



УДК 621.365.6:621.791.753

В. Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
А. В. Жильцов, Е. И. Петрушенко, кандидаты техн. наук
Институт проблем моделирования
в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
Украина, 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова 15,
тел. 424-91-60, E-mail: azhilt@mail.ru

Трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов в системе ковш-печь — индукционный перемешиватель на заданном поле скоростей потоков в расплаве стали

Впервые получена система интегро-дифференциальных уравнений для плотности вихревых токов (интегральных по пространственным переменным и дифференциальным по времени) с учетом влияния скорости потоков в расплаве. Эта система уравнений позволяет повысить точность расчета электродинамических усилий в ковш-печи при любых режимах перемешивания.

Вперше отримано систему інтегро-диференціальних рівнянь для густини вихрових струмів (інтегральних по просторовим змінним і диференціальних за часом) з урахуванням впливу швидкості потоків у розплаві. Ця система рівнянь дозволяє підвищити точність розрахунку електродинамічних зусиль у ковші-печі при будь-яких режимах перемішування.

К л ю ч е в ы е с л о в а: МГД процесс, интегро-дифференциальная модель, вихревые токи, ковш-печь, индукционный перемешиватель

При моделировании магнитогидродинамических (МГД) процессов в электротехнических устройствах с жидкими проводниками (ковш-печь с индукционным перемешивателем, машина непрерывного литья заготовок и др.) необходимо учитывать трехмерный характер распределения электромагнитного поля. В ряде случаев допустимо решение задачи в плоскопараллельном или осесимметричном приближении. Для моделирования МГД процессов может быть использован один из следующих методов: конечных разностей, конечных элементов, интегральных уравнений. Поскольку для рассматриваемого класса электротехнических устройств характерны сильные магнитные поля рассеивания, метод интегральных уравнений в данном случае более эффективен, так как искомые величины распределены только в объеме массивных тел (вихревые токи), на их

границе (электрические заряды) и на границе ферромагнитных тел (токи намагниченности). Следовательно, область поиска решения этим методом существенно меньше, чем при использовании метода конечных разностей и конечных элементов, когда необходимо искать решение во всей, вообще говоря, неограниченной области.

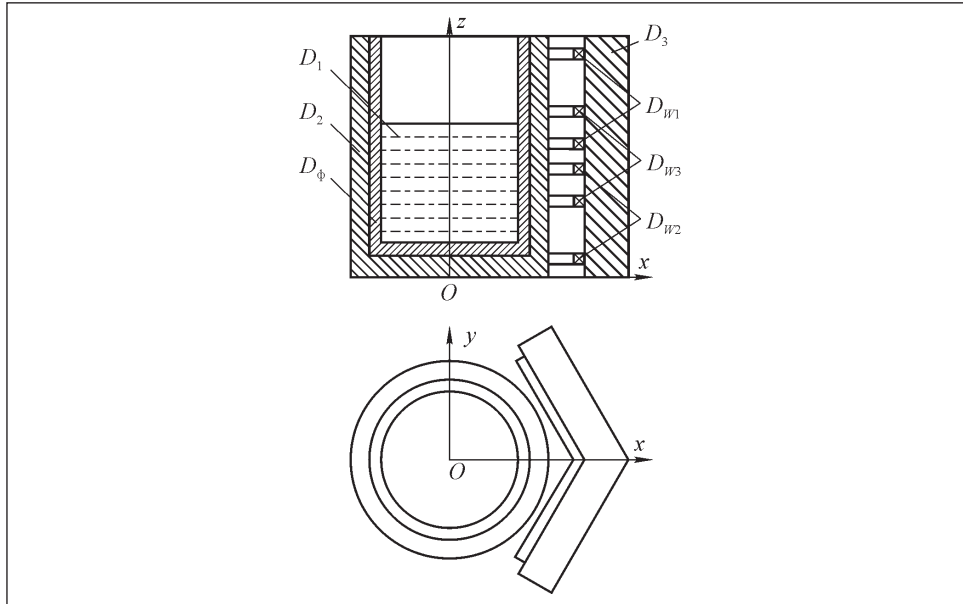
Разработке математических моделей для расчета плоскопараллельного распределения электродинамических усилий в электротехнических устройствах с жидкими проводниками посвящены работы [1—10]. В работах [1—4] построена математическая модель для расчета распределения синусоидальных токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с шихтованным магнитопроводом, в [5] — с массивным магнитопроводом. В работах [6, 7] учтены нелинейные магнитные свойства материала магнитопровода и построены математические модели импульсного воздействия электромагнитного поля на жидкий металл, а в работах [9, 10] построена модель связанных электромагнитных и гидродинамических процессов. В работе [10] для расчета поля скоростей в жидком проводнике уравнения гидродинамики в переменных вихрь — функция тока сведены к системе интегро-дифференциальных уравнений, в которых отсутствуют пространственные производные от искомых величин, вследствие чего устраняются погрешности, вносимые от их аппроксимации конечно-мерными аналогами. Для осесимметричного приближения математическая модель нестационарного МГД процесса построена в работах [11, 12].

