УДК 517.97:519.876

С. З. Кулиев, канд. физ.-мат. наук
Ин-т кибернетики НАН Азербайджана
(Азербайджан, AZ1141, Баку, ул.Ф.Агаева, 9,
тел. (99412) 5100523, E-mail: azcopal@gmail.com)

О совмещении этапов параметрической идентификации и оптимизации динамических процессов

(Статью представил д-р техн. наук С. Е. Саух)

Предложен метод совместного решения задач параметрической идентификации параметров математической модели и поиска оптимального режима динамического объекта. Получено субоптимальное решение задачи управления динамическим объектом в окрестности оптимального режима. Приведены расчетные формулы и алгоритм для реализации предложенного подхода, а также результаты компьютерных экспериментов.

Запропоновано метод сумісного розв'язання задач параметричної ідентифікації параметрів математичної моделі та пошуку оптимального режиму динамічного об'єкту. Отримано субоптимальний розв'язок задачі управління динамічним об'єктом в óколі оптимального режиму. Наведено чисельні формули і алгоритми для реалізації запропонованого підходу, а також результати комп'ютерних експериментів.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: динамический объект, параметрическая идентификация, оптимальное управление, математическое моделирование.

Постановка задачи. Пусть текущее состояние $x(t) \in R^n$ управляемого технологического процесса или динамического объекта определяется начальным состоянием $x_0 \in R^n$, вектором нерегулируемых параметров $v \in R^m$ с заданными в начале процесса значениями и вектором регулируемых (управляющих) параметров $u \in R^r$, значения которых назначаются на весь период процесса $t \in [0, T]$ при условии минимизации заданного функционала, определяющего критерий оптимальности регулирования процессов.

Предположим, что процесс описывается начальной задачей относительно некоторой автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), u, v, p), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \in X_0. \tag{2}$$

Здесь X_0 — множество возможных начальных состояний процесса; $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t; \tilde{x}_0, u, v)$ — функция, определяющая процесс при заданных начальных условиях $\tilde{x}_0$ и определенных в начале его протекания значениях нерегулируемых параметров $v \in V \subseteq R^m$ и назначенных (выбранных) значениях регулируемых параметров $u \in U \subseteq R^r$; $p \in P \subset R^l$ — вектор параметров математической модели; U — множество допустимых значений управляющих параметров; V — множество возможных значений нерегулируемых параметров; P — множество допустимых значений параметров математической модели процесса.

Пусть функционал

$$J(u; \tilde{x}_0, v, p) = \int_0^T \tilde{f}^0(\tilde{x}(t), u, v)\, dt + \Phi(\tilde{x}(T), u, v) \to \min_{u \in U} \tag{3}$$

определяет качество выбранных значений вектора управляющих параметров u в зависимости от заданных начального состояния $\tilde{x}_0$ и значений вектора нерегулируемых параметров v. Здесь $\tilde{f}^0$, Φ — заданные непрерывно-дифференцируемые по первым двум аргументам функции.

При проектировании и разработке систем управления реальными технологическими процессами и техническими объектами вектор-функция $\tilde{f}$, определяющая динамику процесса, как правило, не задана или задан только класс функций с точностью до параметров, требующих оценки значений. Проблема построения функции $\tilde{f}$ относится к этапу математического моделирования и для его проведения необходимо наличие результатов наблюдений за процессом. Этот этап состоит из двух подэтапов. На первом подэтапе, называемым структурной идентификацией, определяется класс функций, зависящий от параметров $p \in R^l$, значения которого определяются на втором подэтапе — параметрической идентификации [1].

Будем предполагать, что первый подэтап моделирования процесса — задача структурной идентификации — решена, например, за счет какой-либо априорной качественной информации о характере процесса, т. е. процесс вместо (1) описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, v, p), \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

где f — заданная с точностью до параметров p n-мерная непрерывно-дифференцируемая по своим аргументам вектор-функция, которая чаще всего отличается от реально описывающей процесс функции $\tilde{f}$; p — вектор параметров математической модели процесса, значения которого требуется определить на подэтапе параметрической идентификации.

Для параметрической идентификации необходимо проводить наблюдения за состоянием технологического процесса, которые могут иметь различный характер [2]. Например, при заданных значениях нерегулируемых и регулируемых параметров $v^i \in V$ и $u^i \in U$ наблюдения за состоянием процесса могут проводиться в заданные моменты времени $t_{ij} \in [0, T]$,

$$\hat{x}_j^i = \hat{x}^i(t_{ij}; u^i, v^i),\ t_{ij} \in [0, T],\ j = 0, 1, ..., M_i,\ i = 1, 2, ..., N, \tag{5}$$

или только в начальный и конечный моменты времени $t_{i0} = 0,\ t_{iM_i} = T$:

$$\hat{x}_0^i = \hat{x}^i(0; u^i, v^i),\ \ \hat{x}_T^i = \hat{x}^i(T; u^i, v^i),\ \ i = 1, 2, ..., N, \tag{6}$$

где N — число проведенных наблюдений за отдельно протекающими процессами; M_i — число наблюдений за состоянием при каждом протекании процесса, и для каждого из них задан положительный весовой коэффициент γ_j, $j = 1, 2, ..., N$, значения которого определяются степенью достоверности и точностью результатов проведенных наблюдений, причем, как правило, $\gamma_j \in [0, 1]$, $j = 1, 2, ..., N$.

