УДК 517.9

Э.И. Владимирский, Б.И. Исмайлов, кандидаты техн. наук
Азербайджанская государственная нефтяная академия
(Азербайджанская республика, AZ 1010, Баку, пр. Азадлыг, 20,
тел: (+994) 12 4651147, 12 4986220,
e-mail: Eduard.Vladimirsky@hotmail.com; ismbahram@mail.ru)

Возвраты Пуанкаре как критерий топологической синхронизации и управления дробными системами

Рассмотрены постановки задач синхронизации и управления нелинейными физическими системами дробного порядка. Критерием реализации задачи является понятие среднего времени возврата Пуанкаре. Предложено обобщенное компактное метрическое пространство Пуанкаре с размерностью $<\tau>$. Приведен алгоритм определения потерь памяти при обучении системы.

Розглянуто постановки задач синхронізації та керування нелінійними фізичними системами дробового порядку. Критерієм реалізації задачі є поняття середнього часу повернення Пуанкаре. Запропоновано узагальнений компактний метричний простір Пуанкаре з вимірністю $<\tau>$. Наведено алгоритм визначення втрат пам'яті при навчанні системи.

К л ю ч е в ы е с л о в а: системы с памятью, возвраты Пуанкаре, фрактальность, дробность, визуализация.

Научное направление физика открытых систем рассматривает единый подход к описанию разнообразных нелинейных явлений. В настоящее время в открытых системах наблюдаются процессы и явления, для которых характерны нелокальность, эредитарность, немарковость, фрактальность, негамильтоновость. Существенное внимание уделяется исследованиям степенной нелокальности и степенной долговременной памяти. В связи с этим становится актуальной проблема создания математических методов одного из современных направлений теоретической физики — дробной динамики [1]. Использование методов дробной динамики открывает новые возможности для решения проблем прогноза и принятия решений в открытых системах [2, 3].

Известно, что уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, в которой дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции t. Такие системы называют системами с остаточной памятью. Они занимают промежуточное положение между памятью, с одной стороны, и марковскими системами — с другой [4].

В работе [4, с. 354] указано, что в системе с заданной пространственной геометрией в процессе эволюции «выживает» только часть состояний, а другая часть их общего числа необратимо теряется, т.е. они становятся недоступными для системы. Следует заметить, что одним из фундаментальных аспектов исследования различного рода явлений в открытых системах является необходимость учета нелокальных эффектов по времени (эффект памяти), «физической» причиной которых есть медленная релаксация корреляционных связей между элементами системы.

Математической основой при моделировании такого рода явлений является аппарат дробного исчисления.

Определение 1 [5]. Случайный процесс, скорость изменения плотности которого зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени, называется эредитарным. Этот термин эквивалентен понятиям памяти, последействия, запаздывания, наследственности, остаточности.

При использовании дробной динамики в задачах исследования физических систем возникает проблема возвратов Пуанкаре — одна из наиболее важных особенностей динамических процессов (систем) с ограниченным типом установившихся движений [6—12]. Времена возвратов Пуанкаре представляют собой основные индикаторы и характеристики, показывающие, как определенные состояния динамической системы повторяются во времени. В общем случае полный анализ поведения времен возвращения в произвольные начальные состояния нереален. Традиционным является подход, связанный с изучением статистических свойств возвратов Пуанкаре и типичных орбит для некоторых инвариантных мер [12, 13]. В связи с изложенным вызывают интерес системы с памятью при решении задач топологической синхронизации и управления.

Системы с остаточной памятью. В работе [14] дано следующее определение.

Определение 2. Системы, обладающие остаточной памятью, описываются преобразованием Лапласа $M(\lambda) \propto z^{-D}$, $z = (1-\xi)\lambda t$. Здесь D — фрактальная размерность, являющаяся количественной мерой проявления эффектов памяти; ξ — параметр подобия, определяющий, насколько уменьшается величина блока на каждом шаге построения фрактальной размерности $D = \ln j / \ln \xi^{-1}$, где j — число блоков, представляющих элементарный фрагмент фрактала.

