
УДК 532.5 + 536.24

К. В. Максименко-Шейко, канд. физ.-мат. наук
Ин-т проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10,
тел. (0572) 942774, E-mail:sheyko@ipmach.kharkov.ua),
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
(Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4)

Математическое моделирование электростатических полей в кусочно-однородных телах сложной формы методом R-функций

(Статью представила канд. техн. наук Э. П. Семагина)

Рассмотрены две методики учета условий стыковки, возникающих в телах, состоящих из частей с различными физическими характеристиками, с использованием теории R-функций. Отдано предпочтение методике, основанной на представлении структур решений различными аналитическими выражениями в различных подобластях, а не на специальных преобразованиях координат. Приведены численные результаты.

Розглянуто дві методики врахування умов стикування, які виникають у тілах, що складаються з частин з різними фізичними характеристиками, з використанням теорії R-функцій. Надано перевагу методиці, яку засновано на представленні структур розв'язків різними аналітичними виразами, а не на спеціальних перетвореннях координат. Наведено чисельні результати.

К л ю ч е в ы е с л о в а: метод R-функций, структуры решений, кусочно-однородные среды, разрывы первого рода, метод Ритца.

Чем обширнее приложения той или иной научной дисциплины, тем большее значение имеет совершенствование и разработка ее научных методов. В задачах с разрывами первого рода большое значение всегда имеет эксперимент. Однако в последние десятилетия заметно возросла роль теоретических (математических) методов исследования. Эта тенденция, связанная с достижениями вычислительной математики и развитием вычислительной техники, несомненно будет продолжаться и в дальнейшем. Плодотворность использования математических методов в теории задач расчета полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода, определяется двумя обстоятельствами: наличием хорошо обоснованных и достаточно универсальных математических моделей и возможностью получить решение указанной системы уравнений и довести его до числа.

В задачах теплопроводности, электростатики, теории упругости для тел, состоящих из частей с различными физическими характеристиками (коэффициенты теплопроводности, диэлектрические проницаемости, упругие постоянные) кроме обычных краевых условий на границе рассматриваемого тела Ω появляются условия стыковки на границах $\partial\Omega_{ij}$ между составляющими его частями (рис. 1, см. вклейку). Вид этих условий определяется физической постановкой задачи [1—8]. Например, в задачах электростатики и теплопроводности [1, 3] рассматриваются условия вида

$$u_i|_{\partial\Omega_{ij-0}} = u_j|_{\partial\Omega_{ij+0}}, \quad \varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Big|_{\partial\Omega_{ij-0}} = \varepsilon_j \frac{\partial u_j}{\partial n_j} \Big|_{\partial\Omega_{ij+0}}, \quad (1)$$

где u_i, u_j — решения в подобластях Ω_i, Ω_j ; $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ — их физические характеристики.

В работах [1—5] рассмотрены различные типы условий стыковки, однако во всех случаях после построения структуры решения $u = B(\Phi)$, учитывающей краевые условия на внешней границе $\partial\Omega$, выполнялось сохраняющее границу $\partial\Omega$ отображение:

$$Q = \{x^1 = x + \omega^2(x) \alpha(x)\}, \quad x^1 = \{x_i^1\}, \quad x = \{x_i\}, \quad \alpha = \{\alpha_i\}, \quad i=1,2,$$

где $\omega=0$ — уравнение внешней границы; α_i — некоторые специально выбираемые функции в зависимости от вида условий стыковки.

Первое условие (1) будет выполнено, если $\alpha = \{\alpha_i\}$ — непрерывные функции, а для выполнения второго условия (1) необходимо, чтобы по нормали к $\partial\Omega_{ij}$ функции $\alpha = \{\alpha_i\}$ имели разрыв первого рода. Их можно представить в виде [1, 2]

$$\alpha_i = \gamma \frac{|\omega_{ij}|}{\omega^2 + \omega_{ij}^2} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{\varepsilon_j + \varepsilon_i}$$

и легко обобщить для нескольких подобластей:

$$Q = \left\{ x^1 = x + \left[\sum_{s=1}^S \gamma_s \frac{\omega^2 |\omega_s|}{\omega^2 + \omega_s^2} \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \tau_s^2 \right] \left[\sum_{s=1}^S \tau_s^2 \right]^{-1} \right\},$$

где $\tau_s = \omega_s^{-1}$ ($s = \overline{1, S}$), $\gamma_s = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_s}{\varepsilon_0 + \varepsilon_s}$, или $\gamma_s = \frac{\varepsilon_{s-1} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{s-1} + \varepsilon_s}$ при различном расположении подобластей (здесь ω_s — нормализованное уравнение границ раздела сред).

