



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

А. В. Жильцов, канд. техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова 15,
тел.: (044) 4249160, E-mail: azhilt@mail.ru)

Математическая модель неустановившегося магнитогидродинамического процесса в осесимметричных электротехнических устройствах

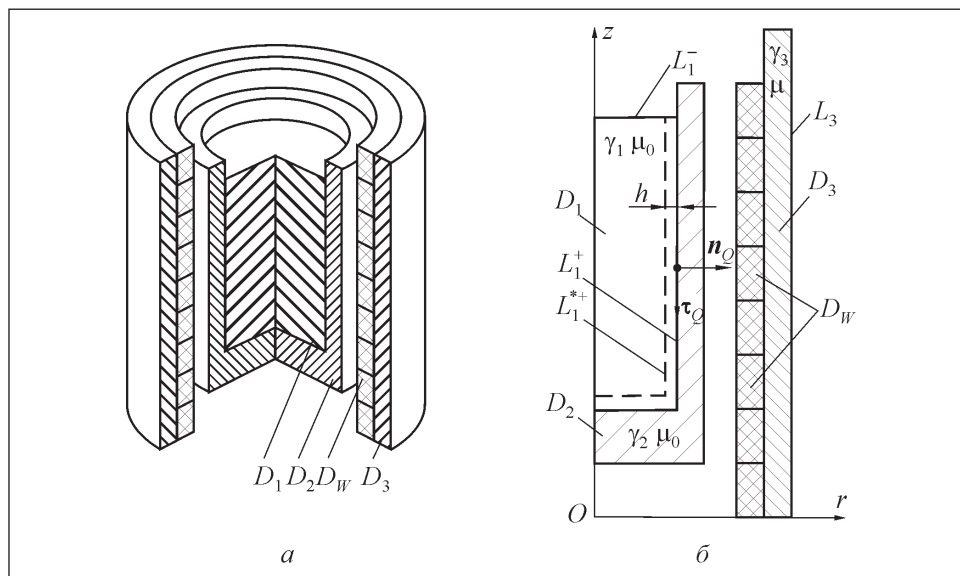
(Статью представил д-р техн. наук В. С. Годлевский)

На основе интегро-дифференциальных уравнений построена математическая модель нестационарного магнитогидродинамического процесса в осесимметричном электротехническом устройстве с жидким проводником. С применением декомпозиции задача сводится к решению двух подзадач: электромагнитной и гидродинамической. Особенностью последней является отсутствие в интегро-дифференциальных уравнениях, к решению которых она сводится, производных по пространственным переменным от искомых функций, что устраняет погрешности, вносимые в конечный результат от их аппроксимации конечномерными аналогами.

На основі інтегро-диференціальних рівнянь побудовано математичну модель нестационарного магнітогідродинамічного процесу в вісесиметричному електротехнічному пристрої з рідким провідником. При застосуванні декомпозиції задача зводиться до розв'язання двох підзадач: електромагнітної та гідродинамічної. Особливістю останньої є відсутність в інтегро-диференціальних рівняннях, до розв'язання яких вона зводиться, похідних по просторовим змінним від шуканих функцій, що усуває похибки, внесені в кінцевий результат від їхньої апроксимації скінченновимірними аналогами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: МГД процесс, интегро-дифференциальная модель, электромагнитные силы, жидкий металл, индукционный перемешиватель.

Для моделирования магнитогидродинамического (МГД) процесса в электротехническом устройстве с жидким проводником необходима постановка и решение двух связанных задач: электромагнитной и гидродинамической. Построению математической модели расчета вихревых токов в синусоидальном режиме для осесимметричной системы посвящена работа [1], в которой на основе метода блочной итерации построен алгоритм ее компьютерной реализации. Однако не менее важным является изучение неустановившихся (импульсных) электромагнитных процессов в проводящих средах: применение импульсного поля для воздействия на кристаллизующийся металл.



Устройство с осесимметричным магнитным полем (а) и его сечение меридианной плоскостью (б): D_1 и D_2 — сечение массивного проводника в жидкой и твердой фазах; D_3 — сечение массивного магнитопровода; D_W — сечения катушек обмотки индуктора

В [2] на основе метода конечных разностей предложен ряд математических моделей для расчета поля скоростей в жидком металле и на их основе проведен анализ влияния импульсного электромагнитного поля на процесс его перемешивания.

Вследствие конструктивных особенностей систем электромагнитного воздействия на металл в них присутствуют сильные магнитные поля рассеивания, для учета которых при применении конечно-разностных методов необходимо существенно увеличивать сетку разбиения расчетной области, хотя в этом нет необходимости, так как интерес представляет распределение электромагнитных сил в жидком металле. В этом случае оптимальным (для уменьшения расчетной области) является метод интегральных уравнений, на основе которого разработана алгоритмическая компьютерно-ориентированная математическая модель неустановившегося МГД процесса в рассматриваемом классе устройств.

Процесс моделирования связанных электромагнитных и гидродинамических полей состоит из двух блоков:

1) электромагнитная задача — на заданном поле скоростей в жидком проводнике рассчитывают распределение вихревых токов в массивных проводниках и токов намагниченности на границе магнитопровода, а по ним — электродинамические усилия в нем [3];

2) гидродинамическая задача — на заданном поле электродинамических усилий в жидком проводнике рассчитывают поле скоростей в нем [4].

Следует заметить, что при численной реализации второго блока возникает необходимость в аппроксимации пространственных производных от искоемых функций конечномерными аналогами, а это вносит дополнительные погрешности в решение. В связи с этим система интегро-дифференциальных уравнений, полученная в [4], преобразуется к виду, в котором указанные производные отсутствуют. На ее основе разработан алгоритм компьютерной реализации математической модели для расчета поля скоростей в сечении жидкого проводника.

Рассмотрим осесимметричную электромагнитную систему, представленную на рисунке. Будем считать заданными ее геометрические размеры и электрофизические характеристики материалов. Предположим, что ток в обмотке индуктора изменяется по заданному закону. При импульсном характере воздействия электромагнитного поля на жидкий металл (несколько миллисекунд) изменение температуры по сечению области, которую он занимает, незначительно, что позволяет проводимость и вязкость материала считать постоянными.

