УДК 519.63:532.546

Р.А. Мустафаев, д-р философии по математике
Ин-т систем управления Национальной академии наук Азербайджана
(Азербайджан, Az 1141, Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9,
тел. (+99412) 5392275, e-mail: aradmu@rambler.ru)

Математическое моделирование нестационарного движения двух несмешивающихся жидкостей с учетом схемы предельной анизотропии проницаемости пористой среды при закачке в галерею

Математическое моделирование в рамках гидродинамической модели предельно-анизотропного пласта (случай $k_x = k$, $k_z = \infty$) проведено на основе численного решения нестационарной задачи с подвижными границами. Рассмотрен процесс вытеснения нефти несмешивающейся с ней водой в конечном горизонтальном пласте постоянной мощности при различных вязкостях и плотностях в случае прямолинейно-параллельного движения. Для численного решения создана итерационно-разностная схема решения на основе сочетания метода выпрямления фронтов с методом конечных разностей. Приведены результаты численного эксперимента.

Математичне моделювання в рамках гідродинамічної моделі гранично-анізотропного шару (випадок $k_x = k$, $k_z = \infty$) проведено на основі чисельного розв'язку нестаціонарної задачі з рухомими границями. Розглянуто процес витискання нафти незмішуваною з нею водою в кінцевому горизонтальному шарі постійної потужності при різних в'язкостях та щільностях у випадку прямолінійно-паралельного руху. Для чисельного розв'язування створено ітераційно-різницеву схему розв'язку на основі поєднання методу випрямляння фронтів з методом кінцевих різниць. Наведено результати чисельного експерименту.

Ключевые слова: нестационарная задача с подвижными границами, модель предельно-анизотропного пласта, итерационно-разностная схема, метод выпрямления фронтов, метод конечных разностей.

Задачи многофазной фильтрации, интенсификации нефтегазодобычи посредством различных методов воздействия на продуктивные пласты, образования конусов обводнения и их устойчивости связаны с исследованиями параметров пласта, гидродинамических характеристик водонефтяных или газожидкостных систем, различных факторов, влияющих на эффективность процесса вытеснения. Особое значение имеет учет анизотропии пласта, что существенно влияет на выбор методики исследования и позволяет рассмотреть проблему с более реальных позиций. Так, исследование перемещения водонефтяного контакта на основе модели предельно-анизотропных пластов [1, 2] позволяет установить границы, между которыми происходит истинное движение, в том предельном случае, когда при коэффициенте проницаемости в направлении, перпендикулярном напластованию ($k_z = \infty$), получаемые результаты близки к экспериментальным данным [3]. На основе модели, описанной в работе [1], автомодельное решение задачи движения водонефтяного контакта в случае жесткого режима фильтрации для прямолинейного и радиального случаев рассмотрено в [2], а численное решение полученных при этом нелинейных параболических уравнений приведено в [2, 4]. Схема численного решения задачи в случае неоднородного пласта при $k_z = \infty$ для автомодельного движения водонефтяного контакта предложена в [5]. Аналогичная задача возникает и в связи с проблемой охраны окружающей среды, когда в связи с необходимостью уменьшения сбросов промышленных отходов в реки и водоемы проводят их нагнетание в скважины, вскрывающие глубокозалегающие водо- или газосодержащие пласты [6—8].

Ввиду сложности задачи решение ее возможно только при различных допущениях. Так, в работах [2, 4, 5] рассмотрено движение жидкостей в случае жесткого режима фильтрации. Связанные с этой областью течения нагнетаемой жидкости перед границей раздела и вытесняемой жидкости за границей раздела не рассматривались и поле давлений не определялось. В работах [6—8] рассмотрено автомодельное решение задачи, сформулированной в виде задачи с подвижными границами, для случая закачки жидкости в галерею или ряд скважин большой длины. Полученные при этом автомодельные решения сложны для практического применения и вычисления по ним не проводились. Поэтому целесообразно проведение исследований указанного класса задач на основе численных методов. В [9] рассмотрено математическое моделирование нестационарного процесса движения двух несмешивающихся жидкостей в рамках гидродинамической модели предельно-анизотропного пласта (случай $k_z = \infty$) на основе численного решения нестационарной задачи с подвижными границами при плоско-радиальном вытеснении.

В задачах нагнетания в галерею, при пренебрежении силой тяжести и учете лишь силы давления и сопротивления движению, граница раздела между различными жидкостями является вертикальной плоскостью, а при нагнетании в скважину она имеет форму кругового цилиндра. Если учесть влияние силы тяжести, то подвижная граница раздела будет некоторой криволинейной поверхностью. При этом, если нагнетаемая жидкость тяжелее пластовой, то она погружается в нижнюю часть пласта, а затем по его подошве продвигается вперед быстрее, чем по кровле. Если нагнетаемая жидкость легче пластовой, то она сосредотачивается в верхней части пласта и продвигается вдоль его кровли быстрее, чем вдоль подошвы. В процессе фильтрации двух жидкостей с различными физическими свойствами (плотность, вязкость) образуются три области. Первая область занята только нагнетаемой жидкостью, вторая — нагнетаемой и вытесняемой, а третья насыщена только вытесняемой жидкостью.

Будем рассматривать численное решение нестационарной задачи с подвижными границами на основе гидродинамической модели предельно-анизотропного пласта [1, 2] в случае $k_x = k, k_z = \infty$ для процесса прямолинейно-параллельного вытеснении нефти несмешивающейся с ней водой в конечном горизонтальном пласте. Для численного решения составлена итерационно-разностная схема, сочетающая метод выпрямления фронтов [10] с методом конечных разностей [9, 11].

Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную задачу с подвижными границами при прямолинейно-параллельном вытеснении нефти несмешивающейся с ней водой в горизонтальном пласте постоянной мощности h при различных вязкостях μ_i и плотностях ρ_i, $i=1,2$. Порода пласта предельно-анизотропная ($k_x = k, k_z = \infty$) [1, 2]. Жидкости считаются упругими, а движение — происходящим в упругой пористой среде [2]. Предполагается, что объемный вес закачиваемой жидкости γ_1 больше, чем пластовой γ_2 : $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$.

