и несимметричных источников на распределение температурного поля.

Розглянуто питання автоматизації розв'язання задач розрахунку температурних полів плат з локальними джерелами теплоти на їхніх поверхнях методом R -функцій. Наведено структури розв'язків для різних типів граничних умов. При розв'язанні використано метод Ритца. Приклади чисельної реалізації виконано в системі ПОЛЕ. Досліджено вплив розташування симетричних і несиметричних джерел на розподіл температурного поля.

Ключевые слова: метод R -функций, структура решения, метод Ритца, радиоэлектронная аппаратура.

Нормальное функционирование радиоэлектронной аппаратуры возможно лишь при условии поддержания температур ее элементов в определенных пределах. Изменение теплового режима оказывает влияние на характеристики элементов и может привести к возникновению физико-химических процессов, выводящих элемент из строя. При этом дестабилизирующими тепловыми воздействиями являются рассеиваемые при работе элементов мощности, изменение температуры внешней среды и тепловые

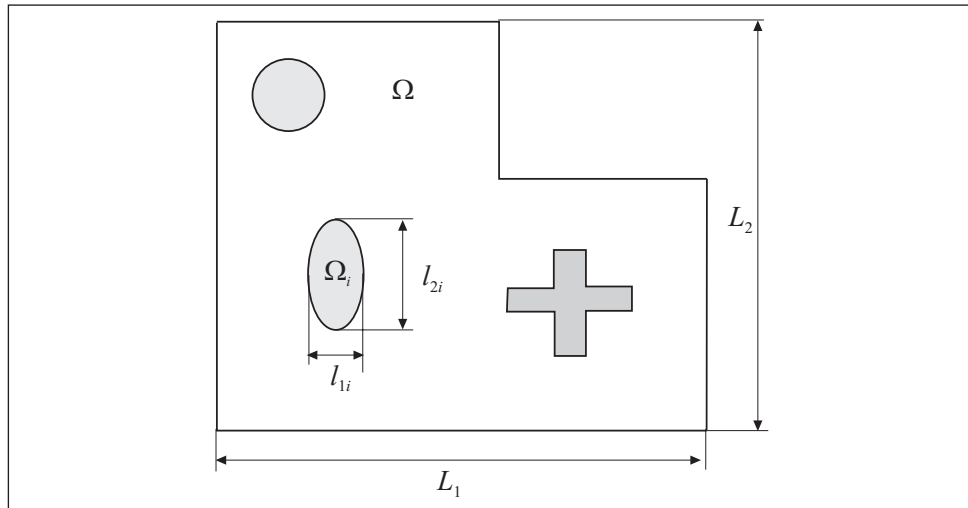


Рис. 1. Плата с источниками

потоки от окружающих прибор объектов. Поэтому на этапе конструкторского проектирования радиоэлектронной аппаратуры при выборе вариантов конструкции и компоновки наряду с задачами обеспечения монтажно-коммутационных требований, помехоустойчивости, технологичности, вибропрочности необходимо решать задачи обеспечения нормального теплового режима.

При анализе тепловых режимов радиоэлектронных аппаратов различных классов основная трудность связана с построением тепловой модели аппарата, которая должна быть физически адекватной явлению и в то же время реализуемой математически. При построении модели прежде всего следует сделать такие упрощающие предположения, которые позволят решить задачу, не идеализируя ее настолько, чтобы она потеряла отношение к описываемой системе. Кроме того, разрабатываемые методы расчета должны быть справедливы для широкого класса конструкций [1, 2].

Математическое и компьютерное моделирование температурных полей платы. На тонкой плате Ω с характерными размерами L_1 , L_2 и толщиной δ расположены области Ω_i с характерными размерами l_{1i} , l_{2i} (рис. 1). Источники тепла равномерно распределены по областям Ω_i , тепловые потоки P_i рассеиваются в окружающую среду не только кондукцией через границы областей, но и конвекцией и излучением с поверхности. Рассеянием тепла с торцов можно пренебречь по сравнению с рассеянием тепла с остальной поверхности платы. Коэффициент теплопроводности платы обозначим λ , а суммарную теплоотдачу с различных

поверхностей платы — α и α_i . Найдем стационарное температурное поле платы.

