УДК 531.01+517.9

М. В. Шамолин, д-р физ.-мат. наук
Ин-т механики Московского государственного
университета им. Ломоносова
(Россия, 119899, Москва, Мичуринский пр., д. 1,
тел.: (495) 9395143; E-mail: shamolin@imec.msu.ru)

Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение *

Показана принципиальная возможность решения задачи дифференциальной диагностики на уровне математических моделей, алгоритмов и программ с помощью внешнетраекторного контроля вычислительными средствами.

Показано принципову можливість розв'язування задачі диференціальної діагностики на рівні математичних моделей, алгоритмів та програм за допомогою зовнішньотраекторного контролю обчислювальними засобами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: неисправность, управляемая система, диагностическое пространство.

Сложность современных управляемых систем, задач, решаемых этими системами, многообразие этих задач, снижение аппаратурной избыточности, высокая ответственность и интенсивность работы операторов, их высвобождение требуют интеллектуального приборного наполнения таких систем и, в частности, эффективной автоматической диагностики функционального состояния в процессе их движения. По результатам диагностики можно провести ремонт системы управления (СУ), выполнить отключение неисправного элемента или осуществить коррекцию закона управления.

Многие технические объекты имеют модульную структуру и обладают конечным набором неисправностей. Движение таких объектов и элементов их систем управления, как исправных, так и неисправных, с высокой степенью точности априори можно описать, исходя из опыта и законов теоретической механики, обыкновенными дифференциальными уравнениями. Именно поэтому направление исследований диагностики

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

функционального состояния управляемых систем получило название «дифференциальная диагностика». В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и неисправных (если они есть) систем.

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния таких объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: контролю, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и диагностированию, т. е. поиску произошедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри данной контролируемой поверхности.

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля.

Процедура контроля включает в себя фиксирование выхода траектории объекта на поверхность контроля, что является началом алгоритма контроля, т.е. информацией о наличии неисправности в системе, и выдачу начальной информации для алгоритма диагностирования.

Задача диагностирования может быть решена последующим слежением за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Исходной информацией для решения задачи диагностирования является конечный набор математических моделей неисправных систем, отличающихся одна от другой и от исходной системы возможной неисправностью, ограниченная область их начальных условий и информация с выхода алгоритма контроля.

Уравнения движения и понятие неисправности. Рассмотрим автономную управляемую систему, функциональное состояние которой может быть описано векторным дифференциальным уравнением, удовлетворяющим теореме существования и единственности,

$$x' = X(x). \tag{1}$$

Пусть система имеет управляющее устройство, позволяющее удерживать все решения системы (1) как можно ближе к некоторому решению x_*. Предположим, что все компоненты $x_1, ..., x_n$ вектора x можно разделить на два множества: координаты системы (объекта) $y_1, ..., y_p$ и координаты управления $z_1, ..., z_q$, где $p+q=n$.

Запишем уравнения (1) в следующем виде:

$$y' = Y(y, z), \quad Y(0,0)=0, \quad z' = Z(y, z), \quad Z(0,0)=0. \tag{2}$$

Система (2) является системой с непрямым управлением или с управлением по производным. Такие системы применительно к управлению движением корабля впервые рассматривались Н. Минорским [1]. Объект управления описывается уравнением $y' = Y(y, 0)$, а управляющее свойство — уравнением $z' = Z(0, z)$.

При проведении математических экспериментов по диагностике управляемых систем были использованы математические модели типа (2). Классификация неисправностей, определение их окрестностей, обсуждение невырожденности опорных неисправностей, введение понятия диагностического пространства, а также первоначальная постановка задачи выполняются на основе уравнений летательного аппарата (ЛА)

$$x' = X(x) + A(x)\xi, \quad \xi' = \Phi(\delta), \quad \delta = Bx + \varphi(\sigma), \quad \sigma = Cx, \tag{3}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния; $X(x)$, $A(x)$ — определенные непрерывные матрицы; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются, например, углы отклонения рулей высоты, элеронов, направления; $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, ..., n)$ — непрерывные матрицы. Трехмерные вектор-функции $\Phi(\delta)$ и $\varphi(\sigma)$ непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h $(h = 1, ..., 3)$ и принадлежат классу так называемых допустимых характеристик:

$$\delta_h \Phi_h(\delta) > 0 \text{ при } \delta_h \neq 0; \ \sigma_h \varphi_h(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma_h \neq 0. \tag{4}$$

Последние три уравнения в (3) описывают СУ движением динамического объекта. Цель управления — приблизить траекторию $x(t)$ к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Допустим, что такое управление построено, т.е. подобраны функции φ и Φ, а также коэффициенты матриц B, C, и именно эти значения φ, Φ, B и C присутствуют в (3).

Допустим, что в процессе функционирования в СУ могут возникать неисправности, которые приводят к тому, что управляющий сигнал ξ, вырабатываемый СУ объекта, формируется неправильно, т.е. управление объектом уже не обеспечивает близости траектории $x(t)$ к $x_*(t)$.