Однако при практическом использовании этой методики необходимо в каждом конкретном случае проверять принадлежность образа отобра-

жения Q области $\Omega \cap \partial\bar{\Omega}$. Дополнительные трудности возникают в результате деформации сетки сплайнов при отображении Q , что усложняет организацию вычисления квадратур. Эти факторы оказывают существенное влияние при численной реализации задач с большим разбросом значений физических параметров.

Другая методика учета условий стыковки основана на представлении структур решения различными аналитическими выражениями в различных подобластях [2, 6].

Математическое и компьютерное моделирование. Построим математические модели и исследуем с помощью метода R-функций задачу расчета электростатических полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(\varepsilon_i \operatorname{grad} u_i) = 0 \quad (2)$$

в конечной области Ω с кусочно-однородными включениями при краевых условиях смешанного типа

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1, \quad u|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_3} = 0 \quad (3)$$

и условиях стыковки (1). В данном случае структуру решения можно представить в виде

$$u_i = B(\Phi) + \delta_i \hat{\omega}_i D_1^{(i)} B(\Phi), \quad \hat{\omega}_i = \omega_0^2 \wedge_0 \omega_i, \quad (4)$$

где $\omega_0 = 0$ — уравнение внешней границы; $\omega_i = 0$ — нормализованные уравнения границы $\partial\Omega_i$ подобластей Ω (допускается исключение участков, принадлежащих $\partial\Omega$); δ_i — постоянные, определяемые из (1); $B(\Phi)$ — структура решения, в которой учтены краевые условия на внешней границе $\partial\Omega$ [5].

Из (4) следует, что первое условие (1) удовлетворяется автоматически ввиду того, что $\omega_i = 0$ на $\partial\Omega_i$. Чтобы удовлетворить второму условию (1), продолжим $\frac{\partial u}{\partial n_i}$ внутрь соответствующих подобластей, используя операторы $D_1^{(i)}$ [5]. Подставив (4) в (1), получим

$$\varepsilon_i [D_1^{(i)} B(\Phi) + \delta_i D_1^{(i)} B(\Phi)] = \varepsilon_j [D_1^{(i)} B(\Phi) - \delta_j D_1^{(j)} B(\Phi)],$$

$$D_1^{(i)} B = -D_1^{(j)} B.$$

Отсюда

$$\varepsilon_i (1 + \delta_i) = \varepsilon_j (1 + \delta_j), \quad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} = \frac{1 + \delta_j}{1 + \delta_i}, \quad \delta_i = M \varepsilon_i - 1.$$

Поскольку при удовлетворении стыковочным условиям имеет значение лишь отношение $\varepsilon_i / \varepsilon_j$, на величины δ_k можно наложить дополнительные ограничения, в частности, выполнение условий

$$\begin{aligned} -1 \leq M\varepsilon_j - 1 \leq 1, \quad 0 \leq M \leq \frac{2}{\varepsilon_j}, \\ -1 \leq M\varepsilon_i - 1 \leq 1, \quad 0 \leq M \leq \frac{2}{\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, при выборе δ_i, δ_j следует руководствоваться ограничением

$$0 \leq M \leq \min \left\{ \frac{2}{\varepsilon_k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

Структура (4) справедлива при произвольном расположении подобластей с различными физическими характеристиками.

Неопределенная компонента Φ , входящая в структуру решения [5], представляется в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^N c_k \chi_k,$$

где χ_k — полная в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ система координатных функций, $\chi_k = \chi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Неизвестные коэффициенты c_k можно определить одним из вариационных или проекционных методов.