Наблюдения могут происходить в заданных интервалах времени:

$$\hat{x}_j^i = \hat{x}^i(t; u^i, v^i),\ t \in \lfloor t_{ij-1}, t_{ij} \rfloor,\ j = 0, 1, ..., M_i,\ i = 1, 2, ..., N, \tag{7}$$

где $\lfloor t_{ij-1}, t_{ij} \rfloor \subset [0, T]$ — заданные интервалы; M_i — число наблюдаемых интервалов при каждом наблюдении.

Задача определения параметров модели p (задача параметрической идентификации) с применением, например, критерия наименьших квадратов в зависимости от вида наблюдения приводит к минимизации функционала [3]

$$S_1(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \gamma_i \left\| x^i(t_{ij}; u^i, v^i, p) - \hat{x}_j^i \right\|_{R^n}^2 + \varepsilon \| p \|_{R^l}^2 \tag{8}$$

в случае наблюдений вида (5), а для наблюдений вида (6) функционал (8) принимает следующий вид:

$$S_2(p) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left\| x^i(T; u^i, v^i, p) - \hat{x}_T^i \right\|_{R^n}^2 + \varepsilon \| p \|_{R^l}^2. \tag{9}$$

Для наблюдений вида (7) минимизируется функционал

$$S_3(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \gamma_i \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} \left\| x^i(t; u^i, v^i, p) - \hat{x}_j^i(t) \right\|_{R^n}^2 dt + \varepsilon \| p \|_{R^l}^2, \tag{10}$$

где $x^i(t; u^i, v^i, p)$ — решение системы дифференциальных уравнений (4) при начальных условиях

$$x^i(0; u^i, v^i, p) = \hat{x}_0^i \tag{11}$$

(т.е. при $t_{i0} = 0$) и при заданных значениях параметров u^i, v^i, p; ε — параметр регуляризации минимизируемого функционала [4].

Таким образом, проблема создания математического обеспечения управления исследуемым технологическим процессом состоит из двух подэтапов. На первом решается задача (4), (11) минимизации одного из функционалов (8), (9) или (10) и параметрической идентификации математической модели процесса с использованием соответствующих наблюдений (6) или (7), а на втором — задача (3), (4) для выбора оптимального режима процесса $\bar{u} = \bar{u}(t; \bar{x}_0, \bar{v}) = \text{const}$ при заданных значениях начального состояния $\bar{x}_0$ и значениях вектора неуправляемых параметров $\bar{v}$.

Численное решение задач параметрической идентификации и управления. Ясно, что постановки задач параметрической идентификации (4) — (10) и оптимального управления (3), (4) относятся к одному классу задач параметрического оптимального управления и для их решения можно использовать любой известный подход, в частности применение методов оптимизации первого порядка. Например, в случае простой структуры допустимых областей параметров P и U (многомерный параллелепипед, шар и др.) можно использовать метод проекции градиента [5, 6].

Для решения задачи параметрической идентификации (4) — (10) итерационный процесс строим с помощью следующих формул:

$$p^{k+1} = \mathrm{Pr}_p(p^k - \alpha_k \operatorname{grad} S(p^k)), \; k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

$$\operatorname{grad} S(p) = 2\varepsilon p^k - \sum_{v=1}^{N} \int_0^T \frac{\partial f(x^v(t), u^v, v^v, p)}{\partial p} \psi^v(t)\, dt, \tag{13}$$

где Pr_p — оператор проектирования на допустимую область P, имеющий несложный вид для области простой структуры. Здесь $x^v(t) = x^v(t; \hat{x}_0^v, u^v, v^v)$ — решение начальной задачи (4), (6); α_k — шаг одномерной минимизации; $\psi^v(t)$ — решение сопряженной задачи, вид которой зависит от проведенных наблюдений и функционала. Например для наблюдений (5), (6) и функционала (8)

$$\dot{\psi}^v(t) = -\left(\frac{\partial f(x^v(t), u^v, v^v, p)}{\partial x}\right)^T \psi^v(t) +$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2009. V. 31. № 4

$$+2\gamma_\nu \sum_{j=1}^{M_\nu} [x^\nu(t;\, u^\nu,\, v^\nu,\, p) - \hat{x}_j^\nu]\,\delta(t - t_{\nu j}),\;\; t \in (0, T], \tag{14}$$

