УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины
Е.И. Петрушенко, канд. техн. наук,
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина,03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 4241063, e-mail: dep_7@ voliacable.com),
В.А. Кучаев, ООО «МК БЕЛИЧАНКА»
(Украина, 03164, Киев, Булаховского, 2,
e-mail: vitalku07@yandex.ru)

Полная векторная интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ

Построена векторная интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литом слитке (НЛС) и кристаллизаторе в системе электромагнитный перемешиватель (ЭМП) —НЛС. В отличие от ранее разработанных предлагаемая модель учитывает влияние на распределение вихревых токов магнитопровода статора ЭМП. В ее состав входит система, состоящая из пяти интегральных уравнений (ИУ) для токов намагничивания на поверхности магнитопровода, два ИУ для вихревых токов в НЛС и два ИУ для вихревых токов в кристаллизаторе.

Побудовано векторну інтегральну модель тривимірного розподілу вихрових струмів в безперервно литому злитку (БЛЗ) та кристалізаторі в системі електромагнітний перемішувач (ЕМП) — БЛЗ. На відміну від раніше розроблених запропонована модель враховує вплив на розподіл вихрових струмів магнітопровода статора ЕМП. До її складу входить п’ять інтегральних рівнянь (ІР) для струмів намагніченості на поверхні магнітопровода, два ІР для вихрових струмів в БЛЗ, два ІР для вихрових струмів в кристалізаторі.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: интегральная модель, трехмерное распределение, вихревые токи, непрерывно литая заготовка, векторная система интегральных уравнений.

В настоящее время наблюдается тенденция к внедрению энергосберегающих технологий, повышению производительности машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) и качества заготовок. В связи с этим возникает необходимость создания нового и улучшения конструкций существующего электротехнического оборудования, одним из видов которого являются электромагнитные перемешиватели (ЭМП) [1—6]. К числу мер, позволяющих ускорить разработку ЭМП, относится широкое применение математического моделирования в процессе их проектирования. Это избавляет разработчиков не только от громоздких расчетов, но и от значительной доли дорогостоящего физического эксперимента при замене его математическим. Однако это возможно при условии, что в основе математических моделей лежит достаточно точное математическое описание физических процессов, протекающих в ЭМП.

Конструктивные особенности ЭМП таковы, что электромагнитные, гидродинамические и тепловые поля в них существенно трехмерные [4—6]. В связи с этим в основу пакета программ для расчетов ЭМП должны быть положены трехмерные системы уравнений Максвелла, Навье—Стокса и Фурье. В общем случае для этих систем необходимо решать краевые задачи в неограниченной неоднородной области, содержащей геометрически сложные ферромагнитные (магнитопровод) и проводящие (корпус, обечайка, гильза, жидкая сталь) тела.

Сложность указанных задач, с одной стороны, и необходимость разработки практически реализуемых на доступных ЭВМ программ, с другой стороны, побуждает искать такие эквивалентные преобразования этих систем, при которых во вновь полученных системах достаточно просто и с приемлемой точностью учитывалась бы специфика распределения полей в ЭМП. Одним из таких преобразований является сведение краевых задач к эквивалентным интегральным уравнениям (ИУ). Достаточно полно этот подход реализован для двумерных задач [7—12].

В предлагаемой полной векторной интегральной модели трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литом слитке (НЛС) и кристаллизаторе при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ учтены статор ЭМП (магнитопровод и обмотка), НЛС и кристаллизатор. Влияние корпуса, обечайки, обшивки статора не учитывается. Переход от уравнений Максвелла к эквивалентной системе интегральных уравнений (СИУ) вызван наличием в ЭМП сильных полей рассеивания, которые с помощью СИУ учитываются соответствующим выбором потенциалов, например комбинацией ньютонова потенциала и потенциала простого слоя.

Применение метода конечных элементов (МКЭ) для моделирования электромагнитного поля в системе НЛС—ЭМП связано с необходимостью выполнения большого объема избыточных вычислений. Действительно, для учета полей рассеивания по МКЭ диаметр расчетной области должен быть в несколько раз больше диаметра системы НЛС—ЭМП. Магнитное поле по МКЭ необходимо рассчитывать во всех узлах сетки, покрывающей расчетную область, а следовательно, и в узлах, не относящихся к объему заготовки. Однако в предлагаемой модели столь полной информации не требуется, так как для расчета поля скоростей в объеме жидкого металла достаточно знать распределение электродинамических усилий (ЭДУ), которые вычисляются по вихревым токам и магнитному полю в этом объеме.

Конструкция ЭМП с явнополюсным статором. В ЭМП МНЛЗ круглого сечения [13, 14, рис. 1] ось Z декартовой системы координат XYZ совмещена с осью системы, а оси X и Y — с осями симметрии обмотки одной из фаз, например первой. Принцип действия системы такой же, как и асинхронного двигателя. В статоре ЭМП, состоящем из магнитопровода и трехфазной обмотки [13, рис. 2], при протекании в обмотке трехфазного тока создается вихревое магнитное поле (ВМП), индуктирующее в кристаллизаторе и заготовке вихревые токи. В результате взаимодействия вихревых токов и магнитного поля возникают ЭДУ, которые вращают жидкий металл в заготовке.

Трехфазная обмотка состоит из трех фазных обмоток, соединенных в виде звезды или треугольника. Каждая фазная обмотка состоит из двух одинаковых частей, расположенных на противоположных полюсах магнитопровода. Число витков в каждой фазной обмотке $2W$. Активные плоскости обмоток пересекаются по оси Z и образуют угол 120° [13, рис. 2].