Рассмотрим следующую задачу. Определить давления $p_1(x,t)$, $p_{21}(x,t)$, $p_{22}(x,t)$, $p_3(x,t)$ в каждой области, положение подвижных границ $l_1(t)$, $l_2(t)$ и положение водонефтяного контакта $z(x,t)$ удовлетворяющие уравнениям и условиям

$$\chi_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \text{ в } D_1 : \{0 < x < l_1(t), 0 < t < T\}; \tag{1}$$

$$\chi_{21} \frac{\partial}{\partial x}\left(z \frac{\partial p_{21}}{\partial x} \right) = z \frac{\partial p_{21}}{\partial t} + \alpha_1(p_{21}) \frac{\partial z}{\partial t} \tag{2}$$

в $D_{21} : \{l_1(t) < x < l_2(t), 0 < t < T\},\ h > z > 0$;

$$\chi_{22} \frac{\partial}{\partial x}\left[(h-z) \frac{\partial p_{22}}{\partial x} \right] = (h-z) \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + \alpha_2(p_{22}) \frac{\partial (h-z)}{\partial t} \tag{3}$$

в $D_{22} : \{l_1(t) < x < l_2(t), 0 < t < T\},\ 0 < h - z < h$;

$$\chi_3 \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} = \frac{\partial p_3}{\partial t} \text{ в } D_3 : \{l_2(t) < x < L, 0 < t < T\}; \tag{4}$$

$$p_{21}(x,t)=p_{22}(x,t)+\Delta\gamma z(x,t)+h\gamma_2,\ \ \Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2>0; \tag{5}$$

$$l_i(0)=l_{i,0},\ \ p_1(x,0)=\Psi_1(x),\ 0\le x\le l_1(0),\ \ p_{2i}(x,0)=\Psi_{2i}(x),\ i=1,2,$$
$$l_1(0)\le x\le l_2(0),\ \ p_3(x,0)=\Psi_3(x),\ \ l_2(0)\le x\le L; \tag{6}$$

$$\left[A\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}+Bp_1(x,t)\right]_{x=0}=f(t),\ \ 0\le t\le T; \tag{7}$$

$$\left[Cp_3(x,t)+D\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}\right]_{x=L}=\varphi(t),\ \ 0\le t\le T; \tag{8}$$

$$p_1(x,t)|_{x=l_1(t)}=p_{22}(x,t)|_{x=l_1(t)}+h\gamma_1,\ \ 0\le t\le T; \tag{9}$$

$$\frac{kh}{\mu_1}\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l_1(t)}=\frac{kh}{\mu_1}\frac{\partial p_{21}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l_1(t)},\ \ 0\le t\le T; \tag{10}$$

$$p_{21}(x,t)|_{x=l_2(t)}=p_3(x,t)|_{x=l_2(t)},\ \ 0\le t\le T; \tag{11}$$

$$\frac{kh}{\mu_2}\frac{\partial p_{22}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l_2(t)}=\frac{kh}{\mu_2}\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l_2(t)},\ \ 0\le t\le T; \tag{12}$$

$$\frac{dl_i(t)}{dt}=\beta_{3-i}\frac{\partial p_{23-i}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l_i(t)},\ \ i=1,2,\ 0\le t\le T, \tag{13}$$

где индекс 1 относится к воде, а индекс 2 — к вытесняемой нефти;

$$\chi_1=\chi_{21}=\frac{k_1K}{m\mu_1};\ \chi_{22}=\chi_3=\frac{k\,K}{m\mu_2};$$

$$\alpha_i(p_{2i})=K_i+(p_{2i}-p_0),\ \ \beta_{3-i}=-\frac{k}{m\mu_{3-i}},\ \ i=1,2;$$

k — коэффициент проницаемости; m — пористость пласта; K_i, $i=1,2,$ — совместный модуль упругости соответствующей жидкости и пористой среды; p_1, p_{21}, p_3 — давление на подошве; p_{22} — давление на кровле пласта. Значения коэффициентов A, B, C, D и функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ определяются условиями (7) и (8), записанными в общем виде для всех комбинаций условий 1-го и 2-го рода, задаваемых на нагнетательной галерее и на внешней границе. Предполагаем, что выполнены условия сопряжения и подвижные границы $l_1(t)$ и $l_2(t)$ не совпадают с концами отрезка $[0, L]$ и между собой:

$$f(0)=\varphi_1(0),\ \varphi(0)=\varphi_3(L),\ \varphi_1(l_1(0))=\varphi_2(l_1(0)),\ \varphi_2(l_2(0))=\varphi_3(l_2(0)),$$

$$l_1(0)\neq 0,\ l_1(0)\neq l_2(0),\ l_3(0)\neq L.$$

Метод численного решения. Для решения задачи (1)—(13) перейдем к безразмерным переменным:

$$\frac{x}{L_0}=\bar{x},\ \frac{t}{T_0}=\bar{t},\ \frac{p(x,t)}{P_0}=\bar{p}(\bar{x},\bar{t}),\ \frac{z}{H_0}=\bar{z},$$