Предложенные в указанных работах модели могут быть использованы при анализе как стационарных, так и нестационарных МГД процессов в различных электротехнических устройствах с жидкими проводниками при принятых допущениях, однако в них не учтен трехмерный характер распределения электромагнитного поля.

Постановка задачи. Пусть в магнитном поле, создаваемом изменяющимся во времени током $\delta_W(M, t)$, $t \geq 0$, в обмотке D_W , расположено $(N-1)$ массивных проводников, занимающих объем $D = \bigcup_{q=1}^{N-1} D_q$ и ограниченных

гладкой поверхностью $S = \bigcup_{q=1}^{N-1} S_q$ (см. рисунок). Будем полагать, что про-

водник, занимающий объем D_1 находится в жидкой фазе и для него известен закон распределения поля скоростей $V(Q, t)$ (определяется из решения гидродинамической задачи). Удельная проводимость материалов проводников постоянна по объему каждого проводника и равна соответственно $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}$. Предполагаем, что массивные проводники не имеют между



Электромагнитная система ковш-печь — индукционный перемешиватель: D_1 — проводник в жидкой фазе (μ_0, γ_1); D_2 — массивный проводник в твердой фазе (μ_0, γ_2); D_3 — шихтованный магнитопровод ($\mu_0, \gamma_3 = 0$); D_ϕ — футеровка; $D_W = D_{W1} \cup D_{W2} \cup D_{W3}$ — обмотка

собой электрического контакта. Указанная система проводников дополняется шихтованным магнитопроводом, занимающим объем D_N и ограниченной поверхностью S_N , с магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$.

Полагаем известным начальное распределение плотности вихревых токов по массивным проводникам $\delta(M, 0)$, которое обозначим $\delta^{(0)}(M)$.

Конечная задача состоит в том, чтобы по заданной геометрии системы, электрофизическим характеристикам материалов, из которых изготовлены конструктивные элементы, электрическому соединению элементов, заданным токам в первичных обмотках найти поле скоростей в жидком проводнике.

В общем случае это требует решения трехмерных краевых задач для системы уравнений Максвелла в неограниченной области и уравнений Навье—Стокса в жидких проводниках [13]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \delta, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\delta} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E} + \gamma [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (8)$$

Здесь \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля (В/м); \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля (А/м); \mathbf{B} — вектор магнитной индукции (Тл); $\boldsymbol{\delta}$ — вектор плотности тока (А/м²); γ — удельная проводимость (1/(Ом · м)); μ — абсолютная магнитная проницаемость среды (Гн/м); \mathbf{V} — вектор скорости (м/с), для проводников в твердой фазе необходимо положить $\mathbf{V} = 0$; ρ — плотность проводника в жидкой фазе (кг/м³); t — время (с); p — давление (Па); $\nu = \eta / \rho$ — коэффициент кинематической вязкости (м²/с), η — коэффициент динамической вязкости (Па · с); \mathbf{f} — объемная плотность силы (Н/м³).