Будем считать заданными токи в витках обмотки. Предположим, что фазные токи образуют симметричную трехфазную систему. Если принять положительным направление токов в фазных обмотках от начала к концу, то фазные токи можно записать в следующем виде:

$$i_1(t) = I_m \sin\omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_3(t) = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота токов; I_m — амплитуда фазных токов. Комплексные амплитуды фазных токов в алгебраической форме запишем так:

$$\dot{I}_1 = I_m, \ \dot{I}_2 = I_m e^{j\frac{2\pi}{3}} = I_m\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ \dot{I}_3 = I_m e^{-j\frac{2\pi}{3}} = I_m\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Расчетная модель. Реальная конструкция системы НЛС—ЭМП достаточно сложна для выполнения полевых расчетов даже на современных ЦВМ. Поэтому естественен переход к той или иной расчетной модели.

Обмотку реального ЭМП в расчетной модели заменим системой замкнутых соосных витков, каждый из которых лежит в плоскости, перпендикулярной оси обмотки, и симметричен относительно плоскости XOY. Витки обмотки будем группировать в жгуты. Жгут это некоторое число плотно уложенных витков. Будем считать диаметр поперечного сечения жгута настолько малым, что замена операции интегрирования по токам в жгуте операцией интегрирования по оси жгута, по которой протекает полный ток жгута, не приводит к существенной погрешности. Не умаляя общности задачи, а преследуя цель упростить запись ИУ, каждую половину фазной обмотки, заменяем одним жгутом.

Модель электромагнитного поля ЭМП должна быть выполнена так, чтобы при добавлении конструктивных элементов принципы построения модели не изменялись. Этому требованию удовлетворяет предложенная интегральная модель, в основе которой лежит векторное ИУ для плотности токов намагниченности (ТН) на поверхности магнитопровода и вихревых токов в объемах НЛС и кристаллизатора.

Обоснование задачи расчета электромагнитного поля ЭМП в МНЛЗ с помощью векторных ИУ. Для расчета магнитных полей в неоднородных средах часто применяют ИУ относительно связанных зарядов [14], которые являются скалярными как для двумерных, так и для трехмерных полей. Однако, если не прибегать к каким-либо преобразованиям, то воспользоваться концепцией связанных зарядов не всегда возможно. Это относится, в частности, к ЭМП, у которых обмотки и массивные проводники полностью заполняют окно магнитопровода.

Существенно расширяет область применения магнитных зарядов метод сведения вихревых магнитных полей к потенциальным [15—17]. Вместе с тем, применение этого метода связано с решением дополнительной задачи минимизации объемов, занимаемых магнитными массами. В ряде случаев эта задача решается введением объемных магнитных масс в области, занятой токами, простых и двойных магнитных слоев на поверхности проводников и на некоторой поверхности в области, не занятой токами.

К построению универсальных алгоритмов и программ расчета магнитных полей и параметров ЭМП с любой конструкцией магнитопровода и обмоток, с учетом массивных конструктивных элементов (заготовка, кристаллизатор, кожух и др.), приводит использование связанных токов и соответствующих ИУ [18], которые для краткости часто называют токовыми в отличие от упомянутых выше зарядовых. Токовые ИУ в трехмерных и некоторых двумерных полях — векторные. Методы и алгоритмы решения их в литературе описаны применительно к трансформаторам токов [19]. Реализация предлагаемой модели, как и более сложных интегральных моделей электромагнитных процессов в ЭМП, в которых учитывались бы массивные проводники (наружный и внутренний корпус МНЛЗ, обечайка, гильза, заготовка), позволит усовершенствовать алгоритмы и программы решения токовых ИУ. Это имеет большое значение для оценки возможности разработки интегральных моделей связанных электромагнитных, механических, гидромеханических и тепловых процессов в ЭМП.

Токовое ИУ на поверхности магнитопровода ЭМП при наличии вихревых токов в НЛС и кристаллизаторе. Введем следующие обозначения: V^-, $V_о$, $V_с$, $V_к$, V^+ — объемы магнитопровода, обмотки, НЛС, кристаллизатора и окружающего пространства, $V_о = \sum_{k=1}^{3} V_{оk}$; S, $S_с$, $S_к$ — поверхности магнитопровода, слитка, кристаллизатора; $\overline{\sigma}(Q,t)$ — вектор плотности ТН на поверхности S магнитопровода в точке Q обмотки,

$$\overline{\delta}_0(Q,t)=\begin{cases}\overline{\delta}_{01}(Q,t),\ Q\in V_{01},\\ \overline{\delta}_{02}(Q,t),\ Q\in V_{02},\\ \overline{\delta}_{03}(Q,t),\ Q\in V_{03};\end{cases}$$

$\overline{\delta}_с(Q,t)$ — вектор плотности вихревого тока в обьеме $V_с$ слитка; $\overline{\delta}_к(Q,t)$ — вектор плотности вихревого тока в обьеме $V_к$ кристаллизатора; $\mu_о$ — магнитная проницаемость в объемах $V_о, V_с, V_к, V^+$.

Ограничимся рассмотрением ЭМП, у которого в объеме магнитопровода V^- магнитная проницаемость μ^- постоянна. Выведем токовое ИУ на поверхности магнитопровода ЭМП при наличии вихревых токов в НЛС и кристаллизаторе. На границе раздела сред S вектор индукции $\overline{B}$ удовлетворяет соотношению

$$\left[\overline{n}_Q,\frac{\overline{B}^+(Q,t)}{\mu_о}-\frac{\overline{B}^-(Q,t)}{\mu_о\mu^-}\right]=0, \tag{1}$$

где $\overline{n}_Q$ — нормаль к поверхности S в точке Q, положительное направление которой принято из объема V^- в объем V^+; $\overline{B}^+(Q,t)$ и $\overline{B}^-(Q,t)$ — векторы магнитной индукции $\overline{B}$ в точке Q для объемов V^+ и V^-.