где L_0, T_0, P_0, H_0 — известные размерные константы (далее черточки опущены), и применим метод выпрямления фронтов [10] посредством замены переменных:

$$s_i=[x-l_{i-1}(t)][l_i(t)-l_{i-1}(t)]^{-1}+(i-1),\ t=t,\ i=1,2,3,$$

при $l_0(t)=0$, $l_3(t)=L$. Здесь для области D_1 $i=1$, для областей D_{21} и D_{22} $i=2$, а для области D_3 $i=3$. В результате исходные области D_1, D_{2k}, $k=1,2$, и D_3 преобразуются в прямоугольники, $D_1^*=\{0<s_1<1, 0<t<T\}$, $D_{2k}^*=\{1<s_2<2, 0<t<T\}$, $k=1,2$, $D_3^*=\{2<s_3<3, 0<t<T\}$, а внутренняя граница, поверхности раздела $l_1(t)$ и $l_2(t)$ и внешняя граница «выпрямляются» и определяются уравнениями $s_{i-1}=i-1$, $i=\overline{1,4}$. Тогда исходная задача (1)—(13) принимает вид

$$LP_1\equiv\frac{\partial P_1}{\partial t}-s_1\dot{l}_1(t)[l_1(t)-l_0(t)]^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial s_1}-a_1^2[l_1(t)-l_0(t)]^{-2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial s_1^2}=0 \qquad (14)$$

в $D_1^*:\{0<s_1<1, 0<t<T\}$;

$$LP_{2n}\equiv z_n\frac{\partial P_{2n}}{\partial t}-(2-s_2)\dot{l}_n(t)[l_2(t)-l_1(t)]^{-1}z_n\frac{\partial P_{2n}}{\partial s_2}-\alpha_n\left[\frac{\partial z_n}{\partial t}+\frac{\partial z_n}{\partial s_2}\frac{ds_2}{dt}\right]-$$

$$-a_{2n}^2[l_2(t)-l_1(t)]^{-2}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(z_n\frac{\partial P_{2n}}{\partial s_2}\right)=0 \qquad (15)$$

в D_{2n}^*: $\{1<s_2<2, 0<t<T\}$, $n=1,2$, $z_n=\begin{cases} z, & \text{при } n=1,\\ 1-z, & \text{при } n=2;\end{cases}$

$$LP_3\equiv\frac{\partial P_3}{\partial t}-(3-s_3)\,\dot{l}_2(t)[l_3(t)-l_2(t)]^{-1}\frac{\partial P_3}{\partial s_3}-a_3^2[l_3(t)-l_2(t)]^{-2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial s_3^2}=0 \qquad (16)$$

в $D_3^*:\{2<s_3<3, 0<t<T\}$;

$$l_k(0)=l_{k,0},\ P_1(s_1^0,0)=\Psi_1(s_1^0),\ 0\le s_1^0\le 1,\ P_{2k}(s_2^0,0)=\Psi_{2k}(s_2^0),\ 1\le s_2^0\le 2,$$

$$k=1{,}2,\ \ P_3(s_3^0,0)=\Psi_3(s_3^0),\ \ 2\le s_3^0\le 3; \tag{17}$$

$$\left[A^*(l_1(t)-l_0(t))^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial s_1}+B^*P_1\right]_{s_1=0}=f^*(t),\ \ 0\le t\le T,$$

$$\left[C^*P_3+D^*(l_3(t)-l_2(t))^{-1}\frac{\partial P_3}{\partial s_3}\right]_{s_3=3}=\varphi^*(t),\ \ 0\le t\le T; \tag{18}$$

$$P_1(s_1,t)|_{s_1=1}=P_{22}(s,t)|_{s_1=1}+H\gamma_1,\ \ \ 0\le t\le T; \tag{19}$$

$$P_3(s_2,t)|_{s_2=2}=P_{21}(s_2,t)|_{s_2=2},\ 0\le t\le T; \tag{20}$$

$$\alpha_1\left[(l_1(t)-l_0(t))^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial s_1}\right]_{s_1=1}=\alpha_1\left[(l_2(t)-l_1(t))^{-1}\frac{\partial P_{21}}{\partial s_2}\right]_{s_2=1},\ \ 0\le t\le T; \tag{21}$$

$$\alpha_2\left[(l_2(t)-l_1(t))^{-1}\frac{\partial P_{22}}{\partial s_2}\right]_{s_2=2}=\alpha_2\left[(l_3(t)-l_2(t))^{-1}\frac{\partial P_3}{\partial s_3}\right]_{s_3=2},\ \ 0\le t\le T; \tag{22}$$

$$\frac{dl_i(t)}{dt}=a_{ni}\left[(l_i(t)-l_{i-1}(t))^{-1}\frac{\partial P_{3-i}}{\partial s_i}\right]\Bigg|_{s=i},\ i=1{,}2\,,\ 0\le t\le T; \tag{23}$$

$$P_{21}(s_2,t)=P_{22}(s_2,t)+\Delta\gamma z\,(s_2,t)+H\gamma_2,\ \ \{1\le s_2\le 2\,,\ \ 0\le t\le T\}, \tag{24}$$

где $A^*=AP_0L_0^{-1};\ B^*=BP_0;\ C^*=CP_0;\ D^*=DP_0L_0^{-1};$

$$a_1^2=\frac{kKT_0}{m\mu_1L_0^2};\ a_{2n}^2=\frac{kKT_0}{m\mu_nL_0^2};\ a_3^2=\frac{kKT_0}{m\mu_2L_0^2};\ H=\frac{h}{H_0};$$

$$a_{ni}=\beta_{3-i}T_0P_0L_0^2,\ i=1,\,2;\ \alpha_i=kh\mu_i^{-1};\ \mu_0=\mu_2\,\mu_1^{-1},$$

$$s_i^0=[x-l_{i-1}(0)][l_i(0)-l_{i-1}(0)]^{-1}+(i-1),\ \ i=\overline{1{,}3}.$$

Итерационно-разностная схема решения. Составляем неявную двухслойную итерационно-разностную схему. Для этого вводим неравномерную пространственно-временную сетку узлов [11]:

$$\overline{\Omega}_{ij}=\{(s_i,t_j):0=s_0<s_1<...<s_{N_1}=1<s_{N_1+1}<...<s_{N_1+N_2}=2<s_{N_1+N_2+1}<...$$

$$...<s_{N_1+N_2+N_3}=3;\ \ s_{i+1}=s_i+\nabla_{i+1},\ \ i=\overline{0,\,N_1+N_2+N_3-1}\,,$$