Для реализации метода Ритца осуществляется переход к краевой задаче с однородными граничными условиями и на линейале функций, им удовлетворяющих, строится функционал, эквивалентный данной краевой задаче. Доказав положительную определенность соответствующего оператора, можно применить метод Ритца, обеспечив при этом сходимость к точному решению по энергии. Переход к однородным краевым условиям осуществляется заменой $u = u' + u_0$, где u_0 удовлетворяет краевым условиям (3).

Таким образом, в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ищем решение следующей эквивалентной (1)—(3) краевой задачи:

$$\begin{aligned} Lu' = -Lu_0, \\ \frac{\partial u'}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_H} = 0, \quad u \Big|_{\partial\Omega_D} = 0, \quad u'_1 \Big|_{\partial\Omega_{1,2}} = u'_2 \Big|_{\partial\Omega_{1,2}}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u'_1}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{1,2}} = \varepsilon_2 \frac{\partial u'_2}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{1,2}}. \end{aligned}$$

Докажем положительную определенность оператора L на линейале U :

$$(Lu', u') = -\varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \Delta u'_1 u'_1 d\Omega_1 - \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \Delta u'_2 u'_2 d\Omega_2 =$$

$$= \varepsilon_1 \int_{\Omega_1} (\nabla u'_1)^2 d\Omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} (\nabla u'_2)^2 d\Omega_2 - \\ - \varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_{1,2}} u'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial n_1} d\partial\Omega - \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_{1,2}} u'_2 \frac{\partial u'_2}{\partial n_2} d\partial\Omega,$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \partial\Omega_1 = \partial\Omega_{1D} \cup \partial\Omega_{1H}, \partial\Omega_2 = \partial\Omega_{2D} \cup \partial\Omega_{2H}.$$

Учитывая однородные граничные условия Дирихле на контурах $\partial\Omega_{1D}$, $\partial\Omega_{2D}$, однородные условия Неймана на контурах $\partial\Omega_{1H}$, $\partial\Omega_{2H}$ и условия стыковки на $\partial\Omega_{1,2}$, получаем

$$(Lu', u') = \varepsilon_1 \int_{\Omega_1} (\nabla u'_1)^2 d\Omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} (\nabla u'_2)^2 d\Omega_2$$

при $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) > 0$, и в силу неравенства Фридрихса [4] $(Lu', u') \geq \gamma^2 \|u\|^2$.

Рассмотрим тестовый пример решения поставленной задачи для области, изображенной на рис. 2, а (см. вклейку).

$$\operatorname{div}(\varepsilon_i \operatorname{grad} u) = 0, \quad (5)$$

$$u|_{y=-b} = -1, \quad u|_{y=b} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=\pm a} = 0, \quad (6)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_{12-0}} = u_2|_{\partial\Omega_{12+0}}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1}|_{\partial\Omega_{12-0}} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2}|_{\partial\Omega_{12+0}}. \quad (7)$$

Здесь

$$\omega_s \equiv \omega_{12} = \frac{y(c-y)}{c} \vee_0 (-l-y) = 0.$$

Точное решение при $a=2$, $b=4$, $c=0,5$, $l=1$ имеет вид

$$u_t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|) + u_3 - \left| \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|) - u_3 \right| \right) + u_4 + \right. \\ \left. + \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|) + u_3 - \left| \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|) - u_3 \right| \right) - u_4 \right| \right),$$

где

$$u_1 = c_1 y + 4c_1 - 1; \quad u_2 = c_2 y + c_2(1+3k) - 1; \\ u_3 = c_3 y + c_2(1+3k) - 1; \quad u_4 = c_4 y + 1 - 4c_2; \\ k = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad c_1 = \frac{k}{2k+2}; \quad c_2 = \frac{1}{2k+2}; \quad c_3 = \frac{k}{2k+2}; \quad c_4 = \frac{1}{2k+2}.$$