Таким неисправностям соответствуют некоторые значения коэффициентов матриц B, C и виды функций φ, Φ. Допустим, что существует такой набор из l неисправностей, каждая из которых имеет свои матрицы B_i, C_i и функции φ_i, Φ_i, $i=1,\ldots,l$, что решения систем $x^{i'}(t)=f_i(x^i,t)$ с начальными условиями $x^{i0}\in X$ (функции f_i получаются подстановкой в (3) матриц B_i, C_i) различны между собой при одних и тех же начальных условиях для всех f_i и отличны также от программной траектории $x_*(t)$. Тогда при данном наборе неисправностей актуальна задача определения номера i функции f_i, $i=1,\ldots,l$, заменяющей правую часть (3) в некоторый момент времени t_0 (момент возникновения неисправности в СУ объекта).

В более общем виде задачу можно сформулировать так. Пусть в момент времени t_0 произошла неисправность. Задача сводится к отображению произошедшей в системе неисправности на множество из l возможных неисправностей и определению номера $i=1,\ldots,l$ неисправности из этого множества, наиболее близкого к произошедшей неисправности.

Классификация неисправностей. Будем рассматривать классификацию неисправностей на основе математической модели пространственного движения ЛА (3). Запишем эти уравнения применительно к СУ, рассмотренной в работе [2], в которой исследуется режим планирующего спуска ЛА с высот, близких к орбитальным. Сохранив в этих уравнениях структуру управления, запишем их в виде

$$x'=A(x)+B(x)\xi, \tag{5}$$

$$\xi'=\Phi(\delta),\ \ \delta=C(t)u+\varphi(\sigma), \sigma=E(t)s, \tag{6}$$

где $A(x)$, $B(x)$ — определенные, непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения ξ_r $(r=1,2,3)$ рулей высоты, элеронов, направления; составляющие трехмерных векторов u и s могут быть измерены или алгоритмически вычислены. Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\varphi(\sigma)$ принадлежат к классу допустимых характеристик, удовлетворяющих условиям (4). Зависимость от времени матриц C, E в правых частях (6) обусловлена тем, что процесс развития неисправностей может зависеть от времени.

Перейдем к классификации возможных неисправностей, дадим определение неисправности и опишем предлагаемый подход. Классификация выполняется применительно к неисправностям, которые могут возникнуть в СУ движением ЛА (5), (6). Она достаточна для описания возможных в СУ неисправностей и может быть использована для описания соответствующих неисправностей в других частях ЛА.

Информационное содержание и силомоментные воздействия СУ в (5), (6) обеспечиваются датчиками. Современные СУ имеют модульную структуру, состоящую из конечного набора датчиков. Датчиком назовем любой прибор из цепочки приборов, перерабатывающих информацию о траекторном движении ЛА.

Неисправностью будем называть такое изменение функционального состояния в системе датчиков управления, которое обусловливает недопустимые отклонения ЛА (5), (6) от цели управления.

Определим возможные неисправности в СУ движением объекта, которое описано дифференциальными уравнениями (5).

1. *Отказ* — отсутствие сигнала на выходе датчика. Отказ можно моделировать обнулением соответствующего коэффициента при входном сигнале датчика или его выходном сигнале. Так, если в третьем уравнении (6) слагаемое

$$\delta_{11} = c_{11}(t)\, u_1 \qquad (7)$$

становится равным нулю, то это означает, что отказал датчик, формирующий сигнал (7). Из (7) следует, что отказ может быть обусловлен:

а) отказом прибора, формирующего оператор $c_{11}(t)$ при сигнале, поступившем на вход датчика;

б) исчезновением сигнала u_1 в датчике;

в) наличием «а» и «б» одновременно.

Таким образом, полагаем, что датчики не абсолютно надежны.

2. *Сбой* — выход сигнала датчика за пределы допустимых номинальных значений.* Сбой можно моделировать выбором закона изменения соответствующего параметра. Если закон изменения параметра зависит от времени, то это значит, что рассматриваемая система перестает быть автономной. Например, сигналу δ_{11} с выхода датчика, формирующего выражение (7), предписано находиться в пределах $\underline{\delta_{11}} \le \delta_{11} \le \overline{\delta_{11}}$, а изменение коэффициентов таково, что δ_{11} выходит за пределы интервала $[\underline{\delta_{11}}, \overline{\delta_{11}}]$.

3. *Заклинивание* — неисправность, при которой значение выходного сигнала датчика в некоторый момент времени фиксируется и в дальнейшем не изменяется во времени. Сюда отнесем и неисправности, при которых около некоторого фиксированного положения совершаются незатухающие, например синусоидальные, колебания (происходит заклинивание с наложением некоторых колебаний).

4. *Активный отказ* — неисправность, при которой сигнал датчика скачкообразно изменяется до определенного максимально возможного значения (не равного нулю) и фиксируется по величине.

5. *Нарушение симметрии* — неисправность, при которой происходит сдвиг начала отсчета сигнала датчика. В частности, это может быть сдвиг допустимой характеристики исполнительного органа, которая перестает принадлежать классу функций (4).

---

*Данное определение сбоя несколько отличается от определения, данного ранее [2—12].