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - b^2 T = -\rho(x, y);$$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{P_i}{4l_{1i}l_{2i}\delta\lambda}, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i\right), \end{cases}$$

где $T = \tilde{T} - T_{\text{ср}}$; $b^2 = \frac{\alpha + \alpha_i}{\lambda\delta}$. Пусть $\omega(x, y) = 0$ — уравнение границы области Ω , а $\omega_i(x, y) = 0$ — уравнения границ областей Ω_i [3]. Тогда правую часть уравнения теплопроводности можно записать в виде

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{1 + \text{sign}\omega_i}{2} \cdot \frac{P_i}{4l_{1i}l_{2i}\delta\lambda_i}.$$

В безразмерном виде решение можно представить, используя критерии

$$u = T\lambda\delta P^{-1}, \quad Bi = \frac{\alpha L^2}{\lambda\delta}.$$

Граничные условия (или их комбинации) на границах платы могут быть следующими:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{\partial\Omega} = \xi.$$

Решим задачу методом Ритца, который является наиболее применяемым. При этом вместо краевой задачи используется задача о минимуме некоторого функционала $I(u)$. Поле, соответствующее уравнению $Au = f$, сообщает минимум функционалу

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \|u\|_A^2 - 2(u, f).$$

Величина (Au, u) обычно пропорциональна энергии, необходимой для возбуждения поля $u(x)$.

Если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, то структура решения имеет вид $u = \varphi + \omega\Phi$ [3], а функционал —

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u_1)^2 + b^2 u_1^2) d\Omega + 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 * \nabla u_0 + b^2 u_1 * u_0 - \rho * u_1) d\Omega,$$

где $u_1 = \omega\Phi$, $u_0 = \varphi$.

Если $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = \psi$, то структура решения имеет вид $u_1 = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \omega \Phi_2)$, а функционал —

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u_1)^2 + b^2 u_1^2) d\Omega + 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 * \nabla u_0 + b^2 u_1 * u_0 - \rho * u_1) d\Omega - 2 \int_{\partial \Omega} u_1 \psi \partial s,$$

где $u_1 = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \omega \Phi_2)$, $u_0 = -\omega \psi$.

Если

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right|_{\partial \Omega} = \xi,$$

то структура решения имеет вид $u = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \xi + h \Phi_1 - \omega \Phi_2)$, а функционал —

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u_1)^2 + b^2 u_1^2) d\Omega + \int_{\partial \Omega} h(u_1)^2 \partial s + 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 * \nabla u_0 + b^2 u_1 * u_0 - \rho * u_1) d\Omega - 2 \int_{\partial \Omega} u_1 (\xi - hu_0) \partial s,$$

где $u_1 = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 + h \Phi_1 - \omega \Phi_2)$, $u_0 = -\omega \xi$.

Если

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \right|_{\partial \Omega_2} = \varphi_2,$$

то структуру решения можно представить либо в виде

$$u = \frac{(\varphi_1 + \omega_1 \Phi_1) \omega_2^2 + (\Phi_2 + \omega_2 (-D_1^{(2)} \Phi_2 - \varphi_2 + h \Phi_2 - \omega_2 \Phi_{22})) \omega_1}{\omega_1 + \omega_2^2}$$

либо в виде

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}(\varphi_1) + h(\omega_1 \Phi_1 + \varphi_1)] + \varphi_1.$$

Следует заметить, что при $h=0$ получаем структуру для задачи смешанного типа

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega_2} = \varphi_2.$$

Если

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_2 u \right|_{\partial \Omega_2} = \varphi_2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_3 u \right|_{\partial \Omega_3} = \varphi_3,$$