При переходе через границу раздела сред вектор магнитной индукции $\overline{B}$ испытывает скачок:

$$\overline{B}^+(Q,t)-\overline{B}^-(Q,t)=\mu_о[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]. \tag{2}$$

Соотношение (2) равносильно следующим двум:

$$\begin{aligned}\overline{B}^+(Q,t)&=\overline{B}^0(Q,t)+\frac{\mu_о[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]}{2},\\ \overline{B}^-(Q,t)&=\overline{B}^0(Q,t)-\frac{\mu_о[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]}{2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\overline{B}^{0}(Q,t)$ — вектор индукции на границе S, обусловленный всеми токами, за исключением элемента тока $\overline{\sigma}(Q,t)\,ds_Q$,

$$\overline{B}^{\mathrm{o}}(Q,t)=\overline{B}_{\sigma}(Q,t)+\overline{B}_{0}(Q,t)+\overline{B}_{\mathrm{c}}(Q,t)+\overline{B}_{\text{к}}(Q,t)\,, \tag{4}$$

где

$$\overline{B}_{\sigma}(Q,t)=\mathrm{rot}\,\overline{A}_{\sigma}=\mathrm{rot}\,\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{S}\frac{\overline{\sigma}(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{S}\frac{[\overline{r}_{QM}\overline{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}^{3}}\,ds_M,$$

$$\overline{B}_{\mathrm{o}}(Q,t)=\mathrm{rot}\,\overline{A}_{\mathrm{o}}=\mathrm{rot}\,\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\mathrm{o}}}\frac{\overline{\delta}_{\mathrm{o}}(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\mathrm{o}}}\frac{[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_{\mathrm{o}}(M,t)]}{r_{QM}^{3}}\,dv_M,$$

$$\overline{B}_{\mathrm{c}}(Q,t)=\mathrm{rot}\,\overline{A}_{\mathrm{c}}=\mathrm{rot}\,\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\mathrm{c}}}\frac{\overline{\delta}_{\mathrm{c}}(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\mathrm{c}}}\frac{[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_{\mathrm{c}}(M,t)]}{r_{QM}^{3}}\,dv_M,$$

$$\overline{B}_{\text{к}}(Q,t)=\mathrm{rot}\,\overline{A}_{\text{к}}=\mathrm{rot}\,\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\text{к}}}\frac{\overline{\delta}_{\text{к}}(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\oint_{V_{\text{к}}}\frac{[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_{\text{к}}(M,t)]}{r_{QM}^{3}}\,dv_M.$$

Подставляя выражения (3) в соотношение (1), получаем

$$\left[\overline{n}_Q,\frac{\overline{B}^{0}(Q,t)}{\mu^{0}}+\frac{[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]}{2}-\frac{\overline{B}^{0}(Q,t)}{\mu_0\mu^{-}}+\frac{[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]}{2\mu^{-}}\right]=$$

$$=\left[\overline{n}_Q,\frac{\mu^{-}-1}{\mu^{-}}\frac{\overline{B}^{0}(Q,t)}{\mu_0}+\frac{\mu^{-}+1}{\mu^{-}}\frac{[\overline{\sigma}(Q,t),\overline{n}_Q]}{2}\right]=0,$$

или

$$\left[\overline{n}_Q\,\frac{2\chi}{\mu_0}\,\overline{B}^{0}(Q,t)\right]+[\overline{n}_Q[\overline{\sigma}(Q,t)\,\overline{n}_Q]]=0, \tag{5}$$

где $\chi=\dfrac{\mu^{-}-1}{\mu^{-}+1}$. Используя тождество векторной алгебры, преобразуем второе слагаемое равенства (5) и запишем

$$[\overline{n}_Q[\overline{\sigma}(Q,t)\,\overline{n}_Q]]=\overline{\sigma}(Q,t)-\overline{n}_Q(\overline{n}_Q\overline{\sigma}(Q,t)).$$

Но вектор $\overline{\sigma}(Q,t)$ лежит в касательной к поверхности S в точке Q плоскости, т.е. $\overline{\sigma}(Q,t)\perp\overline{n}_Q$ и $(\overline{n}_Q\overline{\sigma}(Q,t))=0$. Следовательно,

$$\overline{\sigma}(Q,t)=[\,\overline{n}_Q[\overline{\sigma}(Q,t)\,\overline{n}_Q]]. \tag{6}$$

С учетом (6) и (5) получаем

$$\overline{\sigma}(Q,t)+\left[\overline{n}_Q,\frac{2\chi}{\mu_0}\overline{B}^0(Q,t)\right]=0. \qquad (7)$$

Подставляя (4) в (7), получаем следующее токовое ИУ для вектора плотности ТН на поверхности S магнитопровода ЭМП при наличии вихревых токов в НЛС и кристаллизаторе:

$$\overline{\sigma}(Q,t)+\frac{\chi}{2\pi}\oint_S\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\sigma}(M,t)]]}{r_{QM}^3}ds_M=-\frac{\chi}{2\pi}\oint_{V_\text{о}}\frac{[\overline{n}_Q[r_{QM}\overline{\delta}_\text{о}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M-$$

$$-\frac{\chi}{2\pi}\oint_{V_\text{с}}\frac{[\overline{n}_Q[r_{QM}\overline{\delta}_\text{с}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M-\frac{\chi}{2\pi}\oint_{V_\text{к}}\frac{[\overline{n}_Q[r_{QM}\overline{\delta}_\text{к}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M. \qquad (8)$$