Неисправности 1—5 образуют класс возможных неисправностей. Считается, что любая неисправность из выделенного класса не приводит к изменению фазовых пространств моделей объекта, которые отличаются лишь структурой уравнений движения. Если в заранее неизвестный момент времени произойдет одна из неисправностей из класса возможных, то траектория исходной системы изменится и будет непрерывно продолжаема траекторией системы с произошедшей неисправностью.

Рассмотрим два любых различных датчика из набора датчиков в СУ движением объекта. Каждому из таких датчиков можно поставить в соответствие определенные неисправности из выбранного класса. Конечному набору различных датчиков СУ движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{8}$$

из класса возможных. Такой априорный набор неисправностей назовем опорным, а неисправности, входящие в этот набор, — опорными неисправностями.

Сделаем предположение, основанное на том, что процесс обнаружения неисправности ограничен малым временем.

Пусть распределение интервала времени между последовательными неисправностями системы (5), (6) таково, что вероятность более чем одной неисправности на интервалах времени обнаружения пренебрежимо мала. Это позволит поставить задачу диагностики при условии, что произошедшая в системе (5), (6) неисправность попала в апостериорный список $l_1 < l$ неисправностей.

Математическое моделирование опорных неисправностей. *Отказ.* При моделировании отказа рассматривается объединение следующих возможностей:

$$\xi_i = 0,\ i = 1, 2, 3;\ c_{ij} = 0,\ u_j = 0,\ j = 1, \dots, p;$$
$$e_{ik} = 0,\ s_k = 0,\ k = 1, \dots, q. \tag{9}$$

Сбой. Значение одного из коэффициентов c_{ij}, e_{ik} в (6) оказывается за пределами ограничивающих его констант, что влияет на вид объединения соответствующих возможностей.

Заклинивание согласно определению моделируется в виде

$$\xi_i(t) \equiv \xi_i^{\varphi x},\ i = 1, 2, 3;\ u_j(t) \equiv u_j^{\varphi x},\ j = 1, \dots, p,\ t_0 \le t \le T;$$

$$s_k(t) \equiv s_k^{\varphi x},\ k = 1, \dots, q. \tag{10}$$

Если на постоянные значения (10) накладываются некоторые колебания, то такое заклинивание можно описать следующими соотношениями:

$$\xi_i(t) \equiv \xi_i^{\text{φх}} + a_{\xi_i}^{\text{φх}} \sin(\omega_{\xi_i}^{\text{φх}} t + \varphi_{\xi_i}^{\text{φх}}),$$

$$u_j(t) \equiv u_j^{\text{φх}} + a_{u_j}^{\text{φх}} \sin(\omega_{u_j}^{\text{φх}} t + \varphi_{u_j}^{\text{φх}}), \quad s_k(t) \equiv s_k^{\text{φх}} + a_{s_k}^{\text{φх}} \sin(\omega_{s_k}^{\text{φх}} t + \varphi_{s_k}^{\text{φх}}), \tag{11}$$

$$i = 1, 2, 3,\ j = 1, \dots, p,\ k = 1, \dots, q,\ t_0 \le t \le T.$$

Активный отказ будем моделировать так:

$$\xi_i(t) \equiv \xi_i^{\max},\ i = 1, 2, 3;\ u_j(t) \equiv u_j^{\max},\ j = 1, \dots, p,\ t_0 \le t \le T;$$
$$s_k(t) \equiv s_k^{\max},\ k = 1, \dots, q. \tag{12}$$

Нарушение симметрии моделируется сдвигом начала отсчета сигнала в процессе его формирования датчиком в соответствующей плоскости одной из функций $\xi_i(t), u_j(t), s_k(t)$. Например, нарушение симметрии в работе исполнительных органов, движение которых в (5), (6) описано характеристиками Φ и φ, моделируется нарушением условий (4).

Окрестности опорных неисправностей. Определение 1. Окрестностью O_j (областью влияния) опорной неисправности H_j (8) назовем множество точек таких, что если в точке окрестности O_j, включая точку H_j, произойдет не предусмотренная списком (8) неисправность, то различие между траекторией системы (5) с этой неисправностью и траекторией с неисправностью H_j будет незначительным, и эта неисправность будет распознаваема как одна из опорных неисправностей из списка (8).

Неисправность, не предусмотренная списком (8), но «близкая» к списочной неисправности H_j из окрестности O_j, т.е. при возникновении которой траектории системы незначительно отличаются от траекторий системы со списочной неисправностью H_j, будет распознана алгоритмом при решении задачи обнаружения неисправности как списочная неисправность H_j. Если не предусмотренная списком (8) неисправность произойдет в области пересечения окрестностей O_j, она может быть обнаружена как одна из списочных неисправностей, окрестности которых образуют область пересечения.