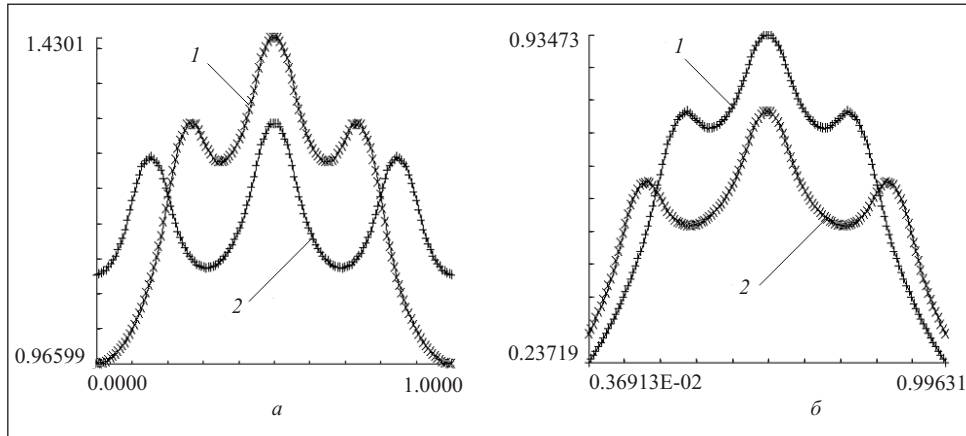


Рис. 3. Графики температурных полей в сечении $y=0$ для исходных (1) и перемещенных (2) источников тепла: а — при тепловой изоляции границы платы; б — при теплообмене на границе платы

то, применяя формулу склейки, можем записать

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3} = \tilde{\varphi}_2,$$

где

$$h = \frac{h_2\omega_3 + h_3\omega_2}{\omega_2 + \omega_3}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{\varphi_2\omega_3 + \varphi_3\omega_2}{\omega_2 + \omega_3}.$$

Функционал для задачи смешанного типа имеет вид

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u)^2 + b^2 u^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} h(u)^2 ds + \\ + 2 \int_{\Omega} (\nabla u^* \nabla u_0 + b^2 u^* u_0 - \rho^* u_1) d\Omega - 2 \int_{\partial\Omega_2} u_1 (\varphi_2 - hu_0) ds,$$

где

$$u_1 = \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - \\ - D_1^{(2)}(\varphi_1) + h(\omega_1 \Phi_1 + \varphi_1)] + \varphi_1, \\ u_0 = \varphi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - D_1^{(2)}(\varphi_1) + h\varphi_1].$$

Рассмотрим несколько примеров, численная реализация которых выполнена в системе ПОЛЕ.

Пример 1 [4].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = -F,$$

$$F = \begin{cases} 100, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i \right), \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Анализируя полученные решения (рис. 2 (см. вклейку) и рис. 3, а), можно сделать вывод о том, что в случае тепловой изоляции границы платы, при перемещении четырех боковых источников ближе к соответствующим краям платы, снижается максимальная температура на 8,5 % и обеспечивается более равномерный нагрев платы.

Пример 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = -F,$$

$$F = \begin{cases} 100, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i \right), \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + 5u \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Анализируя полученные решения (рис. 4 (см. вклейку) и рис. 3, б) при теплообмене на границе платы, можно сделать вывод о том, что перемещение четырех боковых источников ближе к соответствующим краям платы позволяет снизить максимальную температуру на 17,5 %.

Пример 3 [5].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = -F,$$

$$F = \begin{cases} 5000, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^{46} \Omega_i \right), \end{cases} \quad u|_{\partial\Omega_1} = 5, \quad u|_{\partial\Omega_2} = 20.$$

На рис. 5, а (см. вклейку) и рис. 8, а, приведены результаты решения для 46 квадратных источников, размещенных по схеме, приведенной в работе [5]. Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование сплайн-аппроксимации более эффективно.