Запишем векторное ИУ (ВИУ) (8) для мгновенного значения вектора плотности ТН $\overline{\sigma}(Q,t)$ на поверхности S магнитопровода в операторной форме:

$$\frac{2\pi}{\chi}\overline{\sigma}(Q,t)+D_{ss}\overline{\sigma}=-D_{s\text{о}}\overline{\delta}_0-D_{s\text{с}}\overline{\delta}_\text{с}-D_{s\text{к}}\overline{\delta}_\text{к},\quad Q\in S. \qquad (9)$$

Здесь

$$D_{ss}\overline{\sigma}=\oint_S\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\sigma}(M,t)]]}{r_{QM}^3}ds_M,\quad Q\in S,$$

$$D_{s\text{о}}\overline{\delta}_\text{о}=\oint_{V_\text{о}}\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_\text{о}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M,\quad Q\in S,$$

$$D_{s\text{с}}\overline{\delta}_\text{с}=\oint_{V_\text{с}}\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_\text{с}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M,\quad Q\in S, \qquad (10)$$

$$D_{s\text{к}}\overline{\delta}_\text{к}=\frac{\chi}{2\pi}\oint_{V_\text{к}}\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_\text{к}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M,\quad Q\in S.$$

При допущении о том, что каждая половина обмотки является жгутом с достаточно малым диаметром поперечного сечения, (10) принимает вид

$$D_{s\text{о}}\overline{\delta}_\text{о}=\oint_{V_\text{о}}\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_\text{о}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M=\sum_{k=1}^{3}\oint_{V_\text{о}}\frac{[\overline{n}_Q[\overline{r}_{QM}\overline{\delta}_\text{о}(M,t)]]}{r_{QM}^3}dv_M=$$

$$=W\sum_{k=1}^{3}\oint\limits_{L'_{0k}}\frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\,\bar{i}_k(M,t)]]}{r_{QM}^3}dl_M+W\sum_{k=1}^{3}\oint\limits_{L''_{0k}}\frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\,\bar{i}_k(M,t)]]}{r_{QM}^3}dl_M=$$

$$=W\sum_{k=1}^{3}D'_{Sk}\bar{i}_k+W\sum_{k=1}^{3}D''_{Sk}\bar{i}_k, \tag{11}$$

где

$$D'_{Sk}\bar{i}_k=\oint\limits_{L'_{0k}}\frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\,\bar{i}_k(M,t)]]}{r_{QM}^3}dl_M,\quad Q\in S;$$

$$D''_{Sk}\bar{i}_k=\oint\limits_{L''_{0k}}\frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\,\bar{i}_k(M,t)]]}{r_{QM}^3}dl_M,\quad Q\in S;$$

L'_{0k} и L''_{0k} — осевые линии первого и второго жгутов обмотки k-й фазы; $\bar{i}_k(M,t)$ — мгновенный вектор тока в точке M осевой линии $L_{0k}=L'_{0k}+L''_{0k}$ обмотки k-й фазы, $\bar{i}_k(M,t)=\bar{l}_k(M)\,i_k(t)$. Здесь $\bar{l}_k(M)$ — орт касательной к линии L_{0k} в точке M, характеризующий протекание тока в пространстве и его направление совпадает с положительным направлением тока в обмотке k-й фазы; $i_k(t)$ — ток в обмотке k-й фазы. Подставив (11) в (9), получим следующее ВИУ для ЭМП:

$$\frac{2\pi}{\chi}\bar{\sigma}(Q,t)+D_{ss}\bar{\sigma}=-D_{s\text{о}}\bar{\delta}_\text{о}-D_{s\text{с}}\bar{\delta}_\text{с}-D_{s\text{к}}\bar{\delta}_\text{к},\quad Q\in S, \tag{12}$$

где $D_{s\text{о}}\bar{\delta}_\text{о}=W\sum\limits_{k=1}^{3}D'_{Sk}\bar{i}_k+W\sum\limits_{k=1}^{3}D''_{Sk}\bar{i}_k$.

Векторная СИУ, описывающая трехмерное распределение вихревых токов в системе НЛЗ — кристаллизатор в ЭМП с учетом влияния магнитопровода статора. Заготовка в форме тора прямоугольного сечения и близко расположенный к ней изолированный кристаллизатор в форме тора прямоугольного сечения находятся в магнитном поле индуктора, в обмотке которого протекает изменяющийся во времени ток. В основе модели трехмерного распределения вихревых токов в системе НЛЗ — кристаллизатор лежит векторная СИУ, полученная в результате обобщения векторной СИУ для уединенной заготовки [13, 21] на систему двух близко расположенных изолированных проводников, какими являются заготовка и кристаллизатор МНЛЗ. Исходная векторная СИУ преобразована к скалярной СИУ в цилиндрической системе координат.