Окрестность отказа — множество точек такое, что любая возникшая в нем неисправность, возможно ведущая к отказу, может быть диагностирована как отказ. Окрестности отказов (9) моделируются как полосы во времени, ограниченные сверху и снизу максимально и минимально возможными значениями координат ξ_i, u_j, s_k, а для коэффициентов c_{ij} и e_{ik} — максимально возможными их значениями и осью времени t:

$$\xi_i \in [\underline{\xi_i}, \overline{\xi_i}],\ \underline{\xi_i} \le \overline{\xi_i};\ c_{ij} \in [\underline{c_{ij}}, \overline{c_{ij}}];$$

$$u_j \in [\underline{u_j}, \overline{u_j}];\ e_{ik} \in [\underline{e_{ik}}, \overline{e_{ik}}];\ s_k \in [\underline{s_k}, \overline{s_k}].$$

Окрестность сбоя — множество точек, охватывающее множество допустимых значений выходного сигнала датчика и такое, что любая возникшая в этом множестве неисправность может быть диагностирована по априори фиксированному сбою.

Окрестность заклинивания можно выбрать в виде полосы, ограниченной сверху прямой $\xi_i^+(t)$ (или прямыми $u_j^+(t)$, $s_k^+(t)$) и снизу прямой $\xi_i^-(t)$ (или прямыми $u_j^-(t)$, $s_k^-(t)$), включающей в себя соответствующий режим (10) или (11).

Окрестность активного отказа (12) может быть описана как полуполоса, ограниченная сверху одним из значений $\xi_i^{\max}$, $u_j^{\max}$, $s_k^{\max}$, а снизу — некоторой прямой $\xi_i^{(-)}$, $u_j^{(-)}$, $s_k^{(-)}$, или как полуполоса, ограниченная снизу одним из значений $\xi_i^{\min}$, $u_j^{\min}$, $s_k^{\min}$, а сверху — некоторой прямой $\xi_i^{(+)}$, $u_j^{(+)}$, $s_k^{(+)}$.

Окрестность нарушения симметрии моделируется окружностью с центром в точке сдвига радиуса r_{ξ_i}, r_{u_j} или r_{s_k}, которая перемещается вместе с точкой сдвига, или, что то же самое, полосой соответственно шириной $2r_{\xi_i}$, $2r_{u_j}$ или $2r_{s_k}$.

Далее окрестности O_j опорных неисправностей H_j из априорного списка (8) всегда будем считать открытыми множествами.

Определение 2. Опорные неисправности (8) из класса возможных, окрестности которых не пересекаются или пересекаются только вдоль прямых по оси времени, назовем невырожденными.

Определение 3. Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой ставится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j, диагностируемых посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Рассмотрим математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(M; O_1, O_2, ..., O_l; A_1, A_2, A_3), \qquad (13)$$

где M — множество неисправностей $H_1, ..., H_l$ из (8) вместе с их окрестностями $O_1, ..., O_l$. Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются так:

$$A_1 : \forall H_j \in H \exists O_j (H_j \subset O_j);\ A_2 : \forall O_j \exists H_j (H_j \subset O_j);$$

$$A_3 : H_j \subset O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu (H_j \subset O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k).$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2009. V. 31. № 1

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j,

$$H_j = \lim_{\mu \to \infty} O_\mu \Leftrightarrow \forall O_\mu \exists \overline{M} (\mu > \overline{M} \Rightarrow H_j \subset O_\mu),$$

каждая окрестность O_μ которого содержит элемент H_j и близкие к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (8) неисправности. Эти неисправности следует диагностировать посредством априорного набора (8). Если под элементом ρ понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список (8)), которое может произойти в любой точке M и которое требуется диагностировать посредством элемента H_j, то аксиомы структуры диагностического пространства (13) могут быть записаны в следующем виде:

$A_1 : \forall \rho \in M \, \exists O_i (\rho \in O_i)$ — окрестности покрывают все M;

$A_2 : \forall O_i \exists \rho (\rho \in O_i)$ — окрестности не пусты;

$A_3 : \rho \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k (\rho \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j)$ — окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу ρ.

Предел последовательности $\{O_k\}$ определяем как элемент $\rho = \lim_{k \to \infty} O_k$, каждая окрестность $O_j(\rho)$ которого содержит элемент H_j и близкие к H_j непредвиденные и не содержащиеся в (8) неисправности, диагностируемые посредством набора (8).

Задача дифференциальной диагностики. Будем рассматривать объекты, движение которых может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$x' = f(x, u, t) = f_0(x, t), \tag{14}$$

где x — вектор $(n \times 1)$, характеризующий отклонение от режима, предписанного целью управления. Относительно управлений $u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^m$ будем предполагать, что они принимают значения из некоторой компактной области U:

$$u(t) \in U. \tag{15}$$

Цель управления формализуем следующим тождеством:

$$x(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $v(x, t) > 0$ и пару

$$\{v(x, t);\, u(x, t)\}, \tag{17}$$

где $u(x, t) \in U$ [13]. Пара (17) позволяет синтезировать допустимое управление (15), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (16) системы (14).

Пусть известен конечный набор (8) опорных невырожденных неисправностей в СУ объектом, движение которого описано уравнениями (14), и значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j(x,t)\|, \ j = 1, \dots, l. \tag{18}$$

Набор функций (18) не изменяет фазового пространства системы (14). Составляющие его функции имеют ту или иную неисправность и не обязательно удовлетворяют по параметрам системы (14) условиям асимптотической устойчивости решения (16), определяемым функцией $v(x,t)$ в (17).