Структура решения с учетом главных краевых условий на внешней границе имеет вид

$$B(\Phi) = \frac{y}{b} + \frac{b^2 - y^2}{2b} \Phi,$$

где

$$u_0 = \frac{y}{b}; \quad u' = \frac{b^2 - y^2}{2b} \Phi.$$

Задача решена методом Рунге при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 100$ и $\varepsilon_1 = 100$, $\varepsilon_2 = 1$, т. е. при большом разбросе значений электропроводности. В качестве аппроксимирующих функций использованы кубические сплайны Шенберга (порядок аппроксимирующего пространства 80×160), а коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений найдены в виде

$$\{c_{ij}\} = \iint_{\Omega} E \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x} \frac{\partial u'_j}{\partial x} + \frac{\partial u'_i}{\partial y} \frac{\partial u'_j}{\partial y} \right) d\Omega,$$

$$\{b_i\} = - \iint_{\Omega} E \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u'_i}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) d\Omega,$$

где

$$E = \sum_{s=1}^S \frac{\varepsilon_s}{2} (1 + \omega_s).$$

Результаты решения представлены на рис. 2, б, в (см. вклейку) и рис. 3. Максимальная нормированная погрешность по области не превышает 1 %.

Задача (5)–(7) решена также для области, изображенной на рис. 4.

Опишем процесс построения структуры решения и функций границ

$$f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a}; \quad f_2 = \frac{b^2 - x^2}{2a}; \quad \omega_0 = f_1 \wedge_0 f_2;$$

$$f_3 = \left(\frac{m^2 - (x-d)^2}{2m} \right) \wedge_0 \left(\frac{m^2 - (y-c)^2}{2m} \right);$$

$$f_4 = \left(\frac{k^2 - (x-d)^2}{2k} \right) \vee_0 \left(\frac{k^2 - (y-c)^2}{2k} \right);$$

$$\omega_b = b - y; \quad \omega_n = b + y; \quad \omega_s = f_3 \wedge_0 f_4; \quad \omega_{ss} = \omega_0^2 \wedge_0 \omega_s;$$

$$E = \frac{\varepsilon_1}{2} (1 + \text{sign } w_s) + \frac{\varepsilon_2}{2} (1 - \text{sign } w_s);$$

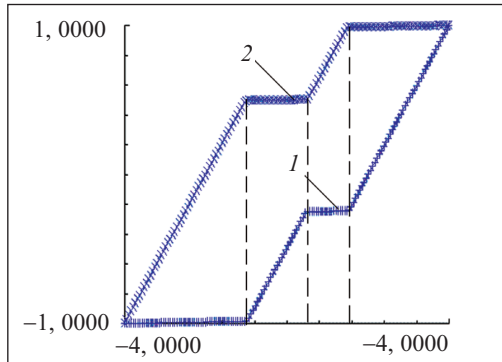


Рис. 3. Графики распределения поля в сечении $x=0$ при различных значениях ε_i : 1 — $\varepsilon_1:\varepsilon_2 = 100:1$; 2 — $\varepsilon_1:\varepsilon_2 = 1:100$

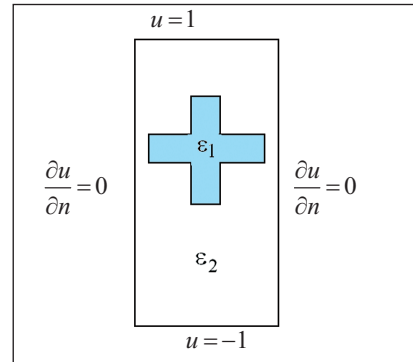


Рис. 4. Схема расположения кусочно-однородных сред

$$u_{01} = \frac{\omega_n - \omega_b}{\omega_n + \omega_b}; \quad u_0 = \frac{u_{01}}{2}(1 - \text{sign } \omega_s) + \frac{u_{01} + \delta\omega_{ss} D_1^{(\omega_s)}(u_{01})}{2}(1 + \text{sign } \omega_s);$$

$$u_{11} = f_2 \Phi; \quad u^1 = \frac{u_{11}}{2}(1 - \text{sign } \omega_s) + \frac{u_{11} + \delta\omega_{ss} D_1^{(\omega_s)}(u_{11})}{2}(1 + \text{sign } \omega_s).$$