Решение полной системы уравнений (1)—(8) даже при использовании современных быстродействующих ЭВМ связано с большими трудностями. Поэтому разделим задачу на этапы:

1) моделирование вихревых токов и электродинамических усилий в сечении магнитной системы на заданном поле скоростей в жидкой заготовке (электромагнитная задача на основе уравнений (1)—(6));

2) моделирование поля скоростей в жидкой заготовке по заданному полю электродинамических усилий (гидродинамическая задача на основе уравнений (7), (8)).

Уравнения квазистационарного электромагнитного поля. При пренебрежении токами смещения система дифференциальных уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле внутри массивных проводников, имеет вид (1)—(6), а вне массивных проводников — следующий вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}_W, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\delta}_W$ — заданная плотность тока (вне проводников с заданной плотностью токов $\boldsymbol{\delta}_W = 0$). Электрическое поле вне массивных проводников нас не интересует, поэтому уравнения, описывающие его, не записываем.

Для однозначного определения поля к дифференциальным уравнениям (1)—(6), (9)—(11) следует добавить следующие дополнительные условия:

равенство нулю нормальной составляющей плотности тока ($\delta_n = 0$) на поверхности массивных проводников (следует из пренебрежения токами смещения вне и внутри массивных проводников);

непрерывность нормальной составляющей индукции и касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности массивных проводников S и поверхности S_N магнитопровода;

известно начальное распределение плотности тока $\delta^{(0)}(M)$ по массивным проводникам;

индукция $\mathbf{B}(M, t)$ стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, как $1/r^2$.

Введением электродинамических потенциалов \mathbf{A} и φ упростим исходную систему уравнений (1)—(6), (9)—(11). В силу того что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, определяем векторный потенциал:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (13)$$

Подставим (12) в (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ — потенциальное поле и для него существует такое скалярное поле φ , что

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (14)$$

Из соотношения (14) получаем следующее уравнение:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (15)$$

Найдем уравнения, которым должны удовлетворять потенциалы \mathbf{A} и φ . Из уравнения (1) с учетом (5) и (12) находим

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\mu^{-1} \mathbf{B}) = \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) = \delta,$$

т. е.

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) = \delta. \quad (16)$$

Далее, с учетом соотношения (6) приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\delta} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \nabla \varphi + \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) образуют систему, эквивалентную всей системе уравнений Максвелла. Под эквивалентностью понимаем следующее: если поля \mathbf{A} , φ , $\boldsymbol{\delta}$ удовлетворяют уравнениям (16), (17), то магнитная индукция \mathbf{B} , напряженность магнитного поля \mathbf{H} и напряженность электрического поля \mathbf{E} , определяемые выражениями

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}; \quad \mathbf{E} = \gamma^{-1} \boldsymbol{\delta},$$

при подстановке их в систему уравнений Максвелла удовлетворяют ей тождественно.

Выведем уравнения, которым должны удовлетворять потенциалы \mathbf{A} и φ . Учитывая, что среда является линейной, изотропной, безгистерезисной в силу сделанных ранее допущений, из уравнения (16) находим $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \boldsymbol{\delta}$. Согласно соотношению $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$, записываем $-\Delta \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu \boldsymbol{\delta}$. Учитывая (13), приходим к следующему уравнению для определения векторного потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \boldsymbol{\delta}.$$

Для определения скалярного потенциала с учетом (15) находим

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla \varphi.$$

Учитывая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\gamma} - \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\gamma} \nabla \cdot \boldsymbol{\delta} - \nabla \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\nabla \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \text{ и } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

находим $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$, т. е. для скалярного электрического потенциала получаем следующее уравнение:

$$\Delta \varphi = -\rho,$$

где $\rho = -\nabla \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$.