$$0=t_0<t_1<...<T_M\,,\ \ t_{j+1}=t_j+\Delta t_j\,,\ \ j=\overline{0,\,M-1}\}.$$

Тогда для определения искомых величин на $(j+1)$-м временном слое получаем следующую итерационно-разностную задачу:

$$\lfloor \alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1}(1+c_{k,i_k+1})^{-1}+\gamma_k^{(n)} \rfloor P_{k,i_k+1,j+1}^{(n)} -$$

$$-\lfloor \alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1}+\gamma_k^{(n)}(1-c_{k,i_k+1})+1 \rfloor P_{k,i_k,j+1}^{(n)} +$$

$$+[\alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1}(1+c_{k,i_k+1})^{-1}-\gamma_k^{(n)}]\, c_{k,i_k+1} P_{k,i_k-1,j+1}^{(n)} = -P_{k,i_k,j},$$

$$k=1,3,\;\; i_1=\overline{1, N_1-1},\; i_3=\overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3-1},$$

$$j=\overline{0, M-1},\;\; n=1,2,3,\ldots; \tag{25}$$

$$\lfloor \alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1}(1+c_{2,i_k+1})^{-1}+\gamma_k^{(n)}-(-1)^l \delta_k^{(n)} \rfloor P_{k,i_k+1,j+1}^{(n)} -$$

$$-[\alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1}+1+(\gamma_k^{(n)}-(-1)^l \delta_k^{(n)})(1-c_{2,i_k+1})+\varepsilon_k^{(n-1)}]\, P_{k,i_k,j+1}^{(n)} +$$

$$+[\alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1}(1+c_{2,i_k+1})^{-1}-\gamma_k^{(n)}+(-1)^l \delta_k^{(n)}]\, c_{2,i_k+1} P_{k,i_k-1,j+1}^{(n)} - \bar{\gamma}_k^{(n)} P_{3-k,i_k+1,j+1}^{(n)} +$$

$$+[\bar{\gamma}_k^{(n)}+\varepsilon_k^{(n-1)}](1-c_{2,i_k+1}) P_{3-k,i_k,j+1}^{(n)} - \bar{\gamma}_k^{(n)} c_{2,i_k+1} P_{3-k,i_k-1,j+1} =$$

$$=\varepsilon_k^{(n-1)} P_{3-k,i,j}-(1+\varepsilon_k^{(n-1)})\, P_{k,i_k,j},$$

$$k=21,22,\;\; i_k=\overline{N_1+1, N_1+N_2-1},\;\; j=\overline{0, M-1},\;\; n=1,2,3,\ldots,\;\; l=1,2; \tag{26}$$

$$l_k(0)=l_{k,0},\; k=21,22; \tag{27}$$

$$\begin{gathered} P_{k,i_k,0}=\phi_{k,i_k},\;\; k=1,3,\;\; i_1=\overline{0, N_1},\;\; i_3=\overline{N_1+N_2, N_1+N_2+N_3}, \\ P_{k,i,0}=\phi_{k,i},\;\; k=21,22,\;\; i=\overline{N_1, N_1+N_2}; \end{gathered} \tag{28}$$

$$P_{21,i,j+1}^{(n)} = P_{22,i,j+1}^{(n)} + H(\Delta\gamma\, z_{i,j+1}^{(n)}+\gamma_2),\;\; i=\overline{N_1, N_1+N_2},\;\; j=\overline{0, M-1}; \tag{29}$$

$$A^* P_{1,1,j+1}^{(n)} - [A^*-B^*\nabla_1(l_{1,j+1}^{(n)}-l_{0,j+1}^{(n)})]\, P_{1,0,j+1}^{(n)} = f_{j+1}^*\nabla_1(l_{1,j+1}^{(n)}-l_{0,j+1}^{(n)}),$$

$$j=\overline{0, M-1}; \tag{30}$$

$$\lfloor C^*\nabla_{N_1+N_2+N_3}(l_{3,j+1}^{(n)}-l_{2,j+1}^{(n)})+D^* \rfloor P_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}^{(n)} - D^* P_{3,N_1+N_2+N_3-1,j+1}^{(n)} =$$

$$=\varphi_{j+1}^*\nabla_{N_1+N_2+N_3}(l_{3,j+1}^{(n)}-l_{2,j+1}^{(n)}),\;\; j=\overline{0, M-1}; \tag{31}$$

$$P_{1,N_1,j+1}^{(n)} = P_{22,N_1,j+1}^{(n)} + H\gamma_1,\;\; j=\overline{0, M-1}; \tag{32}$$

$$P_{21,N_1+1,j+1}^{(n)} - (1-c_0^{(n)})\, P_{21,N_1,j+1}^{(n)} + c_0^{(n)} P_{1,N_1-1,j+1}^{(n)} = 0,\;\; j=\overline{0, M-1}; \tag{33}$$

$$P^{(n)}_{3,N_1+N_2,j+1}=P^{(n)}_{21,N_1+N_2,j+1},\ j=\overline{0,M-1}; \qquad (34)$$

$$c^{-(n)}P^{(n)}_{3,N_1+N_2+1,j+1}-(c^{-(n)}+1)P^{(n)}_{21,N_1+N_2,j+1}+P^{(n)}_{21,N_1+N_2-1,j+1}=0,$$
$$j=\overline{0,M-1}; \qquad (35)$$

$$l^{(n)}_{1,j+1}=l_{1,j}+\alpha^*_1\nabla_{j+1}[(l^{(n-1)}_{2,j+1}-l^{(n-1)}_{1,j+1})\nabla_{N_1+1}]^{-1}[P^{(n-1)}_{22,N_1+1,j+1}-P^{(n-1)}_{22,N_1,j+1}],$$
$$j=\overline{0,M-1};\ n=1,2,3,\ldots; \qquad (36)$$

$$l^{(n)}_{2,j+1}=l_{2,j}+\alpha^*_2\nabla_{j+1}[(l^{(n-1)}_{2,j+1}-l^{(n-1)}_{1,j+1})\nabla_{N_1+N_2}]^{-1}[P^{(n-1)}_{21,N_1+N_2,j+1}-P^{(n-1)}_{21,N_1+N_2-1,j+1}],$$
$$j=\overline{0,M-1};\ n=1,2,3,\ldots, \qquad (37)$$