Пусть НЛЗ находится в кристаллизаторе [13, рис. 1, 21]. Распределение вихревых токов в заготовке зависит от распределения вихревых токов в кристаллизаторе, и наоборот. Считая, что заготовка и кристаллизатор изолированы друг от друга, для описания распределения вихревых токов в объеме каждого проводника следует воспользоваться системой уравнений Максвелла [13]. Используем обозначения, принятые в [13]. В заготовке, которая представляет собой массивное проводящее тело (тор прямоугольного сечения) объема $V_{\text{с}}$, индуктируются вихревые токи плотностью $\overline{\delta}_{\text{с}}$. В кристаллизаторе, который представляет собой массивное проводящее тело (тор прямоугольного сечения) объема $V_{\text{к}}$, индуктируются вихревые токи плотностью $\overline{\delta}_{\text{к}}$.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в объеме заготовки $V_{\text{с}}$ сводятся к следующим уравнениям

$$\Delta \overline{A}_{\text{с}} = -\mu_{\text{о}} \overline{\delta}_{\text{с}}, \tag{13}$$

$$\Delta \varphi_{\text{с}} = 0. \tag{14}$$

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в объеме кристаллизатора $V_{\text{к}}$ сводятся к уравнениям

$$\Delta \overline{A}_{\text{к}} = -\mu_{\text{о}} \overline{\delta}_{\text{к}}, \tag{15}$$

$$\Delta \varphi_{\text{к}} = 0. \tag{16}$$

В пространстве, окружающем объемы $V_{\text{с}}$ и $V_{\text{к}}$, уравнения Максвелла сводятся к уравнениям

$$\Delta \overline{A}_{\text{о}} = -\mu_{\text{о}} \overline{\delta}_{\text{о}}, \tag{17}$$

$$\Delta \overline{A}_{\text{о}} = -\mu_{\text{о}} \overline{\sigma}. \tag{18}$$

Для однородной магнитной среды решение уравнений (13), (15), (17) и (18) имеет вид

$$\overline{A}(Q,t) = \frac{\mu_{\text{о}}}{4\pi} \int_{V_{\text{о}}} \frac{\overline{\delta}_{\text{о}}(M,t)}{r_{QM}} d\upsilon_M + \frac{\mu_{\text{о}}}{4\pi} \int_{V_{\text{с}}} \frac{\overline{\delta}_{\text{с}}(M,t)]}{r_{QM}} d\upsilon_M +$$

$$+ \frac{\mu_{\text{о}}}{4\pi} \int_{V_{\text{к}}} \frac{\overline{\delta}_{\text{к}}(M,t)}{r_{QM}} d\upsilon_M + \frac{\mu_{\text{о}}}{4\pi} \oint_{s} \frac{\overline{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}} ds_M. \tag{19}$$

Однако в (19) входят вихревые токи плотностью $\overline{\delta}_{\text{с}}$ в объеме заготовки $V_{\text{с}}$ и плотностью $\overline{\delta}_{\text{к}}$ в объеме кристаллизатора $V_{\text{к}}$, которые неизвестны. Для их определения необходимо воспользоваться соотношением (4) из [21], записанном для объемов $V_{\text{с}}$ и $V_{\text{к}}$:

$$\overline{E}_{\text{с}}(Q,t) = -\frac{\partial \overline{A}_{\text{с}}(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi_{\text{с}}(Q,t),\ Q \in V_{\text{с}}, \tag{20}$$

$$\overline{E}_{\text{к}}(Q,t) = -\frac{\partial \overline{A}_{\text{к}}(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi_{\text{к}}(Q,t), Q \in V_{\text{к}}. \tag{21}$$

Подставив выражение (19) в (20) и (21), получим векторную СИУ

$$\overline{E}_{\text{с}}(Q,t) + \frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{с}}} \gamma_{\text{с}}(M)\frac{\partial \overline{E}_{\text{с}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M + \frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{к}}} \gamma_{\text{к}}(M)\frac{\partial \overline{E}_{\text{к}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M +$$

$$+\frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\oint\limits_{S}\frac{\partial \overline{\sigma}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,ds_M = -\frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{o}}}\frac{\partial \overline{\delta}_{\text{o}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_{\text{с}},\quad Q \in V_{\text{с}}, \tag{22}$$

$$\overline{E}_{\text{к}}(Q,t) + \frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{к}}} \gamma_{\text{к}}(M)\frac{\partial \overline{E}_{\text{к}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M + \frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{с}}} \gamma_{\text{с}}(M)\frac{\partial \overline{E}_{\text{с}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M +$$

$$+\frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\oint\limits_{S}\frac{\partial \overline{\sigma}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,ds_M = -\frac{\mu_{\text{o}}}{4\pi}\int\limits_{V_{\text{o}}}\frac{\partial \overline{\delta}_{\text{o}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_{\text{к}}, Q \in V_{\text{к}}. \tag{23}$$

Для определения скалярных потенциалов $\varphi_{\text{с}}(Q,t)$, $Q \in V_{\text{с}}$ и $\varphi_{\text{к}}(Q,t)$, $Q \in V_{\text{к}}$ необходимо решить задачи Неймана для уравнений (14) и (16) при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial \varphi_{\text{с}}(Q,t)}{\partial n}\right|_{S_{\text{с}}} = -\left.\frac{\partial A_{\text{с}n}(Q,t)}{\partial n}\right|_{S_{\text{с}}}, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_{\text{к}}(Q,t)}{\partial n}\right|_{S_{\text{к}}} = -\left.\frac{\partial A_{\text{к}n}(Q,t)}{\partial n}\right|_{S_{\text{к}}}. \tag{25}$$

В (24) $A_{\text{с}n}$— проекция вектора $\overline{A}$ (19) на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности заготовки $S_{\text{с}}$ в точке Q. Положительное направление нормали $\overline{n}_Q$ принято исходя из объема заготовки в окружающее пространство. В (25) $A_{\text{к}n}$ — проекция вектора $\overline{A}$ (19) на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности кристаллизатора $S_{\text{к}}$ в точке Q. Положительное направление нормали $\overline{n}_Q$ принимаем исходя из объема кристаллизатора в окружающее пространство.