Вывод интегро-дифференциальных уравнений для расчета вихревых токов. Для удобства вывода интегро-дифференциальных уравнений общую задачу разобьем на две подзадачи:

1. По заданному распределению токов в обмотках и вихревых токов в массивных проводниках найти распределение связанных токов намагниченности на границах сечения магнитопровода.

2. По заданному распределению токов в обмотках и токов намагниченности на границах сечения магнитопровода найти распределение вихревых токов в сечении массивных проводников.

Сформулируем краевую задачу для расчета магнитного поля в магнитной системе, схема которой изображена на рисунке:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \boldsymbol{\delta}_W, \quad Q \in D_W,$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \boldsymbol{\delta}, \quad Q \in D,$$

$$\Delta \mathbf{A} = 0, \quad Q \in D^- \cup D_N,$$

где D^- — внешнее по отношению ко всем телам электромагнитной системы пространство.

Граничные условия для векторного потенциала на границе S_N магнитопровода запишем так:

$$\mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^- = \mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S_N;$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^- = \frac{1}{\mu} \mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S_N,$$

где \mathbf{A}^+ , \mathbf{A}^- — предельные значения векторного потенциала в точке Q при стремлении к ней соответственно с внутренней и внешней стороны магнитопровода.

Запишем краевые условия для скалярного электрического потенциала: $\varphi^+ = \varphi^-$ на S . Далее учтем, что $\delta_n = 0$ на S , т. е.

$$\delta_n = \gamma \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{n}_Q = -\gamma \frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} + \gamma \mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} + \mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \text{ на } S.$$

Таким образом, получена следующая краевая задача для определения векторного магнитного потенциала и скалярного электрического потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \boldsymbol{\delta}_W, \quad Q \in D_W, \quad (18)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \boldsymbol{\delta}, \quad Q \in D, \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{A} = 0, \quad Q \in D^- \cup D_N, \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^- = \mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S; \quad (21)$$

$$\mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^- = \mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^- = \frac{1}{\mu} \mathbf{n}_Q \times \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S_N; \quad (23)$$

$$\mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^- = \mathbf{n}_Q \cdot \nabla \times \mathbf{A}^+ \text{ на } S_N; \quad (24)$$

$$\Delta \varphi^+ = -\rho, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} + \mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \text{ на } S. \quad (26)$$

Находим векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A}(Q, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\delta_W(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\delta(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\sigma(M, t)}{r_{QM}} dS_M, \quad (27)$$

который удовлетворяет уравнениям (18)—(20) и краевым условиям (22) и (24). Здесь $\sigma(M, t)$ — мгновенная поверхностная плотность простого слоя тока на границе магнитопровода.

Выведем интегральное уравнение, которому должна удовлетворять поверхностная плотность простого слоя тока $\sigma(M, t)$ на границе ферромагнетика S_N при замене кусочно-однородной среды однородной с магнитной проницаемостью μ_0 . Удовлетворяя (27) краевому условию (23), получаем интегральное уравнение для определения поверхностной плотности простого слоя токов:

$$\begin{aligned} \sigma(Q, t) + \frac{\chi}{2\pi} \oint_{S_N} \frac{\mathbf{n}_Q \times \mathbf{r}_{QM} \times \sigma(M, t)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\chi}{2\pi} \int_D \frac{\mathbf{n}_Q \times \mathbf{r}_{QM} \times \delta(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M = \\ = -\frac{\chi}{2\pi} \int_{D_W} \frac{\mathbf{n}_Q \times \mathbf{r}_{QM} \times \delta_W(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\chi = (\mu - \mu_0)/(\mu + \mu_0)$; \mathbf{r}_{QM} — радиус-вектор направленный из точки Q в точку M .