Электромагнитная задача. Интегро-дифференциальные уравнения. Расчет вихревых токов в массивных проводниках для рассматриваемого устройства сводится к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \sigma(Q, t) + \frac{\chi}{\pi} \oint_{L_3} \sigma(M, t) P(Q, M) dl_M + \frac{\chi}{\pi} \sum_{m=1}^2 \int_{D_m} \delta_m(M, t) P(Q, M) ds_M + \\ + \frac{\mu \chi}{\mu_0 \pi} \int_{D_3} \delta_3(M, t) P(Q, M) ds_M = -\frac{\chi}{\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) P(Q, M) ds_M, \\ Q \in L_3; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_3} \sigma(M, t) T(Q, M) dl_M + \frac{\delta_1(Q, t)}{\gamma_1 \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^2 \int_{D_m} \delta_m(M, t) T(Q, M) ds_M + \\ + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_3} \delta_3(M, t) T(Q, M) ds_M = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \delta_W(M, t) T(Q, M) ds_M + \frac{1}{\lambda} \Phi(Q, t), \\ Q \in D_1; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_3} \sigma(M, t) T(Q, M) dl_M + \frac{\delta_q(Q, t)}{\gamma_q \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^2 \int_{D_m} \delta_m(M, t) T(Q, M) ds_M +$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_3} \delta_3(M, t) T(Q, M) ds_M = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \delta_W(M, t) T(Q, M) ds_M, \\
 Q \in D_q, \quad q = \overline{1, 2}, \tag{3}
 \end{aligned}$$

где $\sigma(M, t)$ — проекция на азимутальное направление мгновенной поверхностной плотности простого слоя токов намагниченности на следе границы L_3 , образованном сечением меридианной плоскостью границы магнитопровода; $\delta_m(M, t)$ — проекция на азимутальное направление мгновенной плотности вихревых токов в меридианном сечении области D_m , $m = 1, 2, 3$; $\delta_W(M, t)$ — проекция на азимутальное направление мгновенной плотности токов в катушках обмотки индуктора; $\chi = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$; μ — абсолютная магнитная проницаемость магнитопровода; μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость внешней по отношению к магнитопроводу среды (в данном случае принимается равной магнитной постоянной), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; γ_m — удельная проводимость материала массивного проводника D_m , $m = 1, 2, 3$; $\lambda = \mu_0 / (2\pi)$;

$$P(Q, M) = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{n}_Q, \mathbf{b}(Q, M)]) = n_{Qz} b_r(Q, M) - n_{Qr} b_z(Q, M);$$

$$\mathbf{n}_Q = n_{Qr} \mathbf{e}_r + n_{Qz} \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{b}(Q, M) = \mathbf{e}_r b_r(Q, M) + \mathbf{e}_z b_z(Q, M), \tag{4}$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$ — орты соответствующих осей цилиндрической системы координат;

$$\begin{aligned}
 b_r(Q, M) = - \frac{(z_M - z_Q)}{r_Q \sqrt{(r_M + r_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2}} \left[-K(k) + \frac{r_M^2 + r_Q^2 + (z_M - z_Q)^2}{(r_M - r_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2} E(k) \right]; \\
 b_z(Q, M) = \frac{1}{\sqrt{(r_M + r_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2}} \left[K(k) + \frac{r_M^2 - r_Q^2 - (z_M - z_Q)^2}{(r_M - r_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2} E(k) \right]; \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$T(Q, M) = \sqrt{\frac{r_M}{r_Q}} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right];$$

$(r_Q, z_Q), (r_M, z_M)$ — координаты точек Q и M в цилиндрической системе координат; $K(k), E(k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода аргумента k ,

$$k^2 = \frac{4r_Q r_M}{(r_M + r_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2}.$$

В уравнении (2) обозначено

$$\Phi(Q, t) = V_z(Q, t)B_r(Q, t) - V_r(Q, t)B_z(Q, t), \quad (6)$$

где $V_r(Q, t), V_z(Q, t)$ — мгновенные значения проекций скорости в точке Q на оси Or и Oz ; $B_r(Q, t), B_z(Q, t)$ — мгновенные значения проекций магнитной индукции на те же оси.

Поскольку магнитная индукция определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(Q, t) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \mathbf{b}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^2 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \mathbf{b}(Q, M) ds_M + \\ & + \frac{\mu}{2\pi} \int_{D_3} \delta_3(M, t) \mathbf{b}(Q, M) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_3} \sigma(M, t) \mathbf{b}(Q, M) dl_M, \end{aligned}$$

выражение (6) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Phi(Q, t) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \phi(Q, M, t) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^2 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \phi(Q, M, t) ds_M + \\ & + \frac{\mu}{2\pi} \int_{D_3} \delta_3(M, t) \phi(Q, M, t) ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_3} \sigma(M, t) \phi(Q, M, t) dl_M, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\phi(Q, M, t) = V_z(Q, t)b_r(Q, M) - V_r(Q, t)b_z(Q, M)$.

Аппроксимация по пространственным переменным. Разбиваем меридианное сечение каждого из массивных проводников $D_m, m=1, 2, 3$, соответственно на N_{D_m} элементарных областей $\Delta S_m^i, i=1, 2, \dots, N_{D_m}$, а след L_3 от сечения меридианной плоскостью границы магнитопровода на N_{L_3} элементарных участков $\Delta L_3^i, i=1, 2, \dots, N_{L_3}$. Сечение обмотки разбиваем на N_{D_W} областей, каждая из которых есть сечение катушки. Применяя метод полного осреднения, систему интегро-дифференциальных уравнений (1) — (3) аппроксимируем следующей системой уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} \pi \\ \chi \end{array} \Delta \mathbf{L}_3 + \mathbf{P}_{L_3 L_3} \right] \boldsymbol{\sigma}(t) + \sum_{m=1}^2 \mathbf{P}_{L_3 D_m} \boldsymbol{\delta}_m(t) + \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{P}_{L_3 D_3} \boldsymbol{\delta}_3(t) = -\mathbf{P}_{L_3 D_W} \boldsymbol{\delta}_W(t); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 L_3} \boldsymbol{\sigma}(t) + \frac{\Delta \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\delta}_1(t)}{\gamma_1 \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^2 \mathbf{T}_{D_1 D_m} \boldsymbol{\delta}_m(t) + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 D_3} \boldsymbol{\delta}_3(t) = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 D_W} \boldsymbol{\delta}_W(t) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{s} \Phi(t); \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_q L_3} \boldsymbol{\sigma}(t) + \frac{\Delta \mathbf{S}_q \boldsymbol{\delta}_q(t)}{\gamma_q \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^2 \mathbf{T}_{D_q D_m} \boldsymbol{\delta}_m(t) + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_q D_3} \boldsymbol{\delta}_3(t) = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_q D_W} \boldsymbol{\delta}_W(t), \quad q = \overline{2, 3}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(t) = \{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_{N_{L_3}}(t)\}$ — вектор-столбец, элементами которого являются значения мгновенной плотности токов намагниченности в центре элементарного участка ΔL_3^i , $i = 1, 2, \dots, N_{L_3}$; $\boldsymbol{\delta}_m(t) = \{\delta_{m1}(t), \delta_{m2}(t), \dots, \delta_{mN_{D_m}}(t)\}$ — вектор-столбец, элементами которого являются мгновенные значения плотности вихревых токов в центре элементарной области ΔS_m^i , $i = 1, 2, \dots, N_{D_m}$; $\Delta \mathbf{L}_3 = \text{diag} \{ \Delta L_3^1, \Delta L_3^2, \dots, \Delta L_3^{N_{L_3}} \}$ — диагональная матрица размерности $N_{L_3} \times N_{L_3}$, ее элементами являются длины отрезков ΔL_3^i , $i = 1, 2, \dots, N_{L_3}$, на которые разбивается граница L_3 ; $\Delta \mathbf{S}_q = \text{diag} \{ \Delta S_q^1, \Delta S_q^2, \dots, \Delta S_q^{N_{D_q}} \}$ — диагональная матрица размерности $N_{D_q} \times N_{D_q}$, ее элементами являются площади элементов ΔS_q^i , $i = 1, 2, \dots, N_{D_q}$, на которые разбивается сечение D_q , $q = 1, 2, 3$.