где введены обозначения:

$$\alpha^{(n)}_k=2a^2_k\nabla_{j+1}[(l^{(n)}_{m_k,j+1}-l^{(n)}_{m_k-1,j+1})\nabla_{i+1}]^{-2},\ k=1,21,22,3;$$
$$m_1=1,\ m_{21}=m_{22}=2,\ m_3=3;$$
$$\gamma^{(n)}_k=(t_k-1-s_i)(l^{(n)}_{r_k,j}-l_{r_k,j})[2\nabla_{i+1}(l^{(n)}_{m_k,j+1}-l^{(n)}_{m_k-1,j+1})]^{-1};$$
$$k=1,3,\ m_1=r_1=t_1=1,\ m_3=3,\ r_3=2,\ t_3=4;$$
$$\gamma^{(n)}_k=\bar\gamma^{(n)}(e^{(n-1)}_k+\varepsilon^{(n-1)}_k),\ \bar\gamma^{(n)}_k=\bar\gamma^{(n)}e^{(n-1)}_k,\ k=21,22;$$
$$\bar\gamma^{(n)}=[(l^{(n)}_{2,j+11}-l_{2,j})-(2-s_i)(l^{(n)}_{2,j+1}-l_{2,j}-l^{(n)}_{1,j+1}+l_{1,j})][2\nabla_{i+1}(l^{(n)}_{2,j+1}-l^{(n)}_{1,j+1})]^{-1};$$
$$\delta^{(n)}_k=a^2_k\nabla_{j+1}[4\nabla_{i+1}(l^{(n)}_{2,j+1}-l^{(n)}_{1,j+1})]^{-2}[(P^{(n-1)}_{21,i+1,j+1}-P^{(n-1)}_{22,i+1,j+1})-$$
$$-(1-c_{2,i+1})(P^{(n-1)}_{21,i,j+1}-P^{(n-1)}_{22,i,j+1})-c_{2,i+1}(P^{(n)}_{21,i-1,j+1}-P^{(n-1)}_{22,i-1,j+1})],\ k=1,2;$$
$$e^{(n-1)}_k=K_kP^{-1}_0+(P^{(n-1)}_{k,i,j+1}-1);\ \varepsilon^{(n-1)}_k=(-1)^{k-1}(P^{(n-1)}_{21,i,j+1}-P^{(n-1)}_{22,i,j+1}-H\gamma_{3-k});$$
$$c^{(n)}_0=(l^{(n)}_{2,j+1}-l^{(n)}_{1,j+1})(l^{(n)}_{1,j+1}-l^{(n)}_{0,j+1})^{-1};\ \bar c^{(n)}_0=(l^{(n)}_{2,j+1}-l^{(n)}_{1,j+1})(l^{(n)}_{3,j+1}-l^{(n)}_{2,j+1})^{-1};$$
$$a^2_k=T_0\chi_kL^{-2}_0,\ k=1,21,22,3;\ a^*_l=-\beta_{3-l}T_0P_0L^{-2}_0,\ l=1,2.$$

Из (30), (25) при $k=1$, из (33), (32), (26) при $k=21$ и 22 с учетом (29), (34), (32), (25) при $k=3$ и (31) получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$a^{(n)}_{1,0,j+1}P^{(n)}_{1,1,j+1}-b^{(n)}_{1,0,j+1}P^{(n)}_{1,0,j+1}=D_{1,0},$$
$$a^{(n)}_{1,i,j+1}P^{(n)}_{1,i+1,j+1}-b^{(n)}_{1,i,j+1}P^{(n)}_{1,i,j+1}+c^{(n)}_{1,i,j+1}P^{(n)}_{1,i-1,j+1}=D_{1,i},\ i=\overline{1,N_1-1},$$
$$a^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{1,i+1,j+1}-b^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{1,i,j+1}+c^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{1,i-1,j+1}+$$

$$+d^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{2,i+1,j+1}-e^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{2,i,j+1}+f^{(n)}_{21,i,j+1}P^{(n)}_{1,i-1,j+1}=D_{21,i},$$

$$a^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{1,i+1,j+1}-b^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{1,i,j+1}+c^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{1,i-1,j+1}+$$

$$+d^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{2,i+1,j+1}-e^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{2,i,j+1}+f^{(n)}_{22,i,j+1}P^{(n)}_{2,i-1,j+1}=D_{22,i},\ i=\overline{N_1,N_1+N_2},$$

$$a^{(n)}_{3,i,j+1}P^{(n)}_{3,i+1,j+1}-b^{(n)}_{3,i,j+1}P^{(n)}_{3,i,j+1}+c^{(n)}_{3,i,j+1}P^{(n)}_{3,i-1,j+1}=D_{3,i}, \tag{38}$$

$$i=\overline{N_1+N_2+1,N_1+N_2+N_3-1},$$

$$-b^{(n)}_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}P^{(n)}_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}+$$

$$+c^{(n)}_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}P^{(n)}_{3,N_1+N_2+N_3-1}=D_{3,N_1+N_2+N_3}.$$

Поскольку задача (25)—(37) нелинейна, для ее решения применен метод итераций, который заключается в следующем. Принимая в качестве нулевых приближений $l^{(0)}_{1,j+1}$, $l^{(0)}_{2,j+1}$ и $P^{(0)}_{i,j+1}$ значения, полученные экстраполяцией значений из двух предыдущих временных слоев, из (36) и (37) находим $l^{(1)}_{1,j+1}$ и $l^{(1)}_{2,j+1}$. Затем, решая систему уравнений (38), определяем все значения $P^{(1)}_{i,j+1}$. Аналогично определяются и все последующие приближения. На каждой итерации для решения системы алгебраических уравнений (38) применен метод прогонки [9], представляющий собой сочетание методов обычной и матричной прогонок.