Решение второй задачи может быть найдено с использованием соотношения (17), в которое подставляем векторный потенциал в виде (27):

$$\delta(Q, t) = -\gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\partial \delta_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M - \gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\partial \delta(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M -$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M - \gamma_1 \nabla \varphi^+(Q, t) + \gamma_1 \mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{B}(Q, t), \quad Q \in D_1; \\
 & \boldsymbol{\delta}(Q, t) = -\gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M - \gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M - \\
 & -\gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M - \gamma_q \nabla \varphi^+(Q, t), \quad Q \in D_q, \quad q = 2, 3, \dots, N-1.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем интегро-дифференциальные уравнения для определения плотности вихревых токов:

$$\begin{aligned}
 & \gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \boldsymbol{\delta}(Q, t) + \gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \gamma_1 \nabla \varphi^+(Q, t) = -\gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \gamma_1 \mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{B}(Q, t), \quad Q \in D_1;
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \boldsymbol{\delta}(Q, t) + \gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \gamma_q \nabla \varphi^+(Q, t) = -\gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M, \quad Q \in D_q, \quad q = 2, 3, \dots, N-1;
 \end{aligned} \tag{30}$$

Вектор магнитной индукции определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(Q, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\delta}_W(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\delta}(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M + \\
 & + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_N} \frac{\mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{r_{QM}^3} dS_M.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Для определения $\nabla \varphi^+$ ставится внутренняя задача:

$$\Delta \varphi^+ = -\rho, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} + \mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \text{ на } S. \tag{33}$$

Решение уравнения (32) находим в виде суммы скалярного потенциала объемных зарядов ρ и простого слоя электрических зарядов η :

$$\varphi^+(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\rho(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\eta(M, t)}{r_{QM}} dS_M. \quad (34)$$

Используя свойство потенциала простого слоя

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = \frac{\eta(Q, t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M$$

и удовлетворяя решение (34) краевому условию (33), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} + \mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] &= \frac{\eta(Q, t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (27) приходим к интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \eta(Q, t) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM} \cdot \mathbf{n}_Q}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{\boldsymbol{\delta}(M, t) \cdot \mathbf{n}_Q}{r_{QM}} dV_M + \\ + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_N} \frac{\boldsymbol{\sigma}(M, t) \cdot \mathbf{n}_Q}{r_{QM}} dS_M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \frac{\boldsymbol{\delta}_W(M, t) \cdot \mathbf{n}_Q}{r_{QM}} dV_M + 2\mathbf{n}_Q \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M. \end{aligned} \quad (35)$$

Зная распределение поверхностной плотности простого слоя электрических зарядов, определяем

$$\nabla_Q \varphi^+(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M. \quad (36)$$

С учетом (35) уравнения (29), (30) перепишем в виде

$$\oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \frac{\boldsymbol{\delta}(Q, t)}{\lambda \gamma_1} + \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\mu_0} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = - \int_{D_W} \frac{\partial \delta_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{B}(Q, t) - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_1; \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \frac{\boldsymbol{\delta}(Q, t)}{\lambda \gamma_q} + \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \frac{1}{\mu_0} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = - \int_{D_W} \frac{\partial \delta_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \\
 & \quad Q \in D_q, q=2,3,\dots,N-1, \quad (38)
 \end{aligned}$$

где $\lambda = \mu_0 / (4\pi)$. Таким образом, решение электромагнитной задачи сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (28), (35), (37), (38).