$$\psi^\nu(T) = 0,\;\; \nu = 1, 2, \ldots, N, \tag{15}$$

где $\delta(t - t_{\nu j})$ — обобщенная функция Дирака; T — знак транспонирования матрицы. Для наблюдений типа (7) и функционала (10) сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}^\nu(t) = -\left(\frac{\partial f\;(x^\nu(t),\, u^\nu,\, v^\nu,\, p)}{\partial x} \right)^T \psi^\nu(t) +$$

$$+\,2 \sum_{i=1}^{N} \chi_i^\nu(t)\,[x^\nu(t;\, u^\nu,\, v^\nu,\, p) - \hat{x}^\nu(t)],\;\; t \in (0, T], \tag{16}$$

где функция типа Хэвисайда $\chi_j^\nu(t)$ в данном случае определена так:

$$\chi_j^\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \notin \bigcup\limits_{j=1}^{N} [t_{\nu j-1},\, t_{\nu j}] \bigcap [t, T], \\ 1, & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} [t_{\nu j-1},\, t_{\nu j}] \bigcap [t, T]. \end{cases} \tag{17}$$

Приведенные формулы несложно получить, используя метод вариаций оптимизируемых параметров или соответствующие известные формулы [5— 7], учитывая, что задачи (4) — (10) являются частным случаем общей постановки задачи оптимального управления.

После решения задачи параметрической идентификации и определения параметров p с заданной точностью, а следовательно, построения математической модели процесса для решения задачи оптимального управления при заданных начальном условии $\bar{x}_0$ и значении нерегулируемого параметра $\bar{v}$ можно использовать методы оптимизации первого порядка [5, 6]:

$$u^{k+1} = \mathrm{Pr}_u(u^k - \alpha_k\, \mathrm{grad}\, J(u^k)),\;\; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$\mathrm{grad}\, J(u^k) = \int_0^T \left[-\frac{\partial f^{\,0}(x^k(t), u^k, v^k, p)}{\partial u} + \frac{\partial f\;(x^k(t),\, u^k,\, v^k,\, p)}{\partial u}\, \xi^k(t) \right] dt +$$

$$+\,\frac{\partial \Phi\,(x^k(T), u^k, \bar{v})}{\partial u}. \tag{19}$$

Здесь Pr_u — оператор проектирования на допустимую область U; $x^k(t) = = x^k(t; \bar{x}_0, u^k, \bar{v})$ — решение начальной задачи относительно (4); α_k — шаг по направлению антиградиента функционала в пространстве управляющих параметров $u \in R^r$; $\xi^k(t) = \xi(t; \bar{x}_0, u^k, \bar{v})$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\dot{\xi}^k(t) = \frac{\partial f^0(x^k(t), u^k, \bar{v}, p)}{\partial x} - \left(\frac{\partial f(x^k(t), u^k, \bar{v}, p)}{\partial x} \right)^T \xi^k(t), \ \ t \in (0, T], \quad (20)$$

$$\xi^k(T) = -\frac{\partial \Phi(x^k(T), u^k, \bar{v})}{\partial x}. \quad (21)$$

Недостаток описанного двухэтапного подхода к принятию решения по управлению процессом, в котором на первом этапе строится математическая модель с использованием всех имеющихся наблюдений, заключается в следующем. Правые части дифференциальных уравнений (1), описывающих рассматриваемый процесс, как правило, точно не известны, и при математическом моделировании процесса, т. е. при выборе функции f в (4), используются в первую очередь упрощенные (линейные, квадратичные) функции. Поэтому после параметрической идентификации математической модели расчетные значения траектории не будут совпадать с реальной траекторией. Чем больше разброс наблюдаемых допустимых значений начальных условий $\hat{x}_0^j$, управляющих параметров u^j и нерегулируемых параметров v^j, тем больше будут отличаться расчетные значения математической модели процесса от реальной траектории.

В развитие результатов, полученных в работах [8, 9] относительно статических объектов, предлагается совместить этапы математического моделирования, точнее, этап параметрической идентификации параметров p и этап оптимизации управляющих параметров u, но лишь после того, как будут заданы значения начальных условий $\bar{x}_0$ и нерегулируемых параметров $\bar{v}$. Параметрическую идентификацию модели следует проводить после каждой итерации (18) по оптимизации управляющих параметров u. При этом очень важно, чтобы всем имеющимся наблюдениям, используемым для задачи параметрической идентификации, были назначены веса $\rho^j(\hat{x}_0^j, v^j, u^j; \bar{x}_0, \bar{v}, u^k)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, которые обратно пропорционально зависят от расстояния наблюдаемых параметров $\hat{x}_0^j, v^j, u^j$ процесса, заданных значений начального условия $\bar{x}_0$, нерегулируемого параметра $\bar{v}$ и текущего значения итерационного процесса (18) оптимизации параметра u^k. В этом случае, например, функционал (8), используемый в задаче параметрической идентификации на k-й итерации процесса оптимизации управляющего параметра u^k, будет иметь вид

$$S_1^k(p; \bar{x}_0, \bar{v}, u^k) = \sum_{i=1}^{N} \rho^i(\bar{x}_0, \bar{v}, u^k)\,\gamma_i \sum_{j=1}^{M_i} \left\| x^i(t_{ij}; u^i, v^i, p) - \hat{x}_j^i \right\|_{R^n}^2 + \varepsilon \| p \|_{R^l}^2, \tag{22}$$