Задание геометрической и физической информации с буквенными параметрами позволяет в рамках одной программы проводить многовариантные расчеты, изменяя как расположение и конфигурацию сред, так и значения их физических характеристик. Приведем текст программы на входном языке системы ПОЛЕ-RL:

```

declare
  spli p;
  pol0 a,b,c,d,m,k,e1,e2;
omega
  f1=(a*a-x*x)/2/a; f2=(b*b-y*y)/2/b;
  x1=x-d; y1=y-c;
  f3=((m*m-x1*x1)/2/m)&((m*m-y1*y1)/2/m);
  f4=((k*k-x1*x1)/2/k)&((k*k-y1*y1)/2/k);
  w1=b-y;w2=b+y;
  ws=f3&f4;wo=f1&f2;
  wss=(wo*wo)&ws;
  w=wo;
function
  om=w; del=0.5;
  E=e1*(1+signum(ws))/2+e2*(1-signum(ws))/2;
    
```

```

u0=(w2-w1)/(w1+w2);dovu0=u0+del*wss*d1(ws,u0);
u01=dovu0*(1+signum(ws))/2+u0*(1-signum(ws))/2;
u1=f2*p; dov1=u1+del*wss*d1(ws,u1);
u11=dovu1*(1+signum(ws))/2+u1*(1-signum(ws))/2;
function
u=sum(1,u01,u11);
program
filexy(pp,fs);
inspli(s1,fa1,fb1);pro;
filexy(pp,fu); filex(pt1,fu);>filex(pt2,fu);
fa1(u11)=E*(u11(i,2)*u11(j,2)+u11(i,3)*u11(j,3));
fb1(u11)=E*(-u01(2)*u11(i,2)-u01(3)*u11(i,3));
aa=ai(1); bb=bi(1);
fu(u)=u; fs(u11)=E;
end
value
const=1,1,1, 3, 1000,1,1;
tabl=4,160,320,0,0, 2,1,1,1,1;
pp1=-2,-4,2,4; s1=6,pp1; p=1,pp1;
a=2;b=4; c=(-2,1,2,0);d=(0,0,0,2);m=(1.5,1.5,1.5,3);
k=(0.5,0.5,1.5,0.5); e1=(1,100,100,1);e2=(100,1,1,100);
pp=100,pp1; pt1=10,10,pp1,0; pt2=10,10,pp1,-1;
end

```

На рис. 5 (см. вклейку) представлены результаты работы данной программы при различных значениях буквенных параметров, отмеченных в листинге жирным шрифтом. Численная реализация проводилась с теми же аппроксимационными средствами, что и в предыдущей задаче (порядок аппроксимирующего пространства 160×320). Следует заметить, что изменение буквенных параметров позволяет не только изменять положение и размеры вставки, но и ее вид: в данном примере это может быть крест, квадрат и прямоугольник.

Задача (5)—(6) была решена также для области, изображенной на рис.6, *a* (см. вклейку) при условиях

$$\begin{aligned}
 u_1|_{\partial\Omega_{12}-0} = u_2|_{\partial\Omega_{12}+0}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{12}-0} &= \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{12}+0}, \\
 u_2|_{\partial\Omega_{23}-0} = u_3|_{\partial\Omega_{23}+0}, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{23}-0} &= \varepsilon_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_3} \Big|_{\partial\Omega_{23}+0}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