В уравнениях (8) — (10) введены следующие обозначения матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{L_3 L_3} &= \left\| \int_{\Delta L_3^i} \int_{\Delta L_3^j} P(Q, M) dl_M dl_Q \right\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_{L_3}; \\ \mathbf{P}_{L_3 D_m} &= \left\| \int_{\Delta L_3^i} \int_{\Delta S_m^j} P(Q, M) ds_M dl_Q \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N_{L_3}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{D_m}, \quad m = 1, 2, 3; \\ \mathbf{P}_{L_3 D_W} &= \left\| \int_{\Delta L_3^i} \int_{\Delta S_W^j} P(Q, M) ds_M dl_Q \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N_{L_3}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{D_W}; \\ \mathbf{T}_{D_q L_3} &= \left\| \int_{\Delta S_q^i} \int_{\Delta L_3^j} T(Q, M) dl_M ds_Q \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N_{D_q}, \quad q = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, N_{L_3}; \\ \mathbf{T}_{D_q D_m} &= \left\| \int_{\Delta S_q^i} \int_{\Delta S_m^j} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N_{D_q}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{D_m}, \quad q, m = 1, 2, 3; \\ \mathbf{T}_{D_q D_W} &= \left\| \int_{\Delta S_q^i} \int_{\Delta S_W^j} T(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, N_{D_q}, \quad q = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, N_{D_W}. \end{aligned}$$

Для определения $\mathbf{s}\Phi(t)$ проинтегрируем (7) по каждой элементарной области $\Delta S_1^i, i=1,2,\dots, N_{D_1}$. В результате получаем

$$\mathbf{s}\Phi(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\mathbf{T}_{VD_W}(t) \delta_W(t) + \sum_{m=1}^2 \mathbf{T}_{VD_m}(t) \delta_m(t) + \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{T}_{VD_3}(t) \delta_3(t) + \mathbf{T}_{VL_3}(t) \sigma(t) \right], \quad (11)$$

где

$$\mathbf{T}_{VD_W}(t) = \mathbf{V}_z(t) \mathbf{R}_{D_1 D_W} - \mathbf{V}_r(t) \mathbf{Z}_{D_1 D_W};$$

$$\mathbf{T}_{VD_m}(t) = \mathbf{V}_z(t) \mathbf{R}_{D_1 D_m} - \mathbf{V}_r(t) \mathbf{Z}_{D_1 D_m}, \quad m=1, 2, 3;$$

$$\mathbf{T}_{VL_3}(t) = \mathbf{V}_z(t) \mathbf{R}_{D_1 L_3} - \mathbf{V}_r(t) \mathbf{Z}_{D_1 L_3};$$

$\mathbf{V}_r(t) = \text{diag} \{V_{r1}(t), V_{r2}(t), \dots, V_{rN_{D_1}}(t)\}$, $\mathbf{V}_z(t) = \text{diag} \{V_{z1}(t), V_{z2}(t), \dots, V_{zN_{D_1}}(t)\}$ — диагональные матрицы размерности $N_{D_1} \times N_{D_1}$, элементами которых являются значения мгновенных проекций скорости на оси соответственно Ox и Oz в центрах элементарных областей $\Delta S_1^i, i=1,2,\dots, N_{D_1}$;

$$\mathbf{Z}_{D_1 D_W} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta S_W^j} b_z(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad \mathbf{R}_{D_1 D_W} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta S_W^j} b_r(Q, M) ds_M ds_Q \right\|,$$

$$i=1, 2, \dots, N_{D_1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{D_W};$$

$$\mathbf{Z}_{D_1 D_m} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta S_m^j} b_z(Q, M) ds_M ds_Q \right\|, \quad \mathbf{R}_{D_1 D_m} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta S_m^j} b_r(Q, M) ds_M ds_Q \right\|,$$

$$i=1, 2, \dots, N_{D_1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{D_m}, \quad m=1, 2, 3;$$

$$\mathbf{Z}_{D_1 L_3} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta L_3^j} b_z(Q, M) dl_M ds_Q \right\|, \quad \mathbf{R}_{D_1 L_3} = \left\| \int_{\Delta S_1^i \Delta L_3^j} b_r(Q, M) dl_M ds_Q \right\|,$$

$$i=1, 2, \dots, N_{D_1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{L_3}.$$

Таким образом, уравнение (9) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 L_3} \sigma(t) - \mathbf{T}_{VL_3}(t) \sigma(t) + \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \Delta S_1 \delta_1(t) + \sum_{m=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 D_m} \delta_m(t) - \mathbf{T}_{VD_m}(t) \delta_m(t) \right] +$$

$$+\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{T}_{D_1D_3}\boldsymbol{\delta}_3(t)-\mathbf{T}_{VD_3}(t)\boldsymbol{\delta}_3(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{T}_{D_1D_W}\boldsymbol{\delta}_W(t)+\mathbf{T}_{VD_W}(t)\boldsymbol{\delta}_W(t). \quad (12)$$

Разностная схема для решения системы уравнений (8), (10), (12).

Первые варианты разностных схем для решения аналогичных уравнений, к решению которых сводится расчет вихревых токов в массивных проводниках, описаны в работе [5]. В работах [6—9] построены схемы, отличительной особенностью которых является то, что аппроксимируются не исходные дифференциальные уравнения, а эквивалентные им интегральные уравнения Вольтеры, полученные после интегрирования исходных в интервале $[t_0, t]$. В работах [10, 11] указанные схемы применены при решении системы интегро-дифференциальных уравнений для расчета поля скоростей в плоскопараллельном приближении. Используем приведенные в указанных работах схемы для решения рассматриваемой задачи.