Формально наличие памяти означает, что если в момент времени t' на систему действует сила $f(t')$, то возникает поток J, величина которого в последующий момент $t-t'$ задается [14] в виде

$$J(t)=\int_0^t M(t-t')\,f(t')\,dt'. \tag{1}$$

Для системы, не обладающей памятью, временная зависимость функции памяти $M(t-t')$ имеет вид

$$M(t-t')=\gamma\delta(t-t'), \tag{2}$$

где γ — положительная постоянная; $\delta(t-t')$ — δ-функция Дирака. Подставляя (2) в (1), получаем формулу $J(t)=\gamma f(t)$, согласно которой при потере памяти на поток $J(t)$ влияет только значение силы $f(t)$, действующей в тот же момент t. При идеальной памяти $\tau\to\infty$, т.е. $J(t)$ формируется на всем протяжении действия силы $f(t')$ до момента t. Формально справедливо равенство [14, с. 12] $M(t-t')=\gamma/t$.

Топологическая синхронизация. В отличие от традиционных методов синхронизации в [11] предлагается понятие топологической синхронизации связанных хаотических систем.

Определение 3 [11]. Две системы топологически синхронизированы, если их времена возвратов Пуанкаре ведут себя похожим образом.

Индикатором схожести поведения систем является понятие, основанное на временах возвратов Пуанкаре. Совпадение размерностей данных двух систем — это лишь необходимое условие топологической синхронизации: оно указывает на «похожесть в среднем» [11, с. 253]. Критерий топологической синхронизации можно применять в случаях связанных гетерогенных систем. Следует заметить, что особенностью синхронизации является сохранение некоторого частотного соотношения: в данном случае — это соотношение между временами возвратов Пуанкаре. Инвариантность таких соотношений — суть режима синхронизации.

Топология фрактального пространства. Размерность Хаусдорфа—Безиковича — метрическое понятие [15]. Однако существует ее фундаментальная связь с топологической размерностью dimE, установленная Л.С. Понтрягиным и Л.С. Шнирельманом, которые ввели понятие метрического порядка [16].

Определение 4. Метрическим порядком компакта A называется число $k=\lim(-\ln N_A(\varepsilon)/\ln\varepsilon)$, где ε — сфера радиуса ε; $N(\varepsilon)$ — число сфер в конечном подпокрытии множества.

Нижняя граница метрических порядков для всех метрик компакта A (называемая метрической размерностью), равна его Лебега размерности.

Однако оказалось, что метрический порядок, введенный в [16], совпадает с нижней гранью фрактальной размерности Хаусдорфа—Безиковича, определяемой в терминах box-counding.

Теорема 1 [16]. Для любого компактного метрического пространства X

$$\dim X = \inf \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_{\varepsilon, d}(X)}{-\log \varepsilon} : d \text{ есть метрика на } X \right\},$$

где $N_{\varepsilon, d}(X) = \min\{|u| : u \text{ есть конечное открытое покрытие } X\}$.

Следовательно, (X, d_f) — компактное фрактальное метрическое пространство с размерностью d_f. Необходимо заметить, что при описании свойств систем с дробной структурой невозможно использовать евклидову геометрию. Эти процессы следует анализировать в терминах геометрии дробной размерности.

Замечание. В [17] представлены результаты связи дробного интегро-дифференцирования (в терминах Римана—Лиувилля или Грюнвальда—Летникова) с кривыми Коха. Указано, что взаимно однозначной связи между фракталами и дробными операторами не существует: фракталы могут генерироваться и описываться без использования дробных операций, а определенный дробный оператор не обязательно порождает определенный (однозначно с ним связанный) фрактальный процесс или фрактальное многообразие.

Однако использование дробных операций позволяет генерировать на основе заданного фрактального процесса (многообразия) другой фрактальный процесс (многообразие), фрактальная размерность которого связана с показателем дробного интегродифференцирования линейным соотношением.

В [17] дробные интегралы Римана—Лиувилля являются интегралами по пространству дробной размерности. При этом показатель интегрирования связан с размерностью пространства однозначным соотношением. В связи с этим вызывает интерес рассмотрение размерности хаотических систем дробного порядка. В [18] указано, что размерность таких систем может определяться суммой дробных показателей Σ, при этом значение $\Sigma < 3$ — наиболее эффективно.

Рассмотрим хаотическую дробную систему Лоренца [18, с. 1, 2]:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x = \sigma(y - x), \quad \frac{d^\beta}{dt^\beta} y = \rho x - y - xz^r, \quad \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} z = xy - bz, \tag{3}$$

где $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $b = 8/3$, $0 < \alpha, \beta, \gamma \le 1$, $r \ge 1$. Тогда дробная размерность системы уравнений (3) будет иметь вид

$$\alpha + \beta + \gamma = \Sigma . \tag{4}$$

Так, например, для системы Лоренца с дробными показателями $\alpha = \beta = = \gamma = 0{,}99$, эффективная размерность $\Sigma = 2{,}97$.