Решение этих задач будем искать с помощью потенциала простого слоя плотностью $\tau_{\text{с}}$ на поверхности $S_{\text{с}}$,

$$\varphi_{\text{с}}(Q,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_{\text{с}}}\frac{\tau_{\text{с}}(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M, Q \in V_{\text{с}}, \tag{26}$$

и плотностью $\tau_к$ на поверхности $S_к$,

$$\varphi_к(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_к}\frac{\tau_к(M,t)}{r_{QM}}ds_M,\quad Q\in V_к. \tag{27}$$

При этом для нахождения плотности $\tau_с$ на поверхности $S_с$ необходимо решить ИУ Фредгольма второго рода

$$\tau_с(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_с}\tau_с(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{сn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_с. \tag{28}$$

Для нахождения плотности $\tau_к$ на поверхности $S_к$ необходимо решить ИУ Фредгольма второго рода

$$\tau_к(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_к}\tau_к(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{кn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_к. \tag{29}$$

Подставив потенциал $\varphi_с$ (26) в уравнение (22), получим

$$\bar{E}_с(Q,t)+\frac{\mu_о}{4\pi}\int_{V_с}\gamma_с(M)\frac{\partial\bar{E}_с(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\frac{\mu_о}{4\pi}\int_{V_к}\gamma_к(M)\frac{\partial\bar{E}_к(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{\mu_о}{4\pi}\oint_S\frac{\partial\bar{\sigma}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}ds_M+\frac{1}{2\pi}\int_{S_с}\tau_с(M,t)\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}ds_M=$$

$$=-\frac{\mu_о}{4\pi}\int_{V_о}\frac{\partial\bar{\delta}_о(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_с. \tag{30}$$

Подставив в (30) выражение

$$\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}=\frac{x_M-x_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_X+\frac{y_M-y_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Y+\frac{z_M-z_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Z=\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} \tag{31}$$

и заменив вектор $\bar{E}_с(Q,t)$ вектором $\bar{\delta}_с(Q,t)$, получим следующее ИУ:

$$\frac{\bar{\delta}_с(Q,t)}{\lambda\gamma_с(Q)}+\int_{V_с}\frac{\partial\bar{\delta}_с(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_к}\frac{\partial\bar{\delta}_к(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\oint_S\frac{\partial\bar{\sigma}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}ds_M+\frac{1}{\mu_о}\int_{S_с}\tau_с(M,t)\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}ds_M=$$

$$=-\int_{V_{\text{о}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{о}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M, \quad Q \in V_{\text{с}}. \tag{32}$$

Теперь, подставив выражение (19) в ИУ (28), получим

$$\tau_{\text{с}}(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\text{с}}} \tau_{\text{с}}(M,t) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + 2\lambda \int_{V_{\text{с}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{с}nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M +$$

$$+ 2\lambda \oint_S \frac{\partial \sigma_{nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} ds_M + 2\lambda \int_{V_{\text{к}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{к}nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M =$$

$$= -2\lambda \int_{V_{\text{о}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{о}nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M, \quad Q \in S_{\text{с}}. \tag{33}$$

Подставим в уравнение (23) потенциал $\varphi_{\text{к}}$ (27). Получим

$$\frac{\bar{\delta}_{\text{к}}(Q,t)}{\lambda \gamma_{\text{к}}(Q)} + \int_{V_{\text{к}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{к}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M + \int_{V_{\text{с}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{с}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M +$$

$$+ \oint_S \frac{\partial \bar{\sigma}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{2}{\lambda} \int_{S_{\text{к}}} \tau_{\text{к}}(M,t) \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_{QM}} ds_M =$$

$$= -\int_{V_{\text{о}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{о}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M, \quad Q \in V_{\text{с}}. \tag{34}$$

Подставим выражение (31) в (34) и заменим в нем вектор $\bar{E}_{\text{к}}(Q,t)$ вектором $\bar{\delta}_{\text{к}}(Q,t)$. Тогда получим следующее ИУ:

$$\frac{\bar{\delta}_{\text{к}}(Q,t)}{\lambda \gamma_{\text{к}}(Q)} + \int_{V_{\text{к}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{к}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M + \int_{V_{\text{с}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{с}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M +$$

$$+ \oint_S \frac{\partial \bar{\sigma}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{\mu_{\text{о}}} \int_{S_{\text{к}}} \tau_{\text{к}}(M,t) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} ds_M =$$

$$= -\int_{V_{\text{о}}} \frac{\partial \bar{\delta}_{\text{о}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M, \quad Q \in V_{\text{к}}. \tag{35}$$

Теперь, подставив выражение (19) в ИУ (29), получим

$$\tau_{\text{к}}(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\text{к}}} \tau_{\text{к}}(M,t) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + 2\lambda \int_{V_{\text{с}}} \frac{\partial \delta_{\text{с}n}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M +$$

$$+2\lambda \oint_S \frac{\partial \sigma_{nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} ds_M + 2\lambda \int_{V_\text{к}} \frac{\partial \delta_{\text{к}nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M =$$

$$= -2\lambda \int_{V_\text{о}} \frac{\partial \delta_{\text{о}nQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} d\upsilon_M, \quad Q \in S_\text{к}. \tag{36}$$

Векторная СИУ (12), (32), (33), (35), (36) при заданных начальных условиях $\overline{\delta}_\text{с}(Q,O)$, $Q \in V_\text{с}$, $\overline{\delta}_\text{к}(Q,O)$, $Q \in V_\text{к}$, $\overline{\delta}_\text{о}(Q,O)$, $Q \in V_\text{о}$, позволяет решать задачу расчета вихревых токов в системе НЛЗ — кристаллизатор в нестационарных режимах с учетом влияния магнитопровода статора.