На оси времени выбираем в общем случае неравномерную сетку $t_n = n\tau_n$, $n=1, 2, 3, \dots$, где τ_n — шаг временной сетки; индекс n соответствует временному слою. Пусть задача решена на слое t_{n-1} . Для того чтобы получить разностную схему, проинтегрируем уравнения (9), (11) по времени в интервале $[t_{n-1}, t_n]$. Затем используем для вычисления интегралов соотношение

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) dt = [cf^{(n)} + (1-c)f^{(n-1)}]\tau_n, \quad (13)$$

где значения функции $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$ соответствуют моментам времени t_n , t_{n-1} ; c — весовой множитель, принимающий значения из множества $\{0; 0,5; 1\}$. При $c=0$ и $c=1$ формула (13) представляет собой формулу прямоугольников, а при $c=0,5$ — формулу трапеций. В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{D_1L_3}^{(n)}\boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \frac{c\tau_n}{\gamma_1\lambda}\Delta\mathbf{S}_1\boldsymbol{\delta}_1^{(n)} + \sum_{m=1}^2\tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_m}^{(n)}\boldsymbol{\delta}_m^{(n)} + \frac{\mu}{\mu_0}\tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_3}^{(n)}\boldsymbol{\delta}_3^{(n)} = \mathbf{G}_{D_1}^{(n-1)}; \\ \mathbf{T}_{D_qL_3}\boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \frac{c\tau_n}{\gamma_q\lambda}\Delta\mathbf{S}_q\boldsymbol{\delta}_q^{(n)} + \sum_{m=1}^2\mathbf{T}_{D_qD_m}\boldsymbol{\delta}_m^{(n)} + \frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{T}_{D_qD_3}\boldsymbol{\delta}_3^{(n)} = \mathbf{G}_{D_q}^{(n-1)}, \quad q=2,3, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{D_1}^{(n-1)} = \tilde{\mathbf{T}}_{D_1L_3}^{(n-1)}\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)} - \frac{(1-c)\tau_n}{\gamma_1\lambda}\Delta\mathbf{S}_1\boldsymbol{\delta}_1^{(n-1)} + \sum_{m=1}^2\tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_m}^{(n-1)}\boldsymbol{\delta}_m^{(n-1)} + \frac{\mu}{\mu_0}\tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_3}^{(n-1)}\boldsymbol{\delta}_3^{(n-1)} - \\ - \tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_m}^{(n)}\boldsymbol{\delta}_W^{(n)} + \tilde{\mathbf{T}}_{D_1D_W}^{(n-1)}\boldsymbol{\delta}_W^{(n-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{D_q}^{(n-1)} &= \mathbf{T}_{D_q L_3} \boldsymbol{\sigma}^{(n-1)} - \frac{(1-c)\tau_n}{\gamma_q \lambda} \Delta \mathbf{S}_q \boldsymbol{\delta}_q^{(n-1)} + \sum_{m=1}^2 \mathbf{T}_{D_q D_m} \boldsymbol{\delta}_m^{(n-1)} + \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{T}_{D_q D_3} \boldsymbol{\delta}_3^{(n-1)} - \\ &\quad - \mathbf{T}_{D_q D_W} \boldsymbol{\delta}_W^{(n)} + \mathbf{T}_{D_q D_W} \boldsymbol{\delta}_W^{(n-1)}; \\ \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 L_3}^{(n)} &= \mathbf{T}_{D_1 L_3} - c\tau_n \mathbf{T}_{VL_3}^{(n)}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 L_3}^{(n-1)} = \mathbf{T}_{D_1 L_3} + (1-c)\tau_n \mathbf{T}_{VL_3}^{(n-1)}; \\ \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 D_m}^{(n)} &= \mathbf{T}_{D_1 D_m} - c\tau_n \mathbf{T}_{VD_m}^{(n)}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 D_m}^{(n-1)} = \mathbf{T}_{D_1 D_m} + (1-c)\tau_n \mathbf{T}_{VD_m}^{(n-1)}, \quad m=1, 2, 3; \\ \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 D_W}^{(n)} &= \mathbf{T}_{D_1 D_W} - c\tau_n \mathbf{T}_{VD_W}^{(n)}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_{D_1 D_W}^{(n-1)} = \mathbf{T}_{D_1 D_W} + (1-c)\tau_n \mathbf{T}_{VD_W}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (14) совместно с уравнением (8) может быть решена одним из прямых методов или методом блочных итераций. Однако, как показывают результаты численного решения аналогичных задач, при числе неизвестных более трехсот метод блочных итераций является более экономным относительно вычислительных затрат, что актуально при проведении многовариантных расчетов.

После определения мгновенных плотностей вихревых токов в массивных проводниках и токов намагниченности на границе магнитопровода находим распределение мгновенных объемных электродинамических сил в сечении проводника в жидкой фазе:

$$\mathbf{F}(Q, t) = [\boldsymbol{\delta}_1(Q, t), \mathbf{B}(Q, t)] = \mathbf{e}_r \boldsymbol{\delta}_1(Q, t) B_z(Q, t) - \mathbf{e}_z \boldsymbol{\delta}_1(Q, t) B_r(Q, t). \quad (15)$$

На основании (15), используя метод полного осреднения, можем записать значения проекций объемной плотности сил, соответствующих n -му временному слою:

$$F_{ri}^{(n)} = \delta_{1i}^{(n)} B_{zi}^{(n)}, \quad F_{zi}^{(n)} = -\delta_{1i}^{(n)} B_{ri}^{(n)}, \quad i=1, 2, \dots, N_{D_1}, \quad (16)$$

где $\mathbf{B}_r^{(n)} = \{B_{r1}^{(n)}, B_{r2}^{(n)}, \dots, B_{rN_{D_1}}^{(n)}\}$, $\mathbf{B}_z^{(n)} = \{B_{z1}^{(n)}, B_{z2}^{(n)}, \dots, B_{zN_{D_1}}^{(n)}\}$ — вектор-столбцы, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r^{(n)} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \Delta \mathbf{S}_1^{-1} \left[\mathbf{R}_{D_1 D_W} \boldsymbol{\delta}_W^{(n)} + \sum_{m=1}^2 \mathbf{R}_{D_1 D_m} \boldsymbol{\delta}_m^{(n)} + \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{R}_{D_1 D_3} \boldsymbol{\delta}_3^{(n)} + \mathbf{R}_{D_1 L_3} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \right], \\ \mathbf{B}_z^{(n)} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \Delta \mathbf{S}_1^{-1} \left[\mathbf{Z}_{D_1 D_W} \boldsymbol{\delta}_W^{(n)} + \sum_{m=1}^2 \mathbf{Z}_{D_1 D_m} \boldsymbol{\delta}_m^{(n)} + \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{Z}_{D_1 D_3} \boldsymbol{\delta}_3^{(n)} + \mathbf{Z}_{D_1 L_3} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \right]. \end{aligned}$$

Полученные значения силы (16) используются при решении гидродинамической задачи.