Предположим $\widetilde{X}$ — произвольное множество нелинейных физических систем, A^{α} — подмножество множества $\widetilde{X}$ систем дробного порядка с памятью $A^{\alpha} \subset \widetilde{X}$. Тогда триада $(\widetilde{X}, A^{\alpha}, \Sigma)$ — компактное дробное метрическое пространство с размерностью Σ .

Введем обозначение $W \in (X, d_f)$. На основании данных работы [4, с. 354] и с учетом замечания $(\widetilde{X}, A^{\alpha}, \Sigma) \subset W$ рассмотрим трансформацию системы W, учитывая связи среднего времени возврата Пуанкаре $\langle\tau\rangle$ с фрактальной размерностью d_f и остаточной памятью $J(t)$. При этом $g : \langle\tau\rangle \Rightarrow d_f$, $l : d_f \Rightarrow J(t)$, $\chi : \langle\tau\rangle \Rightarrow (g, l)$. Тогда $U \in (X, \langle\tau\rangle)$ — обобщенное компактное метрическое пространство Пуанкаре с размерностью $\langle\tau\rangle$.

Синхронизация объединенных хаотических систем дробного порядка, постановка задачи. Пусть

$$\frac{d^{\alpha} X}{dt^{\alpha}} = f\,(X), \quad \frac{d^{\alpha} Y}{dt^{\alpha}} = g\,(Y) + U(t)\,,$$

где α — дробный показатель степени, $\alpha \in (0,1]$, ведущей $X \in R^n$ и ведомой $Y \in R^n$ систем; $f : R^n \to R^n$ и $\hat{g} : R^n \to R^n$ — векторные поля ведущей и ведомой систем. В общем случае условие синхронизации систем определяется как $U\,(t) = (u_1, \ldots, u_n)^T$, т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} \|X - Y\|$, где $\|\cdot\|$ — Евклидова норма [19].

Пусть ведущая система имеет вид [20]

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha} x}{dt^{\alpha}} &= (25a + 10)\,(y - x) + k_1 (x' - x), \\ \frac{d^{\alpha} y}{dt^{\alpha}} &= (28 - 35a)\,x - xz + (29a - 1) y + k_2 (y' - y), \\ \frac{d^{\alpha} z}{dt^{\alpha}} &= xy - (8 + a) z / 3 + k_3 (z' - z), \end{aligned} \tag{5}$$

где a — параметр системы, $0 < a$, а ведомая система — следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha} x'}{dt^{\alpha}} &= (25a + 10)(y' - x') + k_1 (x - x'), \\ \frac{d^{\alpha} y'}{dt^{\alpha}} &= (28 - 35a)\,x' - x'z' + (29a - 1)\,y' + k_2 (y - y'), \\ \frac{d^{\alpha} z'}{dt^{\alpha}} &= x'y' - \frac{(a + 8)}{3}\, z' + k_3 (z - z'), \end{aligned} \tag{6}$$

где k_1, k_2, k_3 — связанные коэффициенты; $e_x = x - x'$, $e_y = y - y'$, $e_z = z - z'$ — множество ошибок. Тогда система с ошибками между (5) и (6) имеет вид

$$\frac{d^\alpha e_x}{dt^\alpha} = (25a + 10)\, e_y - (25a + 10 - 2k_1)\, e_x,$$

$$\frac{d^\alpha e_y}{dt^\alpha} = (28 - 35a) e_x - z' e_x - x e_z + (29a - 1 - 2k_2)\, e_y,$$

$$\frac{d^\alpha e_z}{dt^\alpha} = y' e_x + x e_y - [(8 + a)/3 + 2k_3]\, e_z.$$

Однако аналитические методы реализации алгоритма синхронизации представляют некоторые неудобства.