Выводы

Магнитопровод влияет на распределение вихревых токов в объеме НЛС и кристаллизатора через магнитное поле ТН на его поверхности. Вектор плотности этих токов удовлетворяет ИУ, в которое входят токи в обмотке и вихревые токи в НЛС и кристаллизаторе. Эти токи также удовлетворяют ИУ, в которые входят ТН на поверхности магнитопровода. В результате получена векторная СИУ, позволяющая рассчитывать вихревые токи в системе НЛЗ — кристаллизатор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lehman A., Sjoden O., Kuchaev A.* Electromagnetic equipment for non contacting treatment of liquid metal in metallurgical processes // Magnetohydrodynamics. — 2006. — Vol. 42, No. 2—3. — P. 3—10.
2. *Miki Y.* Applications of MHD to Continuous Casting of Steel // The 5th Int. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials, 2006. Sendai, Japan, June 27-July 1, 2006. — P. 26—30.
3. *Kuchaev A., Kasyan G., Jakobshe R.* Using of Electromagnetic Stirring in Continuous Casting of Round Billets//Proceedings 6th International Conference on Electromagnetic Processing of Materials. October 19—23, 2009. — Dresden, Germany. — P. 243—246.
4. *Tallbäck G.R., Lavers J.D., Beitelman L.S.* Simulation and Measurement of EMS Induced Fluid Flow in Billet/Bloom Casting Systems // Intern. Congress Electromagn. Process of Materials. Lyon, October 14—17, 2003. Proc. — Lyon, 2003. — P. 113—117.
5. *Natarajan T.T., El-Kaddah N.* Finite Element Analysis of Electromagnetically Driven Flow in Sub-mold Stirring of Steel Billets and Slabs // ISIJ Int. — 1998. — Vol. 38, No. 7. — P. 707—714.
6. *Lavers J.D., Tallback G.R., Lavers E.D. et al* . Flow Control in Continuous Casting Mold with Dual Coil EMS: Computational Simulation Study // The 5th Int. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. 2006. Sendai, Japan, June 27-July 1, 2006. — P. 33—38.
7. *Найдек В.Л., Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф. и др.* Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 1. — С. 30—52.

8. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор—индукционный перемешиватель // Там же. — 2005. — **27**, № 1. — С. 73—96.
9. *Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф., Кондратенко И.П. и др.* Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — **27**, № 4. — С. 57—74.
10. *Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Касьян Г.И.* Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с явнополюсным электромагнитным перемешивателем // Там же. — 2010. — **32**, № 1. — С. 40—55.
11. *Dubodelov V., Kondratenko I., Kuchaev A. et al.* Modelling of 2D distribution of electromagnetic forces in continuous caster mold with double-wound induction stirrer // Joint 15th Riga and 6th PAMIR Int. Conference on fundamental and applied MHD, Riga, Latvia, June 27-July 1. — 2005. — Vol. 2. — P. 69—72.
12. *Dubodelov V., Yevdokimov V., Zhiltsov A. et al.* Modelling of Electromagnetic Forces Distribution in Caster Mold with Double-Wound Induction Stirrer at Presence of Angle between Axes of Winding Sections // The 5th Int. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials, 2006, Sendai, Japan, June 27-July 1. — 2006. — Vol. 2. — P. 845—849.
13. *Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А.* Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя //Электрон. моделирование. — 2010. — **32**, № 4. — С. 93—112.
14. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ.I //Электрон. моделирование. — 2013. — **35**. № 6.— С. 49—62 .
15. *Тозони О.В.* Метод вторичных источников в электротехнике. — М. : Энергия, 1975. — 296 с.
16. *Демирчан К.С., Чечурин В.Л.* Метод расчета вихревых магнитных полей с помощью скалярного магнитного потенциала // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1970, № 4. — С. 106—116.
17. *Демирчан К.С., Чечурин В.Л.* Расчет вихревых магнитных полей на основе использования скалярного магнитного потенциала // Электричество. — 1982, № 1. — С. 7—14.
18. *Петрушенко Е.И.* К расчету трехмерных магнитных полей в кусочно-однородных средах с помощью векторных интегральных уравнений // Электрон. моделирование. — 1983, № 5. — С. 27— 32.
19. *Моделирование* на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения / Е.И. Петрушенко, А.И. Пашко, Н.Л. Трофимук, Г.А. Филиппова. — Киев, 1986. — 46 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т проблем моделирования в энергетике; 34).
20. *Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. I // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 1. — С. 48—51.
21. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. II // Там же. — 2014. — **36**, № 1. — С. 81—95.
22. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трёхмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке круглого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I // Там же. — 2014. — **36**, № 5. — С. 67—80.

V.F. Evdokimov, E.I. Petrushenko, V.A. Kuchaev

COMPLETE VECTOR INTEGRAL MODEL OF THREE-DIMENSIONAL DISTRIBUTION OF EDDY CURRENTS IN CONTINUOUS CASTING UNDER ELECTROMAGNETIC STIRRING IN VERTICAL MCC

The vector integral model of three-dimensional distribution of eddy currents is constructed in CCI in the EMS-CCI system. Unlike the before developed models, the offered model allows for the influence on distribution of eddy currents of EMS stator magnetic core. The model includes the system of five integral equations (IE) for magnetization currents on-the-spot of magnetic core, two IE for eddy currents in CCI and two IE for eddy currents in the mould.

K e y w o r d s: integral model, three-dimensional distribution, eddy currents, continuous casting, vector system of integral equations.