Итерационный процесс завершался при некотором значении $n = K+1$ и выполнении условий $\max\limits_{i,j+1}|P^{(K+1)}_{i,j+1}-P^{(K)}_{i,j+1}|\le\varepsilon_1$, $\max\limits_{j+1}|l^{(K+1)}_{k,j+1}-l^{(K)}_{k,j+1}|\le\varepsilon_2$, $\varepsilon_m=\text{const}>0, m=1,2, k=1,2, i=\overline{1,N_1+N_2+N_3}$, где ε_m — заданная точность вычислений.

Результаты численного эксперимента. Численный эксперимент для задачи (25)—(37) выполнен при $a_1^2=a_{21}^2=29600$ см^2/с, $a_{22}^2=a_3^2=9466{,}7$ см^2/с, $k_1=k_{21}=k_{22}=k_3=1$ дарси, $\mu_0=3,6,9,12$, $\Delta\gamma=100$ кГ/м^3, $\Delta\gamma=200$ кГ/м^3; $P_0 =$ = 50 атм, $L_0 = 100$ м, $h = 10$; 20; 100 м; $f(t) = 1{,}5$; 3; $\varphi(t)=0{,}8$, $T_0=1$ год.

В табл. 1 и 2 приведены значения подвижных границ $l_1(t)$ и $l_2(t)$, давлений $P_{21}(l_i(t),t)$ и $P_{22}(l_i(t),t)$, $i=1,2$, на этих границах и границы водонефтяного контакта $z(s_2,t)$ для точки $s_2 = 1{,}5$ в различные моменты времени при $\Delta\gamma=100$ кГ/м^3, $A=D=0$, $B=C=1$ для четырех случаев:

1) $\mu_0=3$, $f(t)=1{,}5$, $h=10$ м; 2) $\mu_0=3$, $f(t)=3$, $h=10$ м;
3) $\mu_0=3$, $f(t)=1{,}5$, $h=100$ м; 4) $\mu_0=9$, $f(t)=1{,}5$, $h=10$ м.

Результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

1. Давление на границах $l_1(t)$ и $l_2(t)$ в начальный период процесса вытеснения в течение небольшого промежутка времени возрастает, достигает некоторого максимального значения (синхронно на этих границах), а затем начинает понижаться.

2. Граница $l_1(t)$, т.е. точка контакта на кровле пласта, в начальный промежуток времени практически не движется, затем начинает перемещаться в отрицательную область, достигает некоторого максимального значения $-l_{1\,\max}$, после чего начинает поступательное движение с очень малой скоростью. Аналогичный эффект описан в работах [2, 5, 7]. Граница $l_2(t)$, т.е. точка контакта на подошве пласта, сразу начинает движение и движется относительно границы $l_1(t)$ достаточно быстро. Следует заметить, что изменение границ $l_1(t)$ и $l_2(t)$ происходит практически линейно.

Таблица 1

$t\cdot10^5$	$l_1(t)\cdot10^3$	$l_2(t)\cdot10^3$	$z(s_2,t)\cdot10$	$P_{21}(l_1(t),t)$	$P_{21}(l_2(t),t)$	$P_{22}(l_1(t),t)$	$P_{22}(l_2(t),t)$
$0{,}1\cdot10^{-4}$	0,1003 / 0,1015	0,2026 / 0,2100	4,935 / 4,768	1,488 / 2,950	1,466 / 2,861	1,468 / 2,930	1,448 / 2,843
$0{,}3\cdot10^{-4}$	0,1007 / 0,1031	0,2066 / 0,2255	4,815 / 4,375	1,491 / 2,963	1,475 / 2,887	1,476 / 2,943	1,468 / 2,869
$0{,}15\cdot10^{-3}$	0,1017 / 0,1086	0,2207 / 0,2785	4,442 / 3,477	1,496 / 2,981	1,486 / 2,925	1,476 / 2,961	1,468 / 2,907
$0{,}63\cdot10^{-3}$	0,1027 / 0,1187	0,2493 / 0,3847	3,898 / 2,730	1,498 / 2,989	1,491 / 2,942	1,478 / 2,969	1,473 / 2,924
$2{,}55\cdot10^{-3}$	0,1019 / 0,1373	0,3081 / 0,5986	3,380 / 2,295	1,499 / 2,994	1,494 / 2,951	1,479 / 2,974	1,476 / 2,933
$1{,}023\cdot10^{-2}$	0,0930 / 0,1709	0,4279 / 1,0321	3,114 / 2,086	1,500 / 2,996	1,495 / 2,955	1,480 / 2,976	1,477 / 2,937
$4{,}095\cdot10^{-2}$	0,0653 / 0,2332	0,6697 / 1,8958	3,054 / 1,993	1,500 / 2,997	1,496 / 2,958	1,480 / 2,977	1,478 / 2,940
$1{,}64\cdot10^{-1}$	0,0015 / 0,3514	1,1541 / 3,6084	3,066 / 1,954	1,500 / 2,998	1,496 / 2,959	1,480 / 2,978	1,478 / 2,941
$6{,}55\cdot10^{-1}$	−0,1309 / 0,5855	2,1300 / 7,0466	3,082 / 1,936	1,500 / 2,998	1,496 / 2,961	1,480 / 2,978	1,478 / 2,943
$26{,}2\cdot10^{-1}$	−0,4039 / 1,0309	4,0596 / 13,760	3,101 / 1,933	1,500 / 2,999	1,496 / 2,961	1,480 / 2,979	1,478 / 2,943
10,49	−0,8698 / 2,0203	8,5810 / 28,089	2,999 / 1,923	1,500 / 2,998	1,495 / 2,954	1,480 / 2,978	1,477 / 2,936
41,94	−1,0522 / 5,838	23,198 / 72,627	2,624 / 1,861	1,500 / 2,996	1,488 / 2,888	1,480 / 2,976	1,470 / 2,870

Примечание: над чертой указаны значения для случая 1, под чертой — для случая 2.