а при $M_i = 1$ и $t_{iM_i} = T$ функционал (9) примет вид

$$S_2^k(p; \bar{x}_0, \bar{v}, u^k) = \sum_{i=1}^{N} \rho^i(\bar{x}_0, \bar{v}, u^k)\,\gamma_i \left\| x^i(T; u^i, v^i, p) - \hat{x}_T^i \right\|_{R^n}^2 + \varepsilon \| p \|_{R^l}^2. \tag{23}$$

Аналогично изменится и функционал (11).

В качестве весовых функций можно использовать, например, функцию вида

$$\rho^j(\bar{x}_0, \bar{v}, \bar{u}) = \rho_x^j(\bar{x}_0) + \rho_v^j(\bar{v}) + \rho_u^j(\bar{u}),$$

$$\rho_x^j(\bar{x}_0) = e^{-k_1 \left\| \hat{x}_0^j - \bar{x}_0 \right\|},\ \rho_v^j(\bar{v}) = e^{-k_2 \left\| v^j - \bar{v} \right\|},\ \rho_u^j(u^k) = e^{-k_3 \left\| u^j - u^k \right\|}. \tag{24}$$

Ясно, что значения $\rho_x^j(\bar{x}_0)$, $\rho_v^j(\bar{v})$, $j = 1, 2, \ldots, M$, не будут меняться в процессе принятия решения (как для параметрической идентификации, так и для задачи оптимального управления). Они определяются, как только становятся известны начальные условия $\bar{x}_0$ и значения нерегулируемых параметров $\bar{v}$. В итерационном процессе оптимизации (18) параметры математической модели p будут меняться за счет изменения $\rho_u^j(u^k)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Замечание 1. Вместо (24) можно использовать также произведение весовых функций вида

$$\rho^j(\hat{x}_0^j, v^j, u^j; \bar{x}_0, \bar{v}, \bar{u}) = \rho_x^j(\bar{x}_0)\,\rho_v^j(\bar{v})\,\rho_u^j(\bar{u})$$

или какую-либо другую функцию с указанным свойством монотонного убывания в зависимости от значения модулей разности аргументов $\left\| \hat{x}_0^j - \bar{x}_0 \right\|$, $\left\| v^j - \bar{v} \right\|$, $\left\| u^j - u^k \right\|$.

Замечание 2. Другой реализацией предлагаемого подхода к совмещению решения задачи параметрической идентификации и оптимального управления может быть отсечение из множества наблюдаемых значений параметров процесса тех наблюдений, значения которых удалены от текущего вектора $(\bar{x}_0, \bar{v}, u^k)$ на расстояние большее, чем некоторая заданная величина. При этом весовые функции не используются; на каждой итерации оптимизации (19) параметрическая идентификация проводится с использованием лишь усеченного множества наблюдений [9].

В предлагаемом подходе к математическому моделированию и принятию решения по управлению технологическим процессом задачи параметрической идентификации и оптимального управления заменяются одной задачей, которую можно записать в форме

$$J\,(u; \bar{x}_0, \bar{v}, \arg\min_{p\in P} S\,(p; \bar{x}_0, \bar{v}, u)) \to \min_{u\in U}, \tag{25}$$

или

$$J\,(u; \bar{x}_0, \bar{v}, p^*(u)) \to \min_{u\in U}, \tag{26}$$

$$p^*(u) = \arg\min_{p\in P} S\,(p; \bar{x}_0, \bar{v}, u), \tag{27}$$

с учетом дифференциальных уравнений (4). Значения $(\bar{x}_0, \bar{v})$ в (25) — (27) заданы, функционалы $J\,(\cdot)$ и $S\,(\cdot)$ определены формулами типа (3) и (22) или (23).

Оптимальная пара $(u^*,\ p^*(u))$, являющаяся решением задачи (25) или (26), (27), характеризуется тем, что при параметрической идентификации модели (4) наблюдения (5) — (7), проведенные в более близкой окрестности оптимального решения u^*, имеют больший вес, т. е. математическая модель «локально оптимальна» в окрестности значений параметров $(u^*,\ p^*(u))$.