Гидродинамическая задача. Система интегро-дифференциальных уравнений. Моделирование поля скоростей в меридианном сечении про-

водника в жидкой фазе сводится к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений в переменных вихрь — функция тока, эквивалентных уравнениям Навье—Стокса [4]:

$$\int_{L_1} \eta(M, t) T(Q, M) dl_M = - \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M, \quad Q \in L_1; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M + \int_{D_1} (\mathbf{V}(M, t), \text{grad } \zeta(M, t)) T(Q, M) ds_M - \\ & - v \int_{L_1} \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \int_{D_1} (\mathbf{e}_\alpha, \text{rot } \mathbf{F}(M, t)) T(Q, M) ds_M - 2\pi v \zeta^*(Q, t), \\ & Q \in L_1^+; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M + \int_{D_1} (\mathbf{V}(M, t), \text{grad } \zeta(M, t)) T(Q, M) ds_M - \\ & - v \int_{L_1} \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \int_{D_1} (\mathbf{e}_\alpha, \text{rot } \mathbf{F}(M, t)) T(Q, M) ds_M, \quad Q \in L_1^-; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & 2\pi v \zeta(Q, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M + \int_{D_1} (\mathbf{V}(M, t), \text{grad } \zeta(M, t)) T(Q, M) ds_M - \\ & - v \int_L \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \int_{D_1} (\mathbf{e}_\alpha, \text{rot } \mathbf{F}(M, t)) T(Q, M) ds_M, \quad Q \in D_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\eta(M, t)$, $\xi(M, t)$ — значения мгновенной плотности простого слоя в точке $M \in L_1$; $\zeta(M, t)$ — мгновенное значение вихря в точке $M \in D_1$; v — кинематическая вязкость жидкого металла; $\mathbf{F}(M, t)$ — объемная мгновенная плотность внешних сил в точке M , в том числе электромагнитных; $\zeta^*(Q, t) = -\frac{2}{h^2} \psi(Q^*, t)$, $Q \in L_1^+$ — краевое условие Тома [12], где Q^* лежит на предконтуре L_1^{*+} и на нормали \mathbf{n}_Q к L_1^+ в точке Q (см. рисунок, б); h — расстояние от L_1^+ до L_1^{*+} по нормали; $\psi(Q, t)$ — функция тока, определяемая соотношением

$$\psi(Q, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \eta(M, t) T(Q, M) dl_M. \quad (21)$$

Принимая во внимание связь $\mathbf{V} = \text{rot } \psi$ записываем выражение для скорости:

$$\mathbf{V}(Q, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \zeta(M, t) \mathbf{b}(Q, M) ds_M + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \eta(M, t) \mathbf{b}(Q, M) ds_M, \quad (22)$$

где $\mathbf{b}(Q, M)$ определяется соотношением (4). Здесь учтено, что в рассматриваемом осесимметричном случае $\psi_r = \psi_z = 0$ и $\psi_\alpha = \psi$.

Преобразование системы уравнений (18) — (20). При численном решении приведенной системы интегро-дифференциальных уравнений возникает необходимость в аппроксимации пространственных производных от неизвестных функций, а именно $\text{grad } \zeta(M, t)$, конечномерными аналогами. Это приводит к дополнительным погрешностям. Для того чтобы этого избежать, преобразуем систему уравнений к виду, где указанные производные уже отсутствуют.

Итак, учитывая, что $\text{div } \mathbf{V} = 0$ в D_1 и $\mathbf{V}(M, t) = 0$, $M \in L_1$, записываем [11]:

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} (\mathbf{V}(M, t), \text{grad}_M \zeta(M, t)) T(Q, M) ds_M = \\ & = - \int_{D_1} \zeta(M, t) (\mathbf{V}(M, t), \text{grad}_M (T(Q, M))) ds_M. \end{aligned}$$

Далее принимаем во внимание, что

$$\text{grad}_M (T(Q, M)) = \tilde{\mathbf{b}}(Q, M) = \mathbf{e}_r \tilde{b}_r(Q, M) + \mathbf{e}_z \tilde{b}_z(Q, M),$$

где $\tilde{b}_r(Q, M) = (r_M / r_Q) b_z(M, Q)$, $\tilde{b}_z(Q, M) = b_r(Q, M)$. Здесь $b_z(M, Q)$ определяется выражением (5), в котором координаты точек Q и M необходимо поменять местами.

Таким образом, записываем

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} (\mathbf{V}(M, t), \text{grad}_M \zeta(M, t)) T(Q, M) ds_M = \\ & = - \int_{D_1} \zeta(M, t) (\mathbf{V}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)) ds_M. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} (\mathbf{e}_\alpha, \text{rot}_M \mathbf{F}(M, t)) T(Q, M) ds_M = \int_{D_1} \text{rot}_M (\mathbf{F}(M, t) T(Q, M)) ds_M + \\ & + \int_{D_1} [\mathbf{F}(M, t), \text{grad}_M (T(Q, M))] ds_M = \oint_{L_1} \mathbf{F}(M, t), T(Q, M) dl_M + \end{aligned}$$

$$+ \int_{D_1} [\mathbf{F}(M, t) \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)] ds_M,$$

где $ds_M = \mathbf{e}_\alpha ds_M$; $d\mathbf{l}_M = \boldsymbol{\tau}_M dl_M$; $\boldsymbol{\tau}_M$ — вектор единичной длины, касательный к границе L_1 в точке M и лежащий в меридианной плоскости (см. рисунок б).

В результате, заменяя в системе (18) — (20) соответствующие интегралы найденными выражениями, приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений, в которой уже отсутствуют пространственные производные от искомых функций:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M - \int_{D_1} \zeta(M, t) (\mathbf{V}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)) ds_M - \\ & - v \int_{L_1} \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \oint_{L_1} \mathbf{F}(M, t) T(Q, M) d\mathbf{l}_M + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_{D_1} [\mathbf{F}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)] ds_M - 2\pi v \zeta^*(Q, t), Q \in L_1^+; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M - \int_{D_1} \zeta(M, t) (\mathbf{V}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)) ds_M - \\ & - v \int_{L_1} \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \oint_{L_1} \mathbf{F}(M, t) T(Q, M) d\mathbf{l}_M + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_{D_1} [\mathbf{F}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)] ds_M, Q \in L_1^-; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & 2\pi v \zeta(Q, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \zeta(M, t) T(Q, M) ds_M - \int_{D_1} \zeta(M, t) (\mathbf{V}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)) ds_M - \\ & - v \int_{L_1} \xi(M, t) T(Q, M) dl_M = \frac{1}{\rho} \oint_{L_1} \mathbf{F}(M, t) T(Q, M) d\mathbf{l}_M + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_{D_1} [\mathbf{F}(M, t), \tilde{\mathbf{b}}(Q, M)] ds_M, Q \in D_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Аппроксимация по пространственным переменным. Как и при решении электромагнитной задачи, разбиваем сечение D_1 проводника в