Преобразуем уравнение (37) с учетом выражения (31) для вектора магнитной индукции:

$$\begin{aligned}
 & \oint_{S_N} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \frac{\boldsymbol{\delta}(Q, t)}{\lambda \gamma_1} + \int_D \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \frac{1}{\mu_0} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = - \int_{D_W} \frac{\partial \delta_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\
 & + \int_{D_W} \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\delta}_W(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M + \int_D \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\delta}(M, t)}{r_{QM}^3} dV_M + \\
 & + \oint_{S_N} \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{r_{QM}^3} dS_M - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \\
 & \quad Q \in D_1,
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\oint_{S_N} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} - \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\sigma}(M, t)}{r_{QM}^3} \right\} dS_M + \frac{\boldsymbol{\delta}(Q, t)}{\lambda \gamma_1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_D \left\{ \frac{\partial \delta(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} - \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \delta(M, t)}{r_{QM}^3} \right\} dV_M + \frac{1}{\mu_0} \oint_S \eta(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = \\
 & = - \int_{D_W} \left\{ \frac{\partial \delta_W(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} - \frac{\mathbf{V}(Q, t) \times \mathbf{r}_{QM} \times \delta_W(M, t)}{r_{QM}^3} \right\} dV_M - \\
 & \quad - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_1.
 \end{aligned}$$

Вывод. Полученная система интегро-дифференциальных уравнений для вихревых токов в системе ковш-печь — индукционный перемешиватель, в которой учтено распределение скоростей в расплаве, может быть применена при моделировании нестационарных МГД процессов в различных электротехнических устройствах с жидкими проводниками.

A system of integro-differential equations for eddy currents density (space integration and time differentiation) is first obtained with regard for the effect of flow velocity in the melt. The system of equations allows to increase the calculation accuracy of electrodynamic forces in the ladle in any stirring conditions.

1. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // Электрон. моделирование. — 2006. — 28, № 2. — С. 3 — 16.
2. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Блочный алгоритм компьютерной реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья блюмов и слябов // 36. наук. праць ПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. Моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вып. 36. — С. 30 — 39.
3. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И., Филиппова Г. А. Двумерная интегральная электромагнитно-гидродинамическая модель распределения электродинамических усилий и скоростей в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. Ч. 1 // Там же. — 2007. — Вып. 40. — С. 3 — 16.
4. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И., Филиппова Г. А. Двумерная интегральная электромагнитно-гидродинамическая модель распределения электродинамических усилий и скоростей в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. Ч. 2 // Там же. — 2007. — Вып. 41. — С. 7 — 24.
5. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Кондратенко И. П., Петрушенко Е. И., Ращепкин А. П. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с массивным магнитопроводом машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2007. — 29, № 2. — С. 3 — 15.

6. Жильцов А. В. Двумерная интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель с нелинейным массивным магнитопроводом // Там же. — 2007. — 29, № 6. — С. 37 — 46.
7. Жильцов А. В. Моделирование переходных МГД процессов в электротехнических устройствах с жидким проводником и нелинейным массивным магнитопроводом на основе суммарных схем // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — 2007. — Вып. 42. — С. 3 — 22.
8. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная электромагнитогидродинамическая модель движения жидкой стали в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // Электрон. моделювання. — 2006. — 28, № 6. — С. 105 — 114.
9. Дубоделов В. И., Кучаев А. А., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Численное моделирование двумерного распределения поля скоростей в жидкой стали в системе кристаллизатор МНЛЗ — двухобмоточный индукционный перемешиватель // Металл и литье Украины. — 2007. — № 5. — С. 50 — 54.
10. Жильцов А. В. Математическая модель нестационарного гидродинамического процесса в кристаллизаторе МНЛЗ на основе интегро-дифференциальных уравнений // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — 2007. — Вып. 43. — С. 3 — 14
11. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов и электродинамических усилий в электротехнических устройствах с жидкими проводниками, состоящими из соосно расположенных тел вращения // Там же. — 2007. — Вып. 39. — С. 3 — 12.
12. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета поля скоростей в жидком проводнике электротехнического устройства, состоящего из соосно расположенных тел вращения // Там же. — 2007. — Вып. 38. — С. 3 — 9.
13. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. — М. : Мир, 1967. — 320 с.

Поступила 18.11.08

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, моделирование электромагнитных, гидродинамических процессов.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.