Пусть система $U \in (X\langle\tau\rangle)$ натянута на $S \in U$, где S представляет собой диаду $S = (\hat{x}, \widetilde{S}C)$. Здесь $\hat{x} = \{x_n\}_{n>0}^N$ — наблюдаемые гетерогенные дробные; $\widetilde{S}C$ — алгоритм топологической синхронизации и управления системой дробного порядка. Аксиоматическая поддержка системы $S = (\hat{x}, \widetilde{S}C) \in U$ возможна тогда и только тогда, когда:

1) $\hat{x} = R_{i,j}^{m,\varepsilon} = \theta(\varepsilon_i \| x_i - x_j \|) / J(t)$, $x \in R^m$, $i, j = 1, \ldots, N$ [7, 8];

2) $\hat{x} \in J(t)$ — дробные наблюдаемые с памятью;

3) $H(E, F) = E \subset F + \varepsilon$ и $F \subset E + \varepsilon$ — фрактальная метрика Хаусдорфа;

4) $\langle\tau\rangle = -d_f \ln \varepsilon$ — среднее время возврата Пуанкаре, d_f — фрактальная размерность [13];

5) AI — функция готовности объекта к принятию решения.

Алгоритм и пример его реализации.

Шаг 1. Выполняем операцию моделирования по алгоритму ведущей и ведомой систем дробного порядка [21].

Шаг 2. Получаем дробные наблюдаемые $\hat{x} = {}_\alpha\{x_i\}_{n\geq 0}^N$ и $\widetilde{y} = {}_\alpha\{y_i\}_{n\geq 0}^N$.

Шаг 3. Представляем ведомую дробную наблюдаемую в виде $\widetilde{y} = {}_\alpha\{y_i\}_{n\geq 0}^N + \psi$, где $\hat{\psi} = {}_\alpha\{\psi_i\}_{n\geq 0}^N$.

Шаг 4. Отображаем $\hat{x}$ и $\hat{y} + \hat{\psi}$ на $R_{i,j}^{m,\varepsilon} : \hat{x} \Rightarrow R_{i,j}^{m,\varepsilon}$, $(\hat{y} + \hat{\psi}) \Rightarrow R_{i,j}^{m,\varepsilon}$.

Шаг 5. Получаем диаграммы Пуанкаре дробного порядка ${}_\alpha D_{\hat{x}}$ и ${}_\alpha D_{(\hat{y}+\hat{\psi})}$.

Шаг 6. Определяем фрактальные размерности диаграмм Пуанкаре d_{f1} и d_{f2}.

Шаг 7. Определяем времена возврата Пуанкаре по формуле $\langle\tau\rangle_{1,2} = -d_{f1}(d_{f2}) \ln \varepsilon$.

Шаг 8. Определяем близость полученных фрактальных размерностей d_{f1} и d_{f2} и соответственно $\langle\tau\rangle_1$ и $\langle\tau\rangle_2$, используя фрактальную метрику Хаусдорфа [22].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [22]. Пусть E и F — компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Расстояние Хаусдорфа $H(E, F)$ удовлетворяет соотношениям $H(E,F) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow E \subset F + \varepsilon,\ F \subset E + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — допустимый порог. Тогда топологическая синхронизация возможна, если

$$\langle\tau\rangle_1(x) \subset \langle\tau\rangle_2(y) + \varepsilon, \quad \langle\tau\rangle_2(y) \subset \langle\tau\rangle_1(x) + \varepsilon. \tag{7}$$

В случае, если соотношения (7) не удовлетворяются, проводится обучение ведомой системы с использованием интеллектуального сдвига по критерию $AI(\hat{x}, \hat{y})^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\text{sem}} \inf_{V} I$, где AI — область интересов.

Для описания геометрических и динамических свойств аттрактора используют новую фрактальную размерность Каплана— Йорке [16]:

$$D_{kY} = m + \frac{\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|},$$

где Λ_i — показатели Ляпунова; m — размер фазового пространства. Тогда выражения (7) примут вид

$$\langle\tau\rangle_1(D_{kY}(x)) \subset \langle\tau\rangle_2(D_{kY}(y)) + \varepsilon, \quad \langle\tau\rangle_2(D_{kY}(y)) \subset \langle\tau\rangle_1(D_{kY}(x)) + \varepsilon.$$

В работе [11] упомянуто, что времена возврата Пуанкаре для хаотических систем определяются при известной фрактальной размерности процесса. Однако, при наличии спектра времен возврата совершенно очевидно, что система обратима. Следовательно, существует эквивалентность между спектром времен возврата и распределением памяти. Поэтому потери памяти определяются разностью между глобальной и локальной фрактальными размерностями, что означает соответственно обратимость и необратимость процесса (см. рисунок на вклейке).

Относительно топологической синхронизации и управления дробных систем с памятью актуальной является проблема реализации некоторой адаптивной системы по критерию минимума потерь (минимума времени возврата).