3. Граница водонефтяного контакта $z(s,t)$ с увеличением времени процесса вытеснения, сохраняя форму параболы, стремится к вертикальной линии.

4. Увеличение мощности продуктивного пласта, при прочих равных условиях, приводит к увеличению протяженности области границы раздела, при этом скорость перемещения точки контакта на подошве пласта резко возрастает, а точка контакта на кровле пласта начинает движение практически сразу после начала процесса вытеснения, и перемещение происходит в обратном направлении. Достигнув некоторого максималь-

Таблица 2

$t\cdot 10^{-5}$	$l_1(t)\cdot 10^3$	$l_2(t)\cdot 10^3$	$z(s_2,t)\cdot 10$	$P_{21}(l_1(t),t)$	$P_{21}(l_2(t),t)$	$P_{22}(l_1(t),t)$	$P_{22}(l_2(t),t)$
$0{,}1\cdot 10^{-4}$	0,1000 / 0,1001	0,2036 / 0,2029	4,891 / 4,883	1,488 / 1,495	1,461 / 1,482	1,288 / 1,475	1,281 / 1,464
$0{,}3\cdot 10^{-4}$	0,0996 / 0,1001	0,2094 / 0,2081	4,708 / 4,644	1,491 / 1,496	1,469 / 1,483	1,291 / 1,476	1,289 / 1,465
$0{,}15\cdot 10^{-3}$	0,0963 / 0,1002	0,2307 / 0,2294	4,224 / 3,728	1,496 / 1,498	1,479 / 1,487	1,296 / 1,478	1,299 / 1,469
$0{,}63\cdot 10^{-3}$	0,0827 / 0,1001	0,2776 / 0,2744	3,845 / 2,320	1,498 / 1,499	1,484 / 1,490	1,298 / 1,479	1,304 / 1,472
$2{,}55\cdot 10^{-3}$	0,0432 / 0,0986	0,3790 / 0,3665	3,732 / 1,274	1,500 / 1,499	1,486 / 1,491	1,300 / 1,479	1,306 / 1,473
$1{,}023\cdot 10^{-2}$	−0,0462 / 0,0914	0,5902 / 0,5532	3,725 / 0,882	1,500 / 1,500	1,487 / 1,492	1,300 / 1,480	1,307 / 1,474
$4{,}095\cdot 10^{-2}$	−0,2311 / 0,0668	1,0191 / 0,9283	3,730 / 0,754	1,500 / 1,500	1,488 / 1,492	1,300 / 1,480	1,308 / 1,474
$1{,}64\cdot 10^{-1}$	−0,6052 / 0,0066	1,8797 / 1,6747	3,734 / 0,711	1,501 / 1,500	1,488 / 1,493	1,301 / 1,480	1,308 / 1,475
$6{,}55\cdot 10^{-1}$	−1,3550 / −0,1211	3,6056 / 3,1682	3,735 / 0,696	1,501 / 1,500	1,488 / 1,492	1,301 / 1,480	1,308 / 1,474
$26{,}2\cdot 10^{-1}$	−2,8607 / −0,3811	7,0387 / 6,1256	3,738 / 0,691	1,501 / 1,500	1,488 / 1,493	1,301 / 1,480	1,308 / 1,475
10,49	−5,7866 / −0,9042	14,509 / 12,057	3,685 / 0,690	1,501 / 1,500	1,486 / 1,492	1,301 / 1,480	1,306 / 1,474
41,94	−10,830 / −1,9027	34,362 / 27,412	3,475 / 0,654	1,502 / 1,500	1,476 / 1,487	1,302 / 1,480	1,296 / 1,469

Примечание: над чертой указаны значения для случая 3, под чертой — для случая 4.

ного значения $-l_{1\max}$, граница $l_1(t)$ начинает поступательное движение. При этом время нахождения и степень удаления границы $l_1(t)$ в отрицательную область с увеличением мощности пласта существенно возрастает.

5. При увеличении давления нагнетания протяженность области границы раздела существенно возрастает, момент достижения максимального значения давления на подвижной границе $l_2(t)$ наступает позже, чем на границе $l_1(t)$. При этом промежуток времени сохранения максимального значения давления на границе $l_2(t)$ существенно сокращается. Эффект перемещения границы $l_1(t)$ в отрицательную область проявляется как при величинах давления нагнетания, соизмеримых с начальным пластовым давлением независимо от значения μ_0, так и при высоких давлениях нагнетания и больших значениях μ_0. При высоком давлении нагнетания и малых значениях μ_0 указанный эффект отсутствует и граница $l_1(t)$ движется только поступательно.

6. При высоком темпе нагнетания разность плотностей не оказывает существенного влияния на характер процесса вытеснения. Увеличение разности плотностей в основном оказывает влияние на величину границы $l_1(t)$.

7. С увеличением значения μ_0 протяженность области границы раздела возрастает, достижение максимального значения давления на границах $l_1(t)$ и $l_2(t)$ несколько ускоряется, а продолжительность сохранения этого значения увеличивается, время перемещения точки контакта на кровле пласта в отрицательной области резко возрастает. Стремление границы водонефтяного контакта $z(s,t)$ к вертикальной линии значительно усиливается. Следует заметить, что величина μ_0 оказывает наиболее существенное влияние на характер процесса.

8. Влияние второго члена в выражении $\alpha_i(p_i)$ проявляется через значительный промежуток времени после начала процесса вытеснения.

9. Сила тяжести качественно изменяет картину физического процесса и оказывает существенное влияние на характер вычислительного процесса.