Конечному набору управлений (18) поставим в соответствие следующий набор систем дифференциальных уравнений:

$$x' = f_j(x,t), \quad j = 1, \dots, l, \tag{19}$$

где $f_j(x,t)$ — соответствующие неисправностям в управлениях (18) известные вектор-функции размеров $(n \times 1)$, отличные одна от другой и от функции $f_0(x, t)$ в (14).

Пусть известны уравнения (14), (19) и значение фазового вектора в начальный момент $x(t_0)$. Требуется построить функционал

$$S_j = \Phi\,(x(t), x(t_0), f_j(x,t), \tau - \tau_0),$$

с помощью которого решается задача дифференциальной диагностики, т.е. задача однозначного распознавания возникшей в пространстве (13) системы (14) неисправности по набору (8) опорных невырожденных неисправностей. Данная задача решается минимизацией по j, т.е. обработкой выходной информации согласно (14), (19) по входной информации о состоянии системы в момент t_0 и последующим слежением за траекторией объекта (14) на интервале времени $[\tau_0, \tau]$, где $\tau - \tau_0$ — время диагностики.

Задача контроля. Рассмотрим систему (14) с полностью наблюдаемым фазовым вектором x на отрезке $[0, T]$. Пусть множество X^0 начальных значений x^0 вектора x ограничено, и в момент времени t_0 $(0 \le t_0 \le T)$ правая часть уравнения (14) заменяется на некоторое $f_j(x,t)$ из (19).

Введем в рассмотрение вектор контроля $y(t)$, координаты которого представляют собой подмножество координат вектора $x(t)$:

$$y(t) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_m}). \tag{20}$$

Допустим, что существует такой вектор $y(t)$, наблюдение за компонентами которого позволит судить об исправности или неисправности СУ объекта, т.е. о наличии в правой части уравнений либо функции f_0, либо одной из функций f_j, $j = 1, \dots, l$, из (14). Задача контроля может быть решена с помощью различных по множеству координат векторов контроля $y(t)$. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы вектор контроля был меньшей размерности.

Пусть даны уравнения (14), множество X^0 начальных условий x^0, время T и набор функций f_j, $j=1,\dots,l$, в (19). Пусть существует поверхность π_k (контроля) в пространстве координат вектора $y(t)$ такая, что вектор контроля, составленный из компонент решения уравнения (14), не выйдет на поверхность π_k, а вектор $y(t)$, составленный из соответствующих компонент решений x любой из систем (19) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выйдет на π_k в момент времени t_k ($t_0 \le t_k \le T$). Такая поверхность π_k является функцией начальных условий x^0 и набора функций f_j, $j=1,\dots,l$. Ее построение в случае нелинейных уравнений движения (14), (19) — аналитически трудная задача. Однако при знании функций f_j, $j=1,\dots,l$, и относительной малости области X^0 начальных условий возможно построение поверхности π_k методом статистических испытаний.

Сфера контроля. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (14):

$$x' = f_0(x,t),\ x(t_0) = x^0 \in S^0,\ \ t_0 \le t \le T_0, \tag{21}$$

где $f_0(x,t)$ — непрерывная вектор-функция; S^0 — известная сфера начальных значений с центром в начале координат радиуса R^0; T_0 — конечное время.

Предположим, что система (21) асимптотически устойчива в начале координат и описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени и рассматриваемой области пространства СУ $u(t)$. Структуру СУ ($u(t)$) и ее параметры выбираем, исходя из цели управления (16) и условий устойчивости системы (21), полученных, например, с помощью функции Ляпунова $v(x,t) > 0$. Систему (21), удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют исправной.

Пусть в СУ движением объекта (6) может произойти l неисправностей. Формально определяем неисправность так. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (21) изменяется каким-либо из l способов. При этом она заменяется одной из систем следующего вида:

$$x' = f_j(x,t),\ x(t_0) = x^0 \in S^0,\ \ t_0 \le t \le T_0,\ \ j = 1,\dots,l. \tag{22}$$

Траектория системы (21) после возникновения неисправности непрерывно продолжается траекторией одной из систем (22).

Предположим, что наблюдение за компонентами вектора (20) дает возможность судить о том, исправна система (22) или в ней произошла неисправность. Задачу контроля сформулируем так.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (21) с начальными условиями из выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0$ лежали внутри сферы S_R, а траектории систем (22) пересекались со сферой S_R.

Пусть система (21) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности таковы, что делают систему (21) неустойчивой [3]. В случайный момент времени происходит неисправность, т.е. непрерывный переход на траекторию одной из систем (22), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя на интервале времени $[t_0, T_0]$ систему (21), можно построить m ансамблей фазовых портретов координат вектора контроля $y(t)$. Сферой контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем (22) имеются устойчивые системы. Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из сферы S^0, также должны пересекать сферу S_R.

Рассмотрим сферу контроля S_R и квадратичную форму $(y, y') = 0$. Этим уравнением для каждой из систем (22) определяется некоторый объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема изнутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим S_R^j, $j = 1, \ldots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-й системы (22) с начальными условиями из сферы S^0радиуса R^0 $(R^0 < R)$, будут выходить из S_R через область S_R^j. Те области S_R^j, которые не пересекаются с другими при попадании в них фазовой траектории вектора контроля, определяют номер неисправности. В противном случае j-я гипотеза отбрасывается.