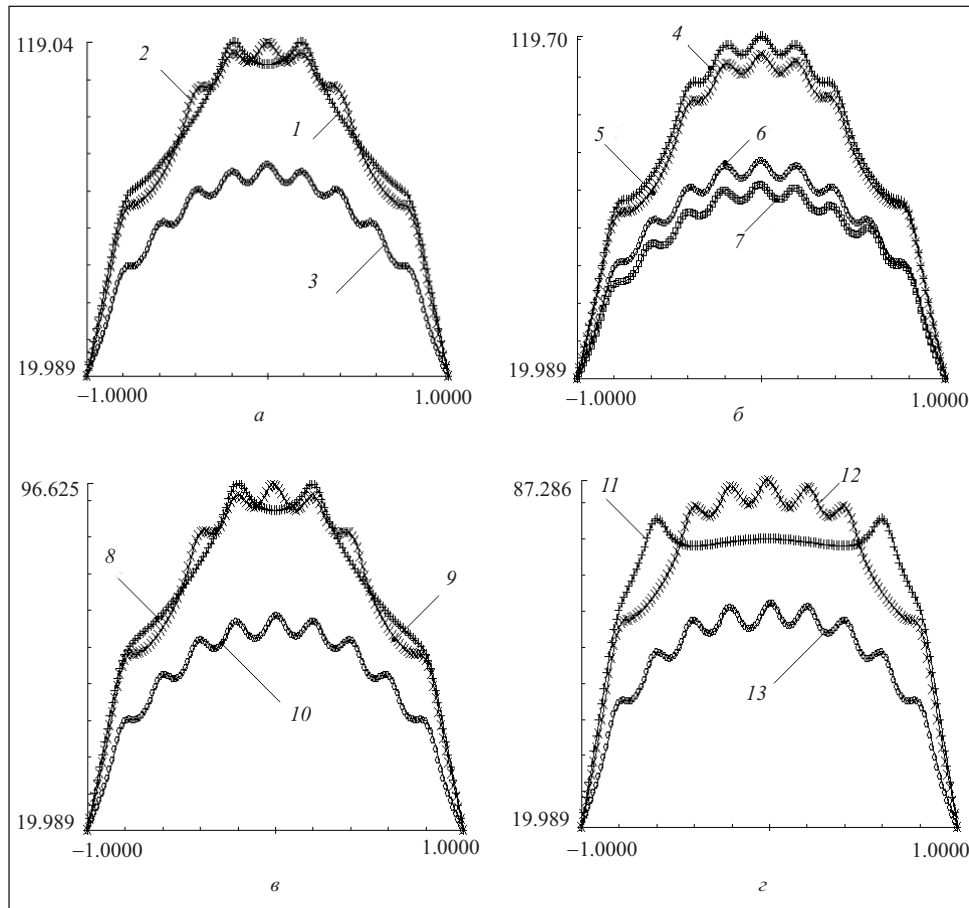


Рис. 8. Графики температурного поля в сечениях при условиях: *a* — рис. 5, *a* на вклейке; *б* — рис. 5, *б* на вклейке; *в* — рис. 6 на вклейке; *г* — рис. 7 на вклейке; 1, 8, 11 — $y=0,35$; 2, 4, 9, 12 — $y=0,6$; 3, 6, 10, 13 — $y=0,8$; 5 — $y=-0,6$; 7 — $y=-0,8$

Рассмотрим случай, когда источники тепла имеют форму квадрата с круговой выточкой и расположены, как показано на рис. 5, б (см. вклейку). При этом

$$\omega_i = (0,05^2 - (x - a_i)^2) \wedge_0 (0,05^2 - (y - b_i)^2) \wedge_0 ((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - 0,05^2) \geq 0.$$

Анализируя полученные решения (см. рис. 5, б и рис. 8, б), можно сделать выводы о необходимости переориентации источников, расположенных в верхней полуплоскости, так как температура в нижней полуплоскости меньше (рис. 8, б, кривые 5 и 7).

Исходя из предыдущих результатов, свидетельствующих о том, что источники необходимо располагать ближе к границе и для равномерности

распределения поля всегда желательна симметрия, рассмотрим случай, представленный на рис. 6 (см. вклейку). Результаты, представленные на рис. 6 и 8, в, показывают, что переориентация источников позволила снизить температуру на 20 %. Однако картина поля позволяет предположить, что перемещение четырех центральных источников в зону с меньшей температурой (рис. 7 на вклейке) даст возможность уменьшить ее максимальное значение.