жидкой фазе на N_{D_1} элементарных областей ΔS_1^i , $i=1, 2, \dots, N_{D_1}$, а его границу L_1^+ , L_1^- соответственно на $N_{L_1^+}$, $N_{L_1^-}$ элементарных участков ΔL_1^i , $i=1, 2, \dots, N_{L_1}$, $N_{L_1} = N_{L_1^+} + N_{L_1^-}$. Применяя метод полного осреднения, систему уравнений (17), (23) — (25) аппроксимируем следующей системой уравнений:

$$\mathbf{T}_{L_1 L_1} \boldsymbol{\eta}(t) = -\mathbf{T}_{L_1 D_1} \boldsymbol{\zeta}(t); \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{L_1^+ D_1} \boldsymbol{\zeta}(t) - [\tilde{\mathbf{R}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_r(t) + \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_z(t)] \boldsymbol{\zeta}(t) - v \mathbf{T}_{L_1^+ L_1} \boldsymbol{\xi}(t) = \\ = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{L_1^+}^*(t) - 2\pi v \Delta \mathbf{L}_1^+ \boldsymbol{\zeta}^*(t); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{L_1^- D_1} \boldsymbol{\zeta}(t) - [\tilde{\mathbf{R}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_r(t) + \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_z(t)] \boldsymbol{\zeta}(t) - v \mathbf{T}_{L_1^- L_1} \boldsymbol{\xi}(t) = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{L_1^-}^*(t); \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 2\pi v \Delta \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\zeta}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{D_1 D_1} \boldsymbol{\zeta}(t) - [\tilde{\mathbf{R}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_r(t) + \tilde{\mathbf{Z}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_z(t)] \boldsymbol{\zeta}(t) - \\ - v \mathbf{T}_{D_1 L_1} \boldsymbol{\xi}(t) = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{D_1}^*(t). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_{N_{L_1}}(t)\}$, $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{N_{L_1}}(t)\}$ — вектор-столбцы, элементами которых являются значения мгновенной плотности простого слоя в центре элементарного участка ΔL_1^i , $i=1, 2, \dots, N_{L_1}$; $\boldsymbol{\zeta}(t) = \{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{N_{D_1}}(t)\}$ — вектор-столбец, элементами которого являются мгновенные значения вихря в центре элементарной области ΔS_1^i , $i=1, 2, \dots, N_{D_1}$; $\boldsymbol{\zeta}^*(t) = \{\zeta_1^*(t), \zeta_2^*(t), \dots, \zeta_{N_{L_1^+}}^*(t)\}$ — вектор-столбец, элементами которого являются мгновенные значения вихря в центре элементарного участка ΔL_1^{i+} , $i=1, 2, \dots, N_{L_1^+}$; $\Delta \mathbf{L}_1^+ = \text{diag} \{\Delta L_1^{1+}, \Delta L_1^{2+}, \dots, \Delta L_1^{N_{L_1^+}+}\}$ — диагональная матрица размерности $N_{L_1^+} \times N_{L_1^+}$, ее элементами являются длины отрезков ΔL_1^{i+} , $i=1, 2, \dots, N_{L_1^+}$, на которые разбивается граница L_1^+ ;

$$\mathbf{F}_{L_1^\pm}^L(t) = \mathbf{T}_{L_1^\pm L_1} \mathbf{F}_\tau^L(t) + \tilde{\mathbf{R}}_{L_1^\pm D_1} \mathbf{F}_z(t) - \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^\pm D_1} \mathbf{F}_r(t);$$

$$\mathbf{F}_{D_1}^L(t) = \mathbf{T}_{D_1 L_1} \mathbf{F}_\tau^L(t) + \tilde{\mathbf{R}}_{D_1 D_1} \mathbf{F}_z(t) - \tilde{\mathbf{Z}}_{D_1 D_1} \mathbf{F}_r(t),$$

где $\mathbf{F}_\tau^L(t) = \{F_{ri}^L(t) \tau_{ri} + F_{zi}^L(t) \tau_{zi}\}$, $i=1, 2, \dots, N_{L_1}$, — вектор-столбец, компоненты которого определяются через значения проекций мгновенных объем-

ных сил в центрах элементарных участков $\Delta L_1^i, i=1, 2, \dots, N_{L_1}$, границы L_1 ; $\boldsymbol{\tau}_i = \tau_{ri} \mathbf{e}_r + \tau_{zi} \mathbf{e}_z$ — вектор единичной длины, направленный по касательной к элементарному участку $\Delta L_1^i, i=1, 2, \dots, N_{L_1}$; $\mathbf{F}_r(t) = \{F_{r1}(t), F_{r2}(t), \dots, F_{rN_{D_1}}(t)\}$, $\mathbf{F}_z(t) = \{F_{z1}(t), F_{z2}(t), \dots, F_{zN_{D_1}}(t)\}$ — вектор-столбцы, элементами которых являются проекции мгновенной плотности силы $F_{ri}(t), F_{zi}(t)$ на оси Or и Oz в центре элементарной области $\Delta S_1^i, i=1, 2, \dots, N_{D_1}$. В уравнениях (26) — (29) также введены обозначения для матриц $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{V}_r, \mathbf{V}_z$ аналогично тому, как это сделано в уравнениях (9) — (11).

Далее, на основании выражения (22) с использованием метода полного осреднения записываем следующие соотношения с учетом (26):

$$\mathbf{V}_r^*(t) = \mathbf{V}_r \cdot \boldsymbol{\zeta}(t); \quad \mathbf{V}_z^*(t) = \mathbf{V}_z \cdot \boldsymbol{\zeta}(t),$$

где $\mathbf{V}_r^*(t) = \{V_{r1}(t), V_{r2}(t), \dots, V_{rN_{D_1}}(t)\}$, $\mathbf{V}_z^*(t) = \{V_{z1}(t), V_{z2}(t), \dots, V_{zN_{D_1}}(t)\}$ — вектор-столбцы, компонентами которых являются мгновенные проекции скорости;

$$\mathbf{V}_r = \frac{1}{2\pi} \Delta S_1^{-1} (\mathbf{R}_{D_1 D_1} - \mathbf{R}_{D_1 L_1} \mathbf{T}_{L_1 L_1}^{-1} \mathbf{T}_{L_1 D_1});$$

$$\mathbf{V}_z = \frac{1}{2\pi} \Delta S_1^{-1} (\mathbf{Z}_{D_1 D_1} - \mathbf{Z}_{D_1 L_1} \mathbf{T}_{L_1 L_1}^{-1} \mathbf{T}_{L_1 D_1}).$$

На основании (21) и метода полного осреднения с учетом выражения (26) записываем соотношения, необходимые для определения вектор-столбца $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{N_{D_1}}(t)\}$, компонентами которого являются значения функции тока в соответствующих элементарных областях $\Delta S_1^i, i=1, 2, \dots, N_{D_1}$:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{T}_{D_1 D_1}^\Psi \boldsymbol{\zeta}(t),$$

где

$$\mathbf{T}_{D_1 D_1}^\Psi = \frac{1}{2\pi} \Delta S_1^{-1} (\mathbf{T}_{D_1 D_1} - \mathbf{T}_{D_1 L_1} \mathbf{T}_{L_1 L_1}^{-1} \mathbf{T}_{L_1 D_1}).$$