Выводы

При математическом моделировании процесса прямолинейно-параллельного вытеснения нефти несмешивающейся с ней водой на основе численного решения нестационарной задачи с подвижными границами и применения модели предельно-анизотропного пласта (случай $k_x = k,\ k_z = \infty$) установлено, что основное влияние на процесс вытеснения оказывает отношение вязкостей. Разность плотностей и мощность пласта существенного влияния на процесс не оказывают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Развитие* исследований по теории фильтрации в СССР. — М. : Наука, 1969. — 545 с.
2. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. — М .: Гостоптехиздат, 1963. — 396 с.
3. *Зигангареев М.А., Теплов Ю.А.* Расчеты перемещения водо-нефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования // Тр. ВНИИ нефтегаз. — 1966. — Вып. 47. — С. 142—150.
4. *Алихашкин Я.И.* Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1961. — № 5. — С. 159—162.
5. *Теплов Ю.А.* О перемещении водо-нефтяного контакта в неоднородном пласте // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. — № 5 . — С. 160—164.
6. *Веригин Н.Н., Саркисян В.С., Шибанов А.В.* Об определении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Изв. АН СССР . МЖГ. — 1973. — № 6. — С. 155—163.
7. *Веригин Н.Н., Саркисян В.С.* О фильтрации двух жидкостей с разной плотностью и вязкостью при закачке в галерею с постоянным расходом // ДАН СССР. — 1974. — **218**, № 3. — С. 536—539.
8. *Веригин Н.Н., Саркисян В.С.* О фильтрации двух неоднородных жидкостей при упругом режиме // ДАН СССР. — 1975. — **221**, № 2. — С. 305— 308.
9. *Мустафаев Р.А.* Математическое моделирование нестационарного процесса движения двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде с учетом анизотропии проницаемости пласта // Электрон. моделирование. — 2014. — **36**, № 6. — С. 83—98.
10. *Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б.* Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // Вычислит. методы и программы. Сб. работ ВЦ МГУ. — 1967. — Вып. VI. — С. 206—216.
11. *Мустафаев Р.А.* Монотонная разностная схема для численного решения задачи типа Веригина // Изв. НАН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук. — 2001. — **XXI**, **№ 2. — С. 165—169.**

R.A. Mustafaev

MATHEMATICAL MODELING THE UNSTEADY MOTION
OF TWO IMMISCIBLE LIQUIDS WITH ALLOWANCE FOR
THE SCHEME OF LIMITED ANISOTROPY OF PERMEABILITY
OF POROUS MEDIUM UNDER PUMPING IN GALLERY

Application of limited-anisotropic stratum hydrodynamic model (case $k_x = k$, $k_z = \infty$) for mathematical modeling the unsteady problem with mobile boundaries is examined. The process of oil expelling with immiscible water in the finite horizontal stratum of constant thickness at various liquid viscosities and densities in case of rectilinear parallel motion is considered. Iterative difference scheme with combination of fronts straightening method with finite difference method is composed for numerical solution. Results of numerical experiment are presented.

K e y w o r d s: unsteady moving-boundaries problem, limited-anisotropic stratum model, iterative difference scheme, method of straightening of fronts, method of finite differences.

REFERENCES

1. *Razvitie issledovaniy po teorii filtrachii v SSSR* [Development of research in the theory of filtration in the USSR] (1969), Nauka, Moscow, Russia.
2. Charnyi, I.A. (1963), *Podzemnaja gidrogazodinamika* [Underground gas hydrodynamics] Gostoptekhizdat, Moscow, Russia.
3. Zigangareev, M.A. and Teplov, Yu.A. (1966), " Calculations of shift of water-oil boundary in slope stratum and their comparison with data of modeling", *Trudy VNII neftegaz,* Vol. 47, pp. 142-150.
4. Alikhashkin, Ya.I. (1961), "Numerical integration of equation of automodel motion of interface of two liquids in porous medium", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, *OTN, Mekhanika i mashinostroenie*, no. 5, pp. 159-162.
5. Teplov, Yu.A. (1967), "On change of water-oil boundary in heterogeneous stratum" *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, MZhG,* no. 5, pp. 160-164.
6. Verigin, N.N., Sarkisyan, V.S. and Shibanov, A.V. (1973), "On determining interface of two immiscible liquids in porous medium", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, MZhG,* no. 6, pp. 155-163.
7. Verigin, N.N. and Sarkisyan, V.S. (1974), "On filtration of two liquids with different densities and viscosities under pumping in the gallery with fixed discharge" *DAN SSSR,* Vol. 218, no. 3, pp. 536-539.
8. Verigin, N.N. and Sarkisyan, V.S. (1975), "On filtration of two heterogeneous liquids under pressure conditions", *DAN SSSR*, Vol**.** 221, no. 2, pp. 305-308.
9. Mustafaev, R.A. (2014), "Mathematical modeling the unsteady process of motion of two immiscible liquids in porous medium with allowance for anisotropy of stratum permeability", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 6, pp. 83-98.
10. Budak, B.M., Goldman, N.L. and Uspenskiy, A.B. (1967), "Difference schemes with straightening of fronts for solution of multifront problems of the Stefan type", *Vychislitelnye metody i programmy. Sbornik rabot vychislit. tsentr MGU*, Vol. 6, pp. 206-216.
11. Mustafaev, R.A. (2001), "Monotonous difference scheme for numerical solution of the Verigin type problem", *Izvestiya NAN of Azerbaijan, Ser. fizikotekhnicheskie i matematicheskie nauki,* Vol. 21, no. 2, pp. 165-169.

Поступила 27.01.15

МУСТАФАЕВ Рамиз Ага Джафар оглы, д-р философии по математике, ст. науч. сотр., доцент Ин-та систем управления Национальной академии наук Азербайджана. В 1962 г. окончил Азербайджанский госуниверситет им. С.М.Кирова (г. Баку). Область научных исследований — разработка численных схем и численных алгоритмов для математического и компьютерного моделирования процессов, описываемых нестационарными задачами с подвижными границами.