Определение 5. Две системы топологически управляемы тогда и только тогда, когда они топологически синхронизированы.

При этом важен тот факт, что процесс реализации такой системы будет сопровождаться визуальным отображением в терминах нелинейного рекуррентного анализа [16].

Выводы

Таким образом, проблема синхронизации связанных хаотических систем дробного порядка рассмотрена в компактном метрическом пространстве Пуанкаре. Визуализация времен возврата Пуанкаре в виде нелинейных рекуррентных диаграмм позволит принимать обоснованные решения в задачах прогноза и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Москва, 2011. — 31 с.
2. *Tarasov V.E.* The fractional oscillator as an open system// Central European Journal of Physics. — 2012. — 10 (2). — P. 382—389. DOI 10.2478/s11534-012-0008-0.
3. T*arasov V.E.* Fractional Dynamics of Open Quantum Systems// Fractional Dynamics Nonlinear Physical Science.— 2010.— Vol. 0. — P. 467—490. DOI 10.1007/978-3-642-14003-7_20.
4. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл// Теоретическая и математическая физика. — 1992. — **90**, №3.— С. 354—367.
5. *Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальная модель динамической системы.— http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/0_14704%20-%20p.14.
6. *Владимирский Э.И.* Времена возвращения Пуанкаре при взаимодействии хаотических и стохастических систем // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.— 2012. — 6/4 (60). — С. 4—8.
7. *Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И.* Дробная структура «перемешивание-транспорт» как открытая система// Там же.— 2014. — 4/4 (70). — С. 4—9.
8. *Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И*. Визуализация времен возврата Пуанкаре в открытых системах дробного порядка// Сб. статей Междун. НПК «Новые задачи технич. наук и пути их решения» 1 сентября 2014 г, г. Уфа. —Уфа: Аэтерна, 2014. — С. 4—8.
9. *Altman Eduardo G., Elton C. da Silva, Ibere L. Caldas* Memory Effect on the Poincare Recurrence Time Series. — arXiv: nlin/0304027v2 [nlin. CD] 2 Sep 2003. — P. 1—9.
10. *Santhanam M.S., Holger Kantr* Return interval distribution of extreme events and long term memory.— arXiv: 0803.1706v1 [g-fin ST] 12 Mar. 2008. — P. 1—8.
11. *Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х.* Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре.— М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 292 с.
12. *Анищенко В.С., Астахов С.В.* Теория возвратов Пуанкаре и ее приложение к задачам нелинейной физики// УФН.— 2013. — **183**, №10.— С. 1009—1028. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310a.1009.
13. *Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И.* Нелинейный рекуррентный анализ как математическая модель управления хаотическими процессами // Информационные технологии. — 2011. — №5 (177). — С. 42—45.
14. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды.— УФН.— 1993. — **163**, №12. — С. 1—49.
15. *Ibedou Ismail, Takahisa Miyata* The Theorem of Pontrjagin-Schnirelmann and approcsimate sequences// New Zeeland Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 38. — P. 121— 128.
16. *Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И.* Синергетические методы управления хаотическими системами. — Баку: ELM, 2011. — 240 с.

17. *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегродифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации// Автоматика и Телемеханика.— 2013. —№4.— С. 3—42.
18. *Grigorenko I., Grigorenko E.* Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System// Physics Review Letters. — 2003. — Vol. 91. — P. 1—4.
19. *Matouk A.E.* Chaos Synchronization between Two Different Fractional systems of Lorenz Family// Mathematical Problems Engineering. — 2009. — 11 p. DOI :10.1155/2009/572—724.
20. *Ke-hui Sun, Jian Ren, Shui-sheng Qiu.* Co-coupled synchronization of fractional-order unified chaotic systems. — arXiv: 0909.2410[nlin.CD], 2009. — 8 p.
21. *Petras Ivo.* Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation.— Springer, 2011. — 218 p.
22. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. — М. : Техносфера, 2008. — 488 с.

E.I. Vladimirskiy, B.I. Ismailov

POINCARE RECURRENCES AS A CRITERION OF TOPOLOGICAL SYNCHRONIZATION AND CONTROL OF FRACTIONAL SYSTEMS

Statements of the synchronization and control problems for nonlinear physical systems of a fractional order have been considered. The criterion of the problem realization is the concept of the average time of Poincare recurrence. A generalized compact metrical space with Poincare dimensionality $<\tau>$ was proposed. The algorithm is provided for determination the memory losses when training system.