Вводя матрицу \mathbf{E} размерности $N_{L_1^+} \times N_{D_1}$ по правилу [3],

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если область } \Delta S_1^j \text{ прилегает к участку границы } \Delta L_1^{i+}; \\ 0, & \text{если область } \Delta S_1^j \text{ не прилегает к участку границы } \Delta L_1^{i+}, \end{cases}$$

$$i=1, 2, \dots, N_{L_1^+}, \quad j=1, 2, \dots, N_{D_1},$$

находим распределение функции тока на приграничных элементах:

$$\boldsymbol{\psi}^*(t) = \mathbf{E} \mathbf{T}_{D_1 D_1}^\Psi \boldsymbol{\zeta}(t).$$

Тогда граничное условие для функции вихря в матричной форме может быть записано так:

$$\zeta^*(t) = \mathbf{T}_{L_1^+ D_1}^* \zeta(t),$$

где

$$\mathbf{T}_{L_1^+ D_1}^* = -\frac{2}{h^2} \mathbf{E} \mathbf{T}_{D_1 D_1}^\Psi.$$

Разностная схема для решения уравнений (26) — (29). Аналогично тому, как было сделано при описании алгоритма решения системы дифференциальных уравнений по времени, к решению которых сводится задача определения вихревых токов, записываем разностную схему для системы уравнений (27) — (29), позволяющую перейти от $(n-1)$ -го временного слоя к n -му:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{D_1 D_1} \zeta^{(n)} + \mathbf{A}_{D_1 L_1} \xi^{(n)} &= \mathbf{B}_{D_1}, \\ \mathbf{A}_{L_1^+ D_1} \zeta^{(n)} + \mathbf{A}_{L_1^+ L_1} \xi^{(n)} &= \mathbf{B}_{L_1^+}, \\ \mathbf{A}_{L_1^- D_1} \zeta^{(n)} + \mathbf{A}_{L_1^- L_1} \xi^{(n)} &= \mathbf{B}_{L_1^-}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\mathbf{A}_{D_1 D_1} = \mathbf{T}_{D_1 D_1} + 2\pi\nu c \tau_n \Delta \mathbf{S}_1 - c \tau_n (\tilde{\mathbf{R}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_r^{(n)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_z^{(n)}); \quad \mathbf{A}_{D_1 L_1} = -\nu \tau_n c \mathbf{T}_{D_1 L_1};$$

$$\mathbf{A}_{L_1^+ D_1} = \mathbf{T}_{L_1^+ D_1} + 2\pi\nu c \tau_n \Delta \mathbf{L}_1^+ \mathbf{T}_{L_1^+ D_1}^* - c \tau_n (\tilde{\mathbf{R}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_r^{(n)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_z^{(n)});$$

$$\mathbf{A}_{L_1^+ L_1} = -c \nu \tau_n \mathbf{T}_{L_1^+ L_1};$$

$$\mathbf{A}_{L_1^- D_1} = \mathbf{T}_{L_1^- D_1} - c \tau_n (\tilde{\mathbf{R}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_r^{(n)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_z^{(n)}); \quad \mathbf{A}_{L_1^- L_1} = -\nu \tau_n c \mathbf{T}_{L_1^- L_1};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{D_1} &= [\mathbf{T}_{D_1 D_1} - (1-c) \tau_n (2\pi\nu \Delta \mathbf{S}_1 - \tilde{\mathbf{R}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_r^{(n-1)} - \tilde{\mathbf{Z}}_{D_1 D_1} \mathbf{V}_z^{(n-1)})] \zeta^{(n-1)} + \\ &+ (1-c) \tau_n \nu \mathbf{T}_{D_1 L_1} \xi^{(n-1)} + \frac{\tau_n}{\rho} [c \mathbf{F}_{D_1}^{(n)} + (1-c) \mathbf{F}_{D_1}^{(n-1)}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{L_1^+} &= [\mathbf{T}_{L_1^+ D_1} - (1-c) \tau_n (2\pi\nu \Delta \mathbf{L}_1^+ \mathbf{T}_{L_1^+ D_1}^* - \tilde{\mathbf{R}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_r^{(n-1)} - \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^+ D_1} \mathbf{V}_z^{(n-1)})] \zeta^{(n-1)} + \\ &+ (1-c) \nu \tau_n \mathbf{T}_{L_1^+ L_1} \xi^{(n-1)} + \frac{\tau_n}{\rho} [c \mathbf{F}_{L_1^+}^{(n)} + (1-c) \mathbf{F}_{L_1^+}^{(n-1)}]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{L_1^-} = [\mathbf{T}_{L_1^- D_1} + (1-c)\tau_n (\tilde{\mathbf{R}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_r^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{L_1^- D_1} \mathbf{V}_z^{(n-1)})] \boldsymbol{\zeta}^{(n-1)} + \\ + \nu \tau_n (1-c) \mathbf{T}_{L_1^- L_1} \boldsymbol{\xi}^{(n-1)} + \frac{\tau_n}{\rho} \left(c \mathbf{F}_{L_1^-}^{(n)} + (1-c) \mathbf{F}_{L_1^-}^{(n-1)} \right).$$

Алгоритм решения совместной электромагнитной и гидродинамической задачи. В результате приходим к итерационному процессу определения поля скоростей в сечении проводника в жидкой фазе:

1. Задаем $\boldsymbol{\zeta}(t_0)$.
2. Находим $\mathbf{V}_r^*(t_0) := \mathbf{V}_r \cdot \boldsymbol{\zeta}(t_0)$, $\mathbf{V}_z^*(t_0) := \mathbf{V}_z \cdot \boldsymbol{\zeta}(t_0)$.
3. Из решения электромагнитной задачи определяем $\mathbf{F}_{D_1}(t_0)$, $\mathbf{F}_{L_1^+}(t_0)$, $\mathbf{F}_{L_1^-}(t_0)$, на поле скоростей $\mathbf{V}_r^*(t_0)$, $\mathbf{V}_z^*(t_0)$.
4. Полагаем $n := 1$.
5. Полагаем $\mathbf{V}_r^{*(0)}(t_n) := \mathbf{V}_r^*(t_{n-1})$, $\mathbf{V}_z^{*(0)}(t_n) := \mathbf{V}_z^*(t_{n-1})$.
6. Полагаем $\mathbf{F}_{D_1}^{(0)}(t_n) := \mathbf{F}_{D_1}(t_{n-1})$, $\mathbf{F}_{L_1^+}^{(0)}(t_n) := \mathbf{F}_{L_1^+}(t_{n-1})$, $\mathbf{F}_{L_1^-}^{(0)}(t_n) := \mathbf{F}_{L_1^-}(t_{n-1})$.
7. Полагаем $m := 1$.
8. Полагаем $\mathbf{V}_r^{*(m)}(t_n) := \mathbf{V}_r^{*(m-1)}(t_n)$, $\mathbf{V}_z^{*(m)}(t_n) := \mathbf{V}_z^{*(m-1)}(t_n)$.
9. Полагаем $\mathbf{F}_{D_1}^{(m)}(t_n) := \mathbf{F}_{D_1}^{(m-1)}(t_n)$, $\mathbf{F}_{L_1^+}^{(m)}(t_n) := \mathbf{F}_{L_1^+}^{(m-1)}(t_n)$, $\mathbf{F}_{L_1^-}^{(m)}(t_n) := \mathbf{F}_{L_1^-}^{(m-1)}(t_n)$.
10. Решаем систему уравнений (30). В результате находим $\boldsymbol{\zeta}^{(m)}(t_n)$.
11. Находим $\mathbf{V}_r^{*(m+1)}(t_n) := \mathbf{V}_r \cdot \boldsymbol{\zeta}^{(m)}(t_n)$, $\mathbf{V}_z^{*(m+1)}(t_n) := \mathbf{V}_z \cdot \boldsymbol{\zeta}^{(m)}(t_n)$.
12. Из решения электромагнитной задачи находим $\mathbf{F}_{D_1}^{(m+1)}(t_n)$, $\mathbf{F}_{L_1^+}^{(m+1)}(t_n)$, $\mathbf{F}_{L_1^-}^{(m+1)}(t_n)$ на поле скоростей $\mathbf{V}_r^{*(m+1)}(t_n)$, $\mathbf{V}_z^{*(m+1)}(t_n)$.
13. Проверяем условие