Для решения поставленной задачи можно использовать следующий алгоритм.

1. При заданных значениях начального состояния $\bar{x}_0$ и нерегулируемого параметра $\bar{v}$ по всем имеющимся наблюдениям (5), (6) или (7) вычисляем значения весовых коэффициентов $\rho_x^j(\bar{x}_0)$, $\rho_v^j(\bar{v})$, а значения весов $\rho_u^j(u)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, принимаем равными единице.

2. Решая задачу (12) — (17), проводим параметрическую идентификацию и определяем вектор параметров модели p^{*0}.

3. С использованием итерационного метода (18) — (21) решаем задачу оптимального управления (3), (4) и определяем вектор u^{*0}.

4. Вычисляем значения весовых коэффициентов $\rho_u^j(u^{*0})$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

5. Выполняем один шаг итерационного метода (18) — (21) и определяем новый вектор параметров u^{*1}.

6. Если $\left\| u^{*1} - u^{*0} \right\| > \varepsilon$, то, положив $u^{*0} = u^{*1}$, переходим к шагу 4; в противном случае задача параметрической идентификации и оптимального управления решена с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

При использовании предложенного алгоритма в автоматизированных системах управления технологическими процессами необходимость запоминания математической модели заменяется необходимостью сохранения так называемой информационной модели процесса, состоящей из дифференциальных уравнений (4), оптимизируемого функционала (3) и значений наблюдений за параметрами состояния процесса (5), (6) или (7).

Ясно, что объем вычислений в предлагаемом подходе превышает объем вычислений при использовании классического раздельного двухэтапного подхода к математическому моделированию и оптимальному управлению. Но в предлагаемой математическая модели для принятия оптимального решения учитываются конкретно заданные значения начального состояния и нерегулируемых параметров процесса, а кроме того, она локально оптимальна в окрестности $u^* \in U$. Однако следует учитывать, что мощности современных вычислительных систем позволяют решать задачи принятия решения по управлению многими реальными технологическими процессами и техническими объектами с использованием предложенного подхода в реальном масштабе времени и получать более точные оптимальные решения.

Замечание 3. Предложенный подход несложно распространить на случай дискретных динамических объектов, описываемых системами вида $x_{k+1} = f(x_k, u, v, p)$, $k = 0, 1, \ldots, M$, для которых ставится задача параметрической идентификации параметров $p \in R^l$ при имеющихся наблюдениях за состоянием процесса в какие-либо дискретные моменты времени и оптимизации режимного вектора параметров $u \in R^r$ относительно какого-либо заданного целевого функционала для оценки качества управления.

Результаты численных экспериментов. Рассмотрим результаты решения тестовой задачи с использованием предложенного подхода. Предположим, что исследуемый процесс описывается следующей начальной задачей относительно автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2^2(t)/2 - \tilde{x}_2(t) - vu_1 + 1,\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{x}_1(t) + u_1 - 1,$$

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = -\tilde{x}_4^2(t) + 2\tilde{x}_4(t) - 2\tilde{x}_3(t) + vu_2,\ \dot{\tilde{x}}_4(t) = -\tilde{x}_3(t) - u_2 + 1,\ t \in (0, T],$$

$$\tilde{x}(0) \in X_0 = \{\tilde{x}(0) : -3 \le \tilde{x}_i(0) \le 3,\quad i = 1, 2, 3, 4\}. \tag{28}$$

Здесь $v \in V = [-3, 3] \subset R$ — значение нерегулируемого параметра; $u = (u_1, u_2) \in U \equiv R^2$ — назначаемые значения регулируемых параметров; $T = 2$ — время функционирования процесса. Функционал

$$J(u; \tilde{x}_0, v, p) = \sum_{i=1}^{4} [\tilde{x}_i(T; \tilde{x}_0, u, v) - \tilde{x}_i^T]^2 \to \min_{u \in U}, \tag{29}$$

где $\tilde{x}_T = (2{,}0589; -4{,}3317; -1{,}9177; 1{,}2578)$, определяет качество выбранных значений вектора управляющих параметров u при уже определенно заданных начальном состоянии $\tilde{x}_0$ и значении нерегулируемого параметра v. Численно можно проверить, что результатом решения задачи оптимизации процесса (28) при $x(0) = (2{,}35;\ 2{,}35;\ -2{,}15;\ -2{,}15)$ и $v = -1{,}95$ является вектор $u^* = (-2{,}25;\ 2{,}25)$, при котором функционал (29) принимает значение $J^* = 0$.

Предположим, что вместо процесса (28), точный вид которого будем считать не заданным, математическую модель процесса определяет следующая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = p_1 x_2^2(t) - v\, u_1,\quad \dot{x}_2(t) = p_2 x_1(t) - p_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_3(t) = p_3 x_4^2(t) + p_4 \tilde{x}_3(t) - p_4 + v\, u_2,\quad \dot{\tilde{x}}_4(t) = -x_3(t) - u_2 + 1,\quad t \in (0, T],\tag{30}$$

где $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in P \equiv R^4$ — вектор параметров математической модели.