K e y w o r d s: systems with memory, Poincare recurrences, fractality, fractionality, visualization.

REFERENCES

1. Tarasov, V.E. (2011), “Models of theoretical physics with integro-differentiation of fractional order”, Abstract of Dr. Sci. (Phys.-Math.) dissertation, Moscow, Russia.
2. Tarasov, V.E. (2012), “The fractional oscillator as an open system”, *Cent. Eur. Phys*., Vol. 10, no. 2, pp. 382-389. DOI 10.2478/s11534-012-0008-0.
3. Tarasov, V.E. (2010), “Fractional Dynamics of Open Quantum Systems”, *Fractional Dynamics Nonlinear Physical Science,* Vol. 0, pp. 467-490. DOI 10.1007/978-3-642-14003-7_20.
4. Nigmatullin, R.R. (1992), “Fractional integral”, *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika,* Vol. 90, no. 3, pp. 354-367.
5. Uchaykin, V.V., “Fractional-differential model of dynamic system”, available at www.rfbr.ru/rffi/ru/books/0_14704.
6. Vladimirskiy, E.I. (2012), “Times of Poincare recurrence under interaction of chaotic and stochastic systems”, *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovyh tehnologiy,* no. 6/4 (60), pp. 4-8.
7. Vladimirskiy, E.I. and Ismaylov, B.I. (2014), “Fractional structure “mixing-transport” as the open system”, *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovyh tehnologiy*, no. 4/4 (70), pp. 4-9.
8. Vladimirskiy, E.I. and Ismaylov, B.I. (2014), “Visualization of the Poincare recurrence times in the open systems of fractional order”, *Novye zadachi tehnicheskikh nauk i puti ikh resheniya*. *Sb. statey Mezhdun. NPK* [New tasks of technical sciences and the ways of its solutions], Septemb.1, 2014, Aeterna, Ufa, Russia, pp. 4-8.
9. Altman, Eduardo G., Elton, C. da Silva and Ibere, L. Caldas (2003), “Memory Effect on the Poincare Recurrence Time Series”, available at: arXiv: nlin/0304027v2 [nlin. CD] 2 Sep. 2003.