Таким образом, при решении задачи контроля можно уменьшить список (22) и даже диагностировать некоторые неисправности.

Эллипсоид контроля. Одной из основных задач контроля движения управляемой системы является сокращение избыточной информации и получение такой информации, которая позволяет не пропускать недопустимое состояние системы. В этой связи рассмотрим другой возможный подход при решении задачи внешнетраекторного контроля.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой описывается нелинейными уравнениями:

$$x' = Ax + b\xi, \ \xi' = \varphi(\sigma), \ \sigma = C^T x - \rho\xi, \tag{23}$$

где A — устойчивая матрица с постоянными коэффициентами; b, C, ρ — постоянные матрицы; ξ — управляющее воздействие; φ принадлежит классу допустимых функций (4).

Уравнения (23) преобразуем к виду

$$\zeta' = A\zeta + b\varphi\,(\sigma),\ \ \sigma' = C^T\zeta - \rho\varphi\,(\sigma). \tag{24}$$

При этом для невырожденности преобразования $\zeta = Ax + b\,\xi$, $\sigma = C^T x - \rho\xi$ необходимо и достаточно, чтобы определитель $\begin{vmatrix} A & b \\ C^T & -\rho \end{vmatrix}$ не был равен нулю.

Предположим, что на координаты вектора контроля (20) наложено следующее ограничение на интервале $t \in [t_0, T_0]$ движения системы:

$$(|x_{k_1}|, \dots, |x_{k_m}|) \le (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_m(t)), \tag{25}$$

где $\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_m(t)$ — непрерывные положительные функции.

Требуется в фазовом пространстве $R^n\{x\}$ найти область, в которой может находиться вектор состояния системы (24), такую, что движение системы, начавшееся в любой точке этой области, гарантирует выполнение условия (25), при этом для каждой координаты, не входящей в вектор контроля (20), в каждый момент времени $t \in [t_0, T_0]$ можно найти интервал изменения, также гарантирующий выполнение условия (24).

Поставленная задача решается методом построения для системы (24) функции Ляпунова в форме Лурье,

$$V = x^T Bx + \int_0^{\eta} \varphi\,(\eta)\,d\eta\,, \tag{26}$$

с матрицей B, которая является решением алгебраического уравнения Ляпунова $A^T B + BA = -C_0$, где C_0 — некоторая симметричная положительно определенная матрица.

Значение квадратичной формы

$$x^T Bx = D \tag{27}$$

на некоторой положительной постоянной D определяется в фазовом пространстве эллипсоидом. Матрица B задает форму эллипсоида, а постоянная D — его размер. Значения полуосей d_k этого эллипсоида определяются величинами собственных чисел λ_k матрицы B, $d_k = \sqrt{D/\lambda_k}$, а направления главных осей совпадают с собственными ее векторами.

Величину D размера эллипсоида (27) выберем так, чтобы изменяющаяся поверхность функции Ляпунова (26) лежала внутри эллипсоида (27). Выбранный таким образом эллипсоид (27) будет областью функционирования рассматриваемой системы (23), и он может быть выбран в качестве эллипсоида контроля. Вариант построения областей допустимых отклонений в задаче контроля для линейных систем дифференциальных уравнений описан в [4].

Трубка контроля. Рассмотрим управляемую систему (21). Множество начальных условий системы (21) представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 в пространстве фазовых переменных с центром в (неособой) точке x_0.

Выполняя розыгрыш начальных условий и интегрируя с этими начальными условиями системы (21) и (22) в пространстве вектора контроля (20) вокруг программной траектории, можно построить трубку такую, что траектории вектора контроля $y(t)$ на интервале времени $[t_0, T_0]$ системы (21) будут лежать внутри трубки, а для систем (22) — пересекаться с ее поверхностью. Выход траектории вектора контроля системы на поверхность трубки контроля будет означать, что в диагностическом пространстве рассматриваемой управляемой системы произошла неисправность. Построение трубки для контроля при движении по глиссаде описано в [4].

Расширенная постановка задачи контроля. Рассмотрим диагностическое пространство (13), в котором протекают процессы, описываемые уравнениями (14) и (19), а также уравнениями

$$x' = F(x, t), \tag{28}$$

обусловленными неисправностями не из априорного списка, но близкими к ним, произошедшими в их окрестностях $O_1, \ldots, O_l$ пространства (13).

Динамическая система (28) содержит элементы с неполной информацией, и для ее описания используют дифференциальные включения

$$x' \in F(x, t), \;\; F(x, t) \in f(x, t), \tag{29}$$

где $F(x, t)$ — обусловленное возникновением неисправностей не из априорного списка множество скоростей, которые могут возникнуть в сферах влияния опорных систем (19), т.е. в окрестностях $O_1, \ldots, O_l$ опорных неисправностей пространства (13).

Сформулируем расширенную постановку задачи контроля.