Пусть при различных заданных значениях нерегулируемых и регулируемых параметров $v^i \in V$ и $u^i \in U$, $i = 1, 2, \ldots, N$, имеются результаты наблюдения за состоянием технологического процесса (28) в начальный и конечный моменты времени $t_{i0} = 0$, $t_{iM} = 2$:

$$\hat{x}_0^i = \hat{x}^i(0;\ u^i, v^i),\quad \hat{x}_T^i = \hat{x}^i(2;\ u^i, v^i),\quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $N = 60$ — число проведенных наблюдений за отдельно протекающими процессами. Запишем наблюдаемые начальные состояния объекта,

$$\hat{x}_j^i(0) = -3 + (i-1)\frac{6}{N},\quad j = 1, 2, 3, 4,\quad i = 1, 2, \ldots, N,\tag{31}$$

при следующих значениях его регулируемых и нерегулируемых параметров:

$$u_j^i = -3 + (i-1)\frac{6}{N},\quad j = 1, 2,\quad v^i = -3 + (i-1)\frac{6}{N},\quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

В таблице приведены значения траектории системы (28) в конечный момент времени $T = 2$, полученные в результате наблюдений.

Определение параметров модели p (задача параметрической идентификации) приводит к минимизации следующего функционала:

$$S(p) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left\| x^i(T; u^i, v^i, p) - \hat{x}_T^i \right\|_{R^4}^2 + \varepsilon \| p \|_{R^4}^2.$$

Предполагая, что точность всех проводимых наблюдений одинакова, принимаем $\gamma_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. При условии, что $P \equiv R^4$, т. е. ограничения на параметры не наложены, итерационный процесс (12), (13) определяется по формулам

$$p^{k+1} = p^k - \alpha_k \operatorname{grad} S(p^k),\quad k = 0, 1, \ldots,$$

i	$\hat{x}_T^i$	i	$\hat{x}_T^i$
1	(7,4129; 0,4487; 4,7353; 0,6380)	31	(2,3696; 05693; 0,4448; 1,4252)
2	(7,4552; 0,4706; 4,4697; 0,8441)	32	(2,0873; 0,6519; 0,4748; 1,2485)
3	(7,4803; 0,4875; 4,1933; 1,0452)	33	(1,8159; 0,7507; 0,4974; 1,0665)
4	(7,4881; 0,4997; 3,9085; 1,2400)	34	(1,5597; 0,8677; 0,5103; 0,8803)
5	(7,4788; 0,5075; 3,6179; 1,4275)	35	(1,3233; 1,0048; 0,5117; 0,6911)
6	(7,4526; 0,5112; 3,3243; 1,6065)	36	(1,1125; 1,1642; 0,5000; 0,5000)
7	(7,4096; 0,5111; 3,0306; 1,7759)	37	(0,9338; 1,3483; 0,4737; 0,3080)
8	(7,3500; 0,5075; 2,7397; 1,9344)	38	(0,7946; 1,5598; 0,4320; 0,1161)
9	(7,2741; 0,5007; 2,4546; 2,0812)	39	(0,7039; 1,8017; 0,3742; –0,0746)
10	(7,1820; 0,4912; 2,1782; 2,2150)	40	(0,6719; 2,0771; 0,2998; –0,2635)
11	(7,0740; 0,4792; 1,9134; 2,3351)	41	(0,7105; 2,3896; 0,2087; –0,4497)
12	(6,9505; 0,4652; 1,6626; 2,4404)	42	(0,8337; 2,7431; 0,1012; –0,6325)
13	(6,8116; 0,4497; 1,4284; 2,5304)	43	(1,0580; 3,1420; –0,0222; –0,8113)
14	(6,6578; 0,4329; 1,2128; 2,6043)	44	(1,4023; 3,5913; –0,1612; –0,9856)
15	(6,4894; 0,4155; 1,0174; 2,6616)	45	(1,8891; 4,0963; –0,3146; –1,1548)
16	(6,3069; 0,3979; 0,8437; 2,7020)	46	(2,5447; 4,6630; –0,4815; –1,3186)
17	(6,1106; 0,3807; 0,6924; 2,7251)	47	(3,4000; 5,2981; –0,6608; –1,4767)
18	(5,9012; 0,3643; 0,5642; 2,7309)	48	(4,4912; 6,0094; –0,8511; –1,6289)
19	(5,6791; 0,3494; 0,4588; 2,7194)	49	(5,8612; 6,8051; –1,0510; –1,7748)
20	(5,4450; 0,3367; 0,3760; 2,6908)	50	(7,5604; 7,6949; –1,2591; –1,9146)
21	(5,1997; 0,3267; 0,3147; 2,6454)	51	(9,6486; 8,6894; –1,4739; –2,0480)
22	(4,9438; 0,3203; 0,2737; 2,5837)	52	(12,1965; 9,8008; –1,6939; –2,1751)
23	(4,6784; 0,3181; 0,2511; 2,5063)	53	(15,2882; 11,0428; –1,9176; –2,2959)
24	(4,4044; 0,3211; 0,2449; 2,4138)	54	(19,0237; 12,4309; –2,1435; –2,4105)
25	(4,1230; 0,3301; 0,2529; 2,3071)	55	(23,5222; 13,9828; –2,3703; –2,5191)
26	(3,8355; 0,3460; 0,2724; 2,1871)	56	(28,9265; 15,7188; –2,5964; –2,6218)
27	(3,5435; 0,3699; 0,3006; 2,0549)	57	(35,4076; 17,6618; –2,8206; –2,7189)
28	(3,2488; 0,4030; 0,3348; 1,9114)	58	(43,1713; 19,8382; –3,0417; –2,8105)
29	(2,9533; 0,4463; 0,3721; 1,7579)	59	(52,4658; 22,2786; –3,2583; –2,8969)
30	(2,6593; 0,5013; 0,4097; 1,5954)	60	(63,5918; 25,0179; –3,4695; –2,9783)