REFERENCES

1. Lehman, A., Sjoden, O. and Kuchaev, A. (2006), Electromagnetic equipment for non contacting treatment of liquid metal in metallurgical processes, *Magnetohydrodynamics*, Vol. 42, no. 2-3, pp. 3-10.
2. Miki, Y. (2006), “Applications of MHD to continuous casting of steel”, *The 5th Int. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials,* Sendai, Japan, June 27-July 1, 2006, pp. 26-30.
3. Kuchaev, A., Kasyan, G. and Jakobshe, R. (2009), “Using of electromagnetic stirring in continuous casting of round billets” , *Proceedings of the 6th International conference on electromagnetic processing of materials,* Dresden, Germany, October 19-23, 2009, pp. 243-246.
4. Tallbäck, G.R., Lavers, J.D. and Beitelman, L.S. (2003), “Simulation and measurement of EMS induced fluid flow in billet/bloom casting systems” , *International Congress of Electromagnetic Processes of Materials*, Lyon, France, October 14-17, 2003. — pp. 113-117.
5. Natarajan, T.T. and El-Kaddah, N. (1998), “Finite element analysis of electromagnetically driven flow in sub-mold stirring of steel billets and slabs”, *ISIJ Int.*, Vol. 38, no. 7, pp. 707-714.
6. Lavers, J.D., Tallback, G.R., Lavers, E.D. et al. (2006), “Flow control in continuous casting mold with dual coil EMS: Computational simulation study”, *The 5th International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials,* Sendai, Japan, June 27-July 1, 2006, pp. 33-38.
7. Naidek, V.L., Dubodelov, V.I., Evdokimov, V.F. et al. (2004), “Two-dimensional integro-differential model od distribution of eddy currents and electrodynamic efforts in the system crystallizer — induction stirrer of continuous ingot casting machine”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 26**,** no. 1, pp. 30-52.
8. Evdokimov, V.F., and Petrushenko, E.I. (2005), “Integral equations for symmetric components of sinusoidal eddy currents in the cross-section of the system crystallizer – induction stirrer”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 26, no. 1, pp. 73-96.
9. Dubodelov, V.I., Evdokimov, V.F., Kondratenko, I.P. et al. (2005), “Unit algorithm of realization of two-dimensional integral model of distribution of sinusoidal eddy currents and electrodynamical efforts in crystallizer with induction stirrer”, *Elektronnoe modelirovanie* Vol. 27, no.4, pp. 57-74.
10. Evdokimov, V.F., Kuchaev, A.A., Petrushenko, E.I. and Kasyan, G.I. (2010), “Two-dimensional integral model of distribution of sinusoidal eddy currents and electrodynamic efforts in crystallizer with explicite pole electromagnetic stirrer”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 32, no. 1, pp. 40-55.
11. Dubodelov, V., Kondratenko, I., Kuchaev, A. et al. (2005), “Modelling of 2D distribution of electromagnetic forces in continuous caster mold with double-wound induction stirrer”, *Joint 15th Riga and 6th PAMIR International Conference on Fundamental and Applied MHD*, Riga, Latvia, June 27-July 1, 2005,Vol. 2, pp. 69-72.

12. Dubodelov, V., Yevdokimov, V., Zhiltsov, A. et al. (2006), “Modeling of Electromagnetic Forces Distribution in Caster Mold with Double-Wound Induction Stirrer at Presence of Angle between Axes of Winding Sections”, *The 5th International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials,* Sendai,Japan, June 27-July 1, 2006, Vol. 2, pp. 845-849.
13. Evdokimov, V.F., Kuchaev, A.A., Petrushenko, E.I.*,* and Kuchaev, V.A. (2010), “Three-dimentional integral model of magnetic field of electromagnetic stirrer”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 32**,** no. 4, pp. 93-112.
14. Evdokimov, V.F. and Petrushenko, E.I. (2013), “Integral model of three-dimensional distribution of eddy currents in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. I”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 35, no. 6, pp. 49-62.
15. Tozoni, O.V. (1975), *Metod vtorichnykh istochnikov v elektrotekhnike* [Method of secondary sources in electrical engineering], Energiya, Moscow, Russia.
16. Demirchan, K.S. and Chechurin, V.L. (1970), “Method for calculation of eddy magnetic fields with the help of scalar magnetic potential”, *Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport,* no. 4, pp. 106-116.
17. Demirchan, K.S. and Chechurin, V.L. (1982), “Calculation of eddy magnetic fields on the basis of using scalar magnetic potential”, *Elektrichestvo*, no. 1, pp. 7-14.
18. Petrushenko, E.I. (1983), “On calculation of three-dimensional magnetic fields in piece-wise media with the help of the integral equation”, *Elektronnoe modelirovanie,* no. 5, pp. 27- 32.
19. Petrushenko, E.I.*,* Pashko, A.I., Trofimuk, N.L. and Filippova, G.A. (1986), “Computer modeling of three-dimensional magnetic field of a linear one-element current transformer on the basis of vector integral equation”, Preprint, Institut problem modelirovaniya v energetike Kiev, Ukraine.
20. Evdokimov, V.F., Kuchaev, A.A., Petrushenko, E.I. and Kuchaev, V.A. (2012), “Model of three-dimensional magnetic fielf of the stator of cylindrical electromagnetic stirrer with allowance for magnetization current distribution on the core surface”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 34, no. 1, pp. 48-51.
21. Evdokimov, V.F. and Petrushenko, E.I. (2014), “Integral model of three-dimensional distribution of eddy currents in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. I”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 36, no. 1, pp. 81-95.
22. Evdokimov, V.F. and Petrushenko, E.I. (2014), “Integral model of three-dimensional distribution of eddy currents in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. II”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 36, no. 5, pp. 67-80.

Поступила 06.10.14

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант отдела моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.