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{D_1}} (V_{ri}^{(m+1)}(t_n) - V_{ri}^{(m)}(t_n))^2 + (V_{zi}^{(m+1)}(t_n) - V_{zi}^{(m)}(t_n))^2} < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — заданная абсолютная погрешность. Если оно не выполняется, то переходим к пункту 14, иначе — к пункту 15.

14. Полагаем $m := m+1$ и переходим к пункту 8.
15. Находим $\mathbf{V}_r^*(t_n) := \mathbf{V}_r^{*(m+1)}(t_n)$, $\mathbf{V}_z^*(t_n) := \mathbf{V}_z^{*(m+1)}(t_n)$.
16. Полагаем $n := n+1$.
17. Проверяем условие $t_n < t$. Если оно выполняется, то переходим к пункту 5, иначе — к пункту 18.

18. Окончание счета и вывод распределения поля скоростей $V_r^*(t_n)$, $V_z^*(t_n)$.

На основании предложенного алгоритма разработана программа на языке FORTRAN. Проведением серии численных экспериментов был исследован порядок точности представленных разностных схем при $c = 0,5$ и $c = 1$ с использованием процесса Эйткена [13]. В Установлено, что в случае $c = 0,5$ схема имеет второй порядок точности, в случае $c = 1$ — первый порядок точности. Это подтверждает известный из теории разностных схем факт. Аппроксимация по пространственным переменным с использованием метода полного осреднения имеет первый порядок точности, что также подтверждено численными экспериментами.

Вывод. Полученные интегро-дифференциальные уравнения для моделирования гидродинамического процесса в электротехнических устройствах с жидкими проводниками, в которых исключены производные по пространственным переменным, позволяют устранить неизбежные погрешности при их аппроксимации конечномерными аналогами, как например в конечно-разностном методе и методе конечных элементов. Поскольку интерес представляет распределение поля в ограниченном пространстве, а именно в жидком проводнике, предложенный метод расчета электродинамических усилий на основе интегро-дифференциальных уравнений в данном случае является оптимальным относительно уменьшения расчетной области: искомые вихревые токи распределены в области массивных проводников, а токи намагниченности — на границе ферромагнитных тел. Особенностью предложенной методики является также то, что совместная электромагнитная и гидродинамическая задача решается на общей сетке.

Таким образом, разработанная компьютерно-ориентированная математическая модель нестационарного МГД процесса в рассматриваемом классе устройств, в основе которой лежит сведение краевой задачи для уравнений электродинамики и уравнений Навье—Стокса к системе интегро-дифференциальных уравнений, позволяет эффективно осуществлять расчет поля скоростей в жидком проводнике.

The mathematical model of a non-stationary magnetohydrodynamic process in the axially symmetric electrical engineering device with a fluid conductor is constructed on the basis of the integro-differential equations. Due to decomposition the problem is reduced to the solution of two subtasks: electromagnetic and hydrodynamic ones. A distinction of the latter subtask is the absence in the integro-differential equations, to which solution it is reduced, the space variable derivatives of decision functions that eliminates the errors brought to the end result from their approximation by finite-dimensional analogs.

1. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др. Осесимметричная интегральная модель распределения синусоидальных токов в системе кристаллизатор с погружным стаканом — устройство электромагнитного торможения машины непрерывного литья заготовок круглого сечения и алгоритмы ее компьютерной реализации // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — Київ : ІПМЕ НАН України, 2005. — Вип. 34. — С. 3 — 20.
2. Подольцев А. Д., Кучерявая И. Н. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. — Киев : Ин-т электродинамики НАН Украины, 1999. — 363 с.
3. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов и электродинамических усилий в электротехнических устройствах с жидкими проводниками, состоящими из соосно расположенных тел вращения // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — Київ : ІПМЕ НАН України, 2007. — Вип. 39. — С. 3—12.
4. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета поля скоростей в жидком проводнике электротехнического устройства, состоящего из соосно расположенных тел вращения // Там же. — 2007. — Вип. 38. — С. 3 — 9.
5. Тозони О. В., Петрушенко Е. И. Расчет переходных процессов в токопроводах // Теоретическая электротехника. — Львов: Львовский ун-т, 1966. — Вып. 2. — С. 144 — 147.
6. Квачев Г. С., Петрушенко Е. И. Расчет переходных процессов в магнитофугальных двигателях // Наука и техника в городском хозяйстве. — Киев : Будівельник, 1966. — Вып. VII. — С. 3 — 10.
7. Петрушенко Е. И., Квачев Г. С. Расчет переходных процессов в осесимметричных устройствах // Теоретическая электротехника. — Львов : Львовский ун-т, 1967. — Вып. 3. — С. 141 — 146.
8. Квачев Г. С., Петрушенко Е. И., Бессараб Н. И. О численном решении уравнений динамики магнитофугального двигателя // Наука и техника в городском хозяйстве. — Киев : Будівельник, 1967. — Вып. VIII. — С. 3—19.
9. Петрушенко Е. И. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1969. — № 1. — С. 102—115.
10. Жильцов А. В. Моделирование переходных МГД процессов в электротехнических устройствах с жидким проводником и нелинейным массивным магнитопроводом на основе суммарных схем // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — Київ : ІПМЕ НАН України, 2007. — Вип. 42. — С. 3—22.
11. Жильцов А. В. Математическая модель нестационарного гидродинамического процесса в кристаллизаторе МНЛЗ на основе интегро-дифференциальных уравнений // Там же. — 2007. — Вип. 43. — С. 3 — 14.
12. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М. : Мир, 1980. — 616 с.
13. Калитки Н. Н. Численные методы. — М. : Наука, 1978. — 512 с.

Поступила 01.04.08;
после доработки 23.09.08

ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, ст. научн. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, математическое моделирование магнитогидродинамических процессов.