$$\operatorname{grad} S\,(p) = \left(2\varepsilon p_1^k + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T -\psi_1^i(t)[x_2^i(t)]^2\,dt,\ 2\varepsilon p_2^k + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T -\psi_2^i(t)\,x_1^i(t)\,dt,\right.$$

$$\left. 2\varepsilon p_3^k + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T -\psi_3^i(t)[x_4^i(t)]^2\,dt,\ 2\varepsilon p_4^k + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \psi_3^i(t)\,x_3^i(t)\,dt\right),$$

где $x^i(t) = x^i(t;\hat{x}_0^i, u^i, v^i)$ — решение начальной задачи (30), (31); $\psi^i(t)$ — решение следующей сопряженной задачи, полученной из (14), (15):

$$\dot{\psi}_1^i(t) = \psi_2^i(t)\,p_2,\quad \dot{\psi}_2^i(t) = -2\psi_1^i(t)p_1x_2^i(t),$$

$$\dot{\psi}_3^i\,(t) = \psi_3^i(t)p_4 + \psi_4^i(t),\quad \dot{\psi}_4^i(t) = -2\psi_3^i(t)p_3x_4^i(t),\ \ t \in [0,T)\,,$$

$$\psi^i(T) = (-2\gamma_i[x_1^i(T;u^i,v^i,p^k) - \hat{x}_{1T}^i], -2\gamma_i[x_2^i(T;u^i,v^i,p^k) - \hat{x}_{2T}^i],$$

$$-2\gamma_i[x_3^i(T;u^i,v^i,p^k) - \hat{x}_{3T}^i], -2\gamma_i[x_4^i(T;u^i,v^i,p^k) - \hat{x}_{4T}^i]),\ \ i = 1,2,\ldots,N.$$

Для решения задачи оптимального управления при заданных начальном условии $\bar{x}_0$ и значении нерегулируемого параметра $\bar{v}$ используем процедуру (18), (19) с учетом того, что $U \equiv R^4$:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k \operatorname{grad} J(u^k),\ \ k = 0,1,\ldots,$$

$$\operatorname{grad} J(u^k) = \left(\int_0^T [\xi_1(t)\,v - \xi_2(t)]\,dt, \int_0^T [-\xi_3(t)\,v + \xi_4(t)]\,dt\right),$$

где $x^k(t) = x^k(t;\bar{x}_0, u^k, \bar{v})$ — решение начальной задачи относительно (30); $\xi^k(t) = \xi(t;\bar{x}_0, u^k, \bar{v})$ — решение сопряженной задачи,

$$\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t)\,p_2,\quad \dot{\xi}_2(t) = -2\xi_1(t)p_1x_2(t),$$

$$\dot{\xi}_3\,(t) = \xi_3(t)p_4 + \xi_4(t),\quad \dot{\xi}_4(t) = -2\xi_3(t)p_3x_4(t),\ \ t \in [0,T),$$

$$\xi(T) = (-2\lfloor x_1(T;\bar{x}_0,u^k,\bar{v}) - \bar{x}_{1T}\rfloor, -2\lfloor x_2(T;\bar{x}_0,u^k,\bar{v}) - \bar{x}_{2T}\rfloor,$$

$$-2\lfloor x_3(T;\bar{x}_0,u^k,\bar{v}) - \bar{x}_{3T}\rfloor, -2\lfloor x_4(T;\bar{x}_0,u^k,\bar{v}) - \bar{x}_{4T}\rfloor).$$

В результате численного решения задачи с использованием классического раздельного двухэтапного подхода к математическому моделированию и оптимальному управлению рассматриваемым процессом были получены значения идентифицируемых параметров математической модели $p^* = (0{,}6104;\ 1{,}4495;\ -2{,}0522;\ -2{,}0037)$ и оптимальные значения соответствующих управляющих параметров $u^* = (-2{,}3918;\ 2{,}4929)$ при оптимальных значениях целевых функционалов $S(p^*) = 1195{,}47$, $J(u^*) = 14{,}53$.