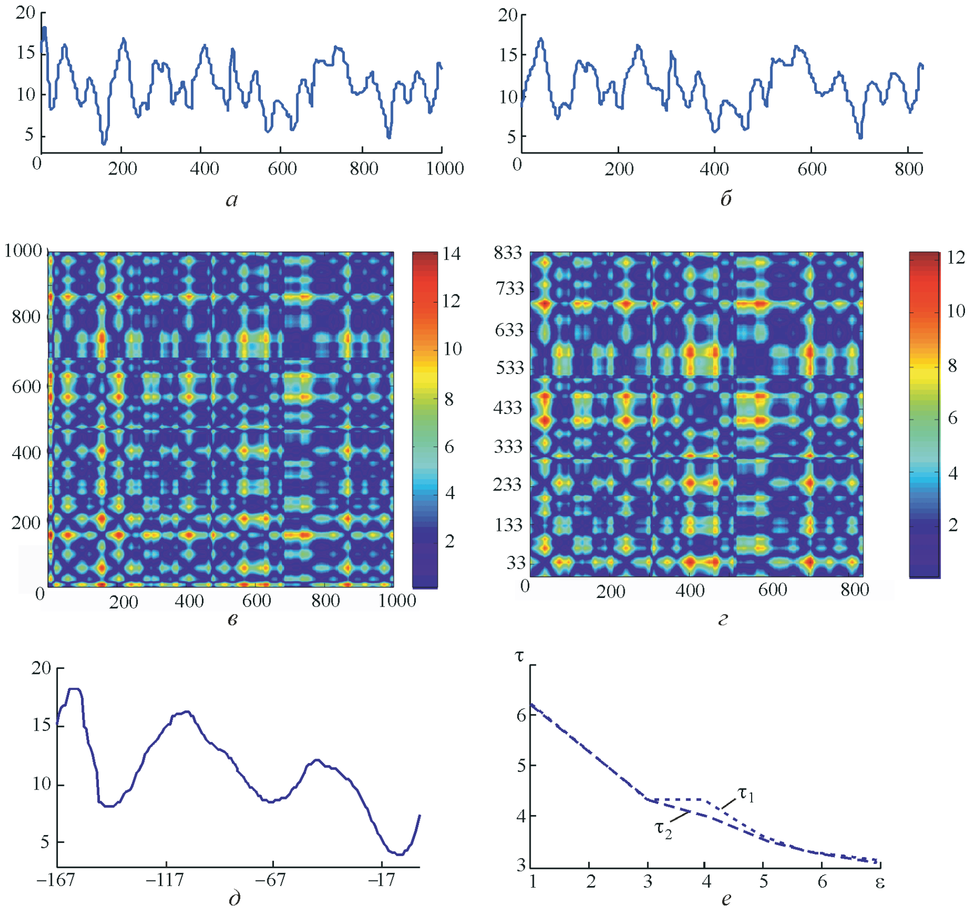
10. Santhanam, M.S. and Holger Kantr (2008), “Return interval distribution of extreme events and long term memory”, available at: arXiv: 0803.1706v1 [g-fin ST] 12 Mar. 2008.
11. Afraymovich, V., Ugalde, E. and Urias, H. (2011), *Fraktalnye razmernosti dlya vremen vozvrascheniya Puankare* [Fractal dimensions for Poincare recurrence times], NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Izhevskiy institut kompyuternyh issledovaniy, Moscow-Izhevsk, Russia.
12. Anischenko, V.S. and Astakhov, S.V. (2013), “Theory of Poincare recurrences and its application to the problems of nonlinear physics”, *UFN*, Vol. 183, no. 10, pp. 1009-1028. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310a.1009.
13. Vladimirskiy, E.I. and Ismaylov, B.I. (2011), “Nonlinear recurrent analysis as a mathematical model of chaotic processes control”, *Informacionnye tehnologii*, Vol. 177, no. 5, pp. 42-45.
14. Olemskoy, A.I. and Flat, A.Ya. (1993), “Use of fractal conception in physics of condensed medium”, *UFN*, Vol. 163, no. 12, pp.1-49.
15. Ibedou, Ismail and Takahisa, Miyata (2008), “The theorem of Pontrjagin-Schnirelmann and approximate sequences”, *New Zeeland Journal of Mathematics*, Vol. 38, pp. 121-128.
16. Vladimirskiy, E.I. and Ismaylov, B.I. (2011), *Sinergeticheskie metody upravleniya haoticheskimi sistemami* [Synergetic methods of control of chaotic systems], ELM, Baku, Azerbaijan.
17. Butkovskiy, A.G., Postnov, S.S. and Postnova E.A. (2013), “Fractional integro-differential calculus and its application in the control theory. I. Mathematical bases and interpretation problem”, *Avtomatika i Telemekhanika*, no. 4, pp. 3-42.
18. Grigorenko, I. and Grigorenko, E. (2003), “Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system”, *Phys.Rev.Let*., Vol. 91, pp. 1-4.
19. Matouk, A.E. (2009), “Chaos synchronization between two different fractional systems of Lorenz family”, *Mathematical Problems Engineering*. DOI : 10.1155/ 2009/ 572 724.
20. Ke-hui Sun, Jian Ren and Shui-sheng Qiu (2009), “Co-coupled synchronization of fractional-order unified chaotic systems”, available at: arXiv: 0909.2410[nlin.CD].
21. Petras, Ivo (2011), Fractional-order nonlinear systems. Modeling, analysis and simulation, Springer, USA.
22. Kronover, R. (2008), *Fraktaly i haos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamic systems], Tekhnosfera, Moscow Russia.

Поступила 26.11.14

ВЛАДИМИРСКИЙ Эдуард Иосифович, канд. техн. наук, старший науч. сотр. кафедры «Информационно-измерительная и компьютерная техника» Азербайджанской государственной нефтяной академии. Область научных исследований — синергетика, теория хаоса, физика дробных систем.

ИСМАЙЛОВ Бахрам Исрафил оглы, канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационно-измерительная и компьютерная техника» Азербайджанской государственной нефтяной академии. Область научных исследований — синергетика, теория хаоса, физика дробных систем.

К статье Э.И. ВЛАДИМИРСКОГО, Б.И. ИСМАЙЛОВА



Топологическая синхронизация связанных хаотических систем: *а* , *б* — дробные наблюдаемые семейства Lu — Chen; *в*, *г* — диаграммы Пуанкаре; *д* — графики потери памяти при синхронизации; *е* — синхронизированные спектры времен возврата τ_1, τ_2