Пусть даны уравнения (14), ограниченное множество X^0 начальных условий, время T, набор функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \ldots, l$, и диагностическое пространство (13).

Требуется найти вектор контроля (20) такой, чтобы он содержал минимальное подмножество координат фазового вектора $x(t)$ состояния системы и позволял построить выпуклую поверхность π_k минимального объема в пространстве координат найденного вектора $y(t)$ такую, что вектор $y(t)$, составленный из компонент решения уравнения (14) на отрезке $[t_0, T]$, не выйдет на поверхность π_k, а векторы контроля $y(t)$, составленные из соответствующих компонент решений любой из систем (19), (28), (29), обусловленной неисправностью не из априорного списка, но принадлежащей окрестностям $O_1, \ldots, O_l$ диагностического пространства (13) и приводящей к недопустимым отклонениям системы (14) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выйдут на поверхность π_k в момент времени $t_k \in [t_0, T]$.

Таким образом, критерием наличия неисправности в диагностическом пространстве объекта, движение которого описано уравнениями (14), будет выход вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k в некоторый момент времени $t_k < T$.

Задача диагностирования (точные траекторные измерения). Рассмотрим систему, движение которой описано системой уравнений (14). Пусть осуществлен синтез управления и параметры выбраны так, что уравнения (14) описывают желаемое движение. Такую схему, как указано выше, принято называть исправной.

Набор моделей (14), (19) невырожден, и их можно рассматривать объединенными:

$$x' = f_j(x, t), \; j = 0, \ldots, l. \tag{30}$$

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют дифференциальные включения [3]:

$$x' \in F(x, t), \tag{31}$$

где вектор x характеризует отклонение системы от состояния, предписанного целью управления, а через $F(x, t)$ обозначено множество скоростей,

$$F(x, t) \in f_j(x, t), \; j = 0, \ldots, l. \tag{32}$$

Множество $F(x, t)$ функций $f_j(x, t)$ дифференциального включения (31), (32), например для систем (5), (6), формируется с помощью функции $\xi(t)$, моделирующет воздействие СУ, в соответствии с рассмотренной классификацией неисправностей.

Под решением дифференциального включения (31), (32) [6] понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая соотношению $x' \in F(x(t), t)$ при всех t на рассматриваемом интервале и соотношению $x(t_0) \in \Xi$. Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приведены в [14].

Процесс анализа траектории систем (30) после выхода фазовой траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность π_k назовем алгоритмом диагностирования. Будем считать, что время диагностирования τ задано таким, что $\tau_0 < \tau < T_0$. Для этого случая сформулируем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) = (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \tag{33}$$

компоненты которого являются подмножеством компонент вектора $x(t)$, причем $m \le q$. Предположим, вектор $z(t)$ такой, что характер функции $f_j(x,t)$ проявляется в поведении компонент вектора $z(t)$, который назовем вектором диагностирования.

Задачу диагностирования сформулируем так.

Пусть известны невырожденные уравнения (30), поверхность π_k, момент времени τ_0 выхода вектора контроля на π_k и значение фазового вектора $x(\tau_0)$. Требуется по измерению фазового вектора $x(t)$ в некоторые последующие после выхода на π_k моменты времени t_k на интервале $[\tau_0, \tau]$ с помощью вектора диагностирования $z(t)$ однозначно определить номер j функции $f_j(x,t)$ из (30) ($\tau < T_0$).

Рассмотрим случай $q = n$. Через $x_j(t)$ обозначим точку траектории j-й системы (30). Примем за начало отсчета времени момент выхода $x(t)$ на поверхность π_k. Введем натуральное число N. Будем проводить измерения в следующие моменты времени:

$$\tau_0 = 0,\ t_1 = \tau / N,\ t_2 = 2\tau / N,\ \dots,\ t_N = \tau.$$

Введем обозначения:

$$x_{0j} = x_j(0),\ x_{1j} = x_j(\tau / N),$$

$$x_{2j} = x_j(2\tau / N),\ \dots,\ x_{Nj} = x_j(\tau),$$

$$x_0 = x(0),\ x_1 = x(\tau / N),\ x_2 = x(2\tau / N),\ \dots,\ x_N = x(\tau).$$

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на поверхность π_k и далее получены значения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Необходимо проверить полную систему l гипотез: j-я гипотеза — это утверждение о том, что $x(t)$ есть траектория j-й системы (30), т. е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим функционал

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n} (x_{is} - x_{ijs})^2,\ j = 0, \dots, l.$$

Здесь x_{is} — s-я компонента вектора состояния $x(t)$, измеренная в момент времени t_i, $i = 1, \dots, N$; x_{ijs} — s-я компонента вектора состояния в момент времени t_i, полученная в результате интегрирования системы (32) с f_j в правой части. Для каждых j и N величина S_j^N имеет свое значение, т.е. является переменной, заданной на множестве функций.