В результате численного решения задачи с использованием предложенного подхода к принятию решения по управлению процессом были получены значения идентифицируемых параметров математической модели $\bar{p}^* = (0{,}5148;\ 2{,}2775;\ -2{,}2108;\ -1{,}6383)$ и оптимальные значения соответствующих управляющих параметров $\bar{u}^* = (-2{,}1678;\ 2{,}2651)$ при оптимальных значениях целевых функционалов $S(\bar{p}^*) = 7 \cdot 10^{-4}$, $J(\bar{u}^*) = 7{,}86$.

Точность решения основной задачи оптимизации относительно оптимизации регулируемых параметров $\varepsilon_1^u = 10^{-3}$, а точность решения вспомогательной одномерной задачи оптимизации $\varepsilon_2^u = 10^{-4}$. Точность решения основной задачи оптимизации относительно оптимизации параметров модели $\varepsilon_1^p = 10^{-4}$, а точность решения вспомогательной одномерной задачи оптимизации $\varepsilon_2^p = 10^{-5}$. Для численного решения начальной задачи для прямой и сопряженной систем использован метод Рунге—Кутта четвертого порядка точности с шагом $h = 0{,}02$. Значения коэффициентов k_i, $i = 1, 2, 3$ в выражении весовых функций $\rho_x^j(\bar{x}_0) = e^{-k_1\left\|\hat{x}_0^j - \bar{x}_0\right\|}$, $\rho_v^j(\bar{v}) = e^{-k_2\left\|v^j - \bar{v}\right\|}$, $\rho_u^j(u^k) = e^{-k_3\left\|u^j - u^k\right\|}$ приняты $k_1 = k_2 = 1{,}00$, $k_3 = 2{,}50$.

При сравнении описанных моделей видно достаточно существенное различие значений их параметров, откуда, в свою очередь, следует различие полученных оптимальных значений управляющих параметров. При этом оптимальные значения управляющих параметров, полученные предложенным методом, ближе к реально оптимальному вектору $u^* = (-2{,}25;\ 2{,}25)$, чем полученные двухэтапным методом.

Выводы. Основным преимуществом предлагаемого подхода является то, что принятое решение оптимально для математической модели, построенной с учетом наблюдений рассматриваемой информационной модели, наиболее приближенных к оптимальному решению, т.е. математическую модель объекта можно считать локально оптимальной относительно принятого решения. В отличие от классического двухэтапного подхода к принятию решения предлагаемый подход требует большего объема компьютерных вычислений вследствие необходимости проведения параметрической идентификации модели на каждой итерации оптимизационного метода.

Результаты проведенных численных экспериментов подтверждают эффективность предлагаемого подхода к решению поставленных задач. При этом необходимо учесть, что получаемые в ходе решения оптимальные управления могут существенно отличаться от управлений, получаемых с применением классического последовательного двухэтапного метода параметрической идентификации и оптимизации.

An approach is proposed for a decision-making system on controlling the dynamic processes which include the stages of parametric identification of a mathematical model and of optimization of regimes. In this approach the two stages are carried out jointly. Using the approach we obtain a «locally optimal» model in the neighborhood of the optimal regime. The design formulas and an algorithm for the approach implementation are proposed. Results of computer-based experiments are given.

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. — М. : Мир, 1975. — 495 с.
2. *Айда-заде К. Р., Кулиев С. З.* Об одном классе задач идентификации динамических объектов // Электрон. моделирование. — 2008. — **30**, № 5. — С. 105—116.
3. *Демиденко Е. З.* Линейная и нелинейная регрессия. — М. : Наука, 1981. — 264 с.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. А.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — 284 с.
5. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М. : Наука, 1982. — 264 с.
6. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
7. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск : Наука и техника, 1974. — 272 с.
8. *Старостенко В. И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев : Наук. думка, 1978. — 224 с.
9. *Айда-заде К. Р., Хорошко М. Н.* Подход к математическому моделированию и управлению технологическими процессами // Электрон. моделирование. — 2008. — **30**, № 4. — С. 37— 47.

Поступила 09.02.09;
после доработки 31.03.09

КУЛИЕВ Самир Закир, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Ин-та кибернетики НАН Азербайджана. В 2005 г. окончил Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — численные методы оптимизации и оптимальное управление.