Результаты, представленные на рис. 7 (см. вклейку) и рис. 8, з, свидетельствуют о том, что дополнительное изменение положения четырех источников позволило снизить температуру еще на 9 %.

Во всех примерах неопределенные компоненты структур решений аппроксимированы финитными кубическими сплайнами Шенберга. Размерность аппроксимационного пространства в примерах 1 и 2 $N = 1600$, а в примере 3 $N = 6400$ координатных функций.

Автоматизацию процесса задания размещения источников можно реализовать в специализированной системе AutoOmega. Эта система, интегрированная со специализированной системой ПОЛЕ, позволяет пользователю строить геометрические объекты неклассической формы в двухмерном пространстве с использованием теории R -функций и метода стандартных примитивов [6], оперативно изменять их положение и ориентацию, а также транслировать геометрическую информацию в программный код. Система AutoOmega имеет также встроенный конвертор геометрической информации, используемой самой системой, в программный код специализированных систем, позволяющих решать краевые задачи.

Первым этапом работы с системой является визуальное формирование платы с расположенными на ней источниками тепла. Для этого реализован интуитивный графический интерфейс, который позволяет создавать примитивы классической и неклассической формы, располагать их на плате, заданной формы. Интерфейс позволяет задавать и изменять параметры геометрических объектов и интенсивности источников. Шкала координатной системы, в которой будет решаться краевая задача, и начало координат, могут быть уточнены или изменены пользователем.

После этапа формирования поставленной задачи выполняется трансляция заданной информации в программу для системы ПОЛЕ, с помощью которой пользователь получает решение. Если решение не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к распределению температурного поля на плате есть возможность вернуться к формированию исходной задачи, изменяя доступные параметры. Такой цикл продолжается до тех пор, пока пользователь не получит удовлетворяющее его решение.

Выводы. Рациональное размещение источников тепловых полей, имеющих заданные геометрические и физические параметры, является

важным фактором при проектировании радиоэлектронной аппаратуры. Автоматизировать процесс решения задач расчета плат с локальными источниками теплоты на их поверхностях методом R -функций позволяет система ПОЛЕ. Однако, как видно из приведенных примеров, при большом числе источников на плате необходимо автоматизировать процесс их задания для оперативного изменения положения и ориентации, что позволяет реализовать система AutoOmega.

The paper deals with automation of solution of the problems of temperature fields calculation of the boards with local heat sources on their surface4s by the method of R -functions. The structures of solutions for various types of boundary conditions are presented. The Ritz method is used for the solution. The examples of numerical realization are executed in POLYE (FIELD) system. The influence of the arrangement of symmetric and asymmetric sources on the temperature field distribution is investigated.

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Методы расчета теплового режима приборов. — М. : Радио и связь. — 1990. — 312 с.
2. Дульнев Г. Н., Семьякин Э. М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. — Ленинград : Энергия. — 1968. — 360 с.
3. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. — К. : Наук. думка. — 1982. — 552 с.
4. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — К. : Наук. думка. — 1976. — 288 с.
5. Стоян Ю. Г., Путятин В. П. Размещение источников физических полей. — К. : Наук. думка. — 1981. — 184 с.
6. Максименко-Шейко К. В., Мацевитый А. М., Шейко Т. И. Автоматизация построения уравнений объектов в методе R -функций. // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 148—157.

Поступила 10.03.09

МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО Кирилл Владимирович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, доцент Харьковского национального университета им. А.Н. Каразина, который окончил в 2001 г. Область научных исследований — математическое моделирование, теория R -функций.

ШЕЙКО Татьяна Ивановна, д-р техн. наук, профессор, зав. отделом прикладной математики и вычислительных методов Ин-та проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. В 1969 г. окончила Харьковский госуниверситет. Область научных исследований — краевые задачи математической физики, математическое и компьютерное моделирование, метод R -функций.

УВАРОВ Роман Александрович, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Ин-та проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. В 1999 г. окончил Харьковский национальный университет радиозлектроники. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование, автоматизация научных исследований, метод R -функций.