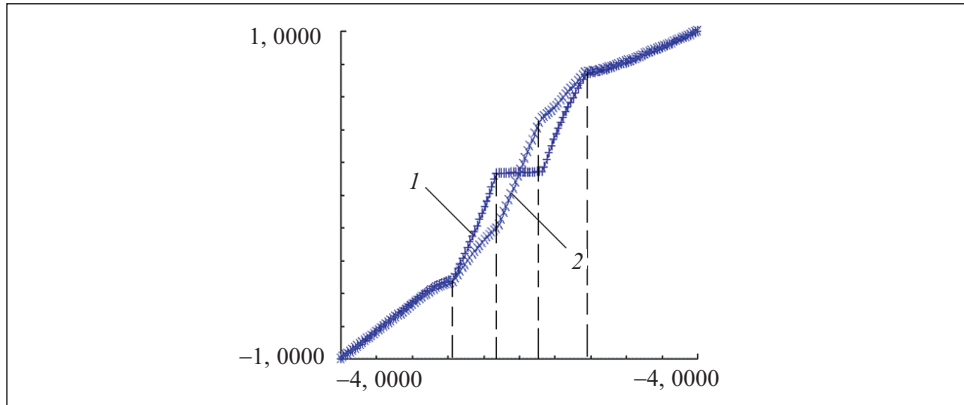


Рис. 7. Графики распределения поля в сечении $x=0$ для различных значений ε_i : 1 — $\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3=20:1:100$; 2 — $\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3=100:5:1$

Здесь

$$\omega_{s1} = \frac{x^2 + y^2 - R^2}{2R}; \quad \omega_{s2} = \left(\frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} \right) \wedge_0 \left(\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2r} \right);$$

$$\omega_{s3} = \frac{r^2 - x^2 - y^2}{2r}; \quad \omega_0 = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 ((y+2) \vee_0 (x+0,5));$$

$$E = \frac{\varepsilon_1}{2} (1 + \text{signum } w_{s1}) + \frac{\varepsilon_2}{2} (1 + \text{signum } w_{s2}) + \frac{\varepsilon_3}{2} (1 + \text{signum } w_{s3}).$$

Результаты представлены на рис. 6, б, в (см. вклейку) и на рис. 7.

Следует заметить, что для оценки достоверности результатов все рассмотренные задачи были также решены с использованием структур, удовлетворяющих лишь главным граничным условиям как на внешней границе, так и на границах раздела сред. В этом случае появилась возможность использовать линейные сплайны, однако для достижения требуемой точности пришлось существенно увеличить размерность аппроксимационного пространства.

Выводы. Таким образом, методика, основанная на представлении структур решений различными аналитическими выражениями в различных подобластях, позволяет без дополнительных исследований проводить вычислительные эксперименты с использованием сплайн-аппроксимации при больших разбросах значений физических и геометрических параметров сред. Метод R-функций с использованием буквенных параметров позволяет в рамках одной программы не только изменять положение и размеры сред-вставок, но и их вид. Решения получены на основе метода Ритца.

Two techniques of the account of joining conditions arising in bodies, consisting of parts with various physical characteristics, with the use of the R-functions theory are considered in the paper. The preference is given to the technique rather based on representation of structures of solutions by various analytical expressions in various subareas, than on special transformations of coordinates. Numerical results are given.

1. Манько Г. П., Рвачев В. Л. Конструирование решений краевых задач с разрывными граничными условиями и условиями сопряжения для областей сложной формы // Теоретическая электротехника. Вып. 13. — Львов : Изд-во Львовского ун-та, 1972. — С. 124—128.
2. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — К. : Наук. думка, 1976. — 287 с.
3. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Литвин Н. Н. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы // Теплофизика и теплотехника. Вып. 32. — К. : Наук. думка, 1977. — С. 18—22.
4. Шейко Т. И. Метод R-функций в задаче о проводимости неоднородной среды в магнитном поле // Журнал технической физики. — 1979. — **49**, вып. 12. — С. 2527—2534.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К. : Наук. думка, 1982. — 551 с.
6. Рвачев В. Л., Шейко Т. И. Метод R-функций в задачах расчета полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода // Прикладная математика и механика. — 1984. — **48**, № 5. — С. 873—877.
7. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. — К. : Наук. думка, 1978. — 138 с.
8. Емец Ю. П. О проводимости среды с неоднородными включениями в магнитном поле. — Журнал технич. физики. — 1974. — **44**, вып. 5. — С. 916—921.

Поступила 08.09.08

МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО Кирилл Владимирович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, доцент Харьковского национального университета им. А. Н. Каразина, который окончил в 2001 г. Область научных исследований — математическое моделирование, теория R-функций.