Теорема. Для невырожденного конечного набора систем (32), дифференциального включения $x' \in F(x,t) \in f_j(x,t)$ и всех j найдутся такие S_j^N, M_j, S_j и $\overline{N}$, что для $N > \overline{N}$ с помощью функционала S_j^N неисправность, возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале $[t_0, T_0]$ и удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно как одна из систем (30), если

1. $S_j^N \le M_j$ (числа M_j построены по $\max\limits_j S_j^N = o(1/N)$),

2. $S_j^N = S_j$ (числа S_j построены по $\min\limits_j S_j^N$).

Расширенная постановка задачи диагностирования [12, 15—17]. Рассмотрим управляемый объект, описываемый уравнениями (14), и введем в рассмотрение вектор диагностирования (33) и функционал

$$S^j = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{s=1}^{q} (z_{ijs} - z_{is})^2, \; q = 1,\dots,n, \; j = 0,\dots,l, \tag{34}$$

где z_{ijs} — значение s-й компоненты вектора $z(t)$ в момент $t_i = 1,\dots,N_j$, полученное в результате интегрирования системы (30) с f_j; z_{is} — значение s-й компоненты вектора $z(t)$, измеренное в момент времени t_i; N_j — минимальное число измерений компонент вектора $z(t)$, необходимое и достаточное для диагностирования j-й неисправности.

Расширенную задачу диагностирования сформулируем так.

Пусть известны невырожденные уравнения (19), поверхность π_k, функциональное состояние системы $x(\tau_0)$ в момент τ_0 выхода ее траектории на поверхность π_k, структура вектора (33) и функционала (34). Требуется выбрать вектор $z(t)$, содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния $x(t)$ и такой, чтобы с помощью функционала

$$S^j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{q} (z_{ijs} - z_{is})^2, \; N = \max_j N_j, \tag{35}$$

любая возникшая неисправность из априорного списка (8) или произошедшая в ее окрестности и обусловившая выход вектора контроля $z(t)$ на поверхность контроля π_k была однозначно диагностирована как одна из функций f_j в (30), т.е. номер j (вне зависимости от того, какая неисправность произошла: предусмотренная опорным списком или в его окрестности) был однозначно определен за минимально возможное время $\tau - \tau_0$.

Следовательно, после выхода фазовой траектории системы в момент времени τ_0 на поверхность π_k в процессе слежения за внешней траекторией системы с помощью функционала (35) возникшие неисправности из заданного списка и их окрестностей должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время $\tau - \tau_0$ [17].

A principal possibility of solution is shown for the problem of differential diagnosis at the level of mathematical models, algorithms and programs with the help of external trajectory control by computers.

1. *Minorsky N.* Directional Stability of Automatically Steering Bodies // J. Amer. Soc. Navel Engineers. — 1922. — Vol. 34, №3. — P. 113.
2. *Окунев Ю. М., Парусников Н. А.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М. : Изд-во МГУ, 1983. — 187 с.
3. *Борисенок И. Т.* К вопросу о дифференциальной теории восстановления. Некоторые вопросы управления и устойчивости механических систем// Научн. тр. Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. — М. : Изд-во МГУ, 1973. — № 22. — С. 101—108.
4. *Борисенок И. Т., Беляков В. И.* Построение областей допустимых отклонений для задачи контроля // Тез. докл. IV Всесоюзного совещания по технической диагностике. Черкассы, 1979. Ч. 2. — М. : Наука, 1979. — С. 24—26.
5. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление//Сб. обз. статей МИАН СССР «Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы». Ч. 2. Т. 169. — М. : Наука, 1985. — С. 194—252.
6. *Корноушенко Е. К., Пылаев Н. К.* Передаточные числа и диагностирование линейных систем / ДАН СССР. — 1988. — Т. 300, № 3. — С. 559—561.
7. *Мироновский Л. А.* Диагностирование динамических звеньев ГПС // Судостроительная промышленность. Сер. Системы автоматизации проектирования, производства и управления. — 1987. — Вып. 8. — С. 23—31.
8. *Мироновский Л. А.* Взаимосвязь параллельной и сбалансированной канонических форм // Электрон. моделирование. — 1989. — № 6. — С. 8—10.
9. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 8. — С. 120—128.
10. *Шумский А. Е.* Поиск дефектов в нелинейных системах методом функционального диагностирования на основе алгебраических инвариантов // Электрон. моделирование. — 1992. — **14**, № 1. — С. 70—76.
11. *Frank P. M.* Advances in Observer-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems // Там же. — 1995. — **17**, № 5. — С. 5—25.
12. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е. — М. : Экзамен, 2007. — 320 с.
13. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 3. — С. 24—36.
14. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями //Там же. — 1987. — № 10. — С. 38—46.
15. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения — III». Брест, 14—16.05.1996. — Брест : 1996. — С. 102.

16. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. 5-го Междунар. совещания-семинара «Инженерно-физические проблемы новой техники». Москва, 19—22.05.1998. — М. : Изд-во МГТУ, 1998. — С. 6—7.
17. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — Т. 5. — Вып. 3. — С. 775— 790.

Поступила 21.12.07;
после доработки 17.07.08

ШАМОЛИН Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та механики МГУ им. Ломоносова. В 1988 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — классическая механика, дифференциальная и топологическая диагностика, качественная теория динамических систем, алгебраическая и дифференциальная топология, геометрия.