УДК 681.04

Ю.Д. Полисский, канд. техн. наук
НИИ автоматизации черной металлургии
(Украина, 49000, Днепропетровск,
тел. (056) 7443365, e-mail: polissky@mail.ru)

Алгоритм выполнения сложных операций в системе остаточных классов с помощью представления чисел в обратных кодах

Рассмотрен метод увеличения быстродействия операции принадлежности числа данной половине диапазона в системе остаточных классов. Метод основан на одновременном представлении чисел в прямом и обратном кодах с выбором активного представления на каждой итерации.

Розглянуто метод збільшення швидкодії операції належності числа даній половині діапазону в системі залишкових класів. Метод базується на одночасному представленні чисел в прямому і зворотному кодах з вибором активного представлення на кожній ітерації.

Ключевые слова: *остаточные классы, сложные операции, модули, диапазон.*

Одним из перспективных направлений эффективного выполнения арифметических операций вычислительными средствами является применение параллельной обработки данных на основе систем с параллельной структурой, в частности системы счисления в остаточных классах (СОК) [1]. В СОК произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, ..., m_n$:

$$N = [N(\mathrm{mod}\, m_1), N(\mathrm{mod}\, m_2), ..., N(\mathrm{mod}\, m_n)] \text{ или } N = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \quad (1)$$

где $\alpha_i = N(\mathrm{mod}\, m_i)$. При этом, если числа m_i взаимно простые, то представление числа N в виде (1) является единственным, а объем диапазона $[0, M)$ представимых чисел в этом случае составляет $M = m_1\, m_2 \,...\, m_n$.

При бесспорных достоинствах СОК использование ее для реализации сложных немодульных операций связано с определенными трудностями. Такой операцией, в частности, является определение принадлежности числа данной половине диапазона. Рассмотрим предлагаемый алгоритм увеличения быстродействия этой операции.

Пусть $m_n = 2$. Будем отличать числа первой R_1 и второй R_2 половины диапазона:

$$N \in \begin{cases} R_1, \; 0 \le N < \dfrac{M}{2}, \\ R_2, \; \dfrac{M}{2} \le N < M. \end{cases}$$

Пусть системой оснований полиадического кода является система $m_1, m_2, ..., m_n$. Тогда число N в полиадическом коде имеет вид

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + ... + \pi_i m_1 m_2 \; ... \; m_{i-1} + ...$$
$$... + \pi_{n-1} m_1 m_2 ... \; m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 ... \; m_{n-1}, \quad (2)$$

где $0 < \pi_i \le m_i - 1$.

Утверждение: $\pi_n = 0 \to N \in R_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\pi_n = 0$ и

$$\pi_{1\max} = m_1 - 1, \; \pi_{2\max} = m_2 - 1, \; \pi_{3\max} = m_3 - 1, ..., \pi_{(n-1)\max} = m_{n-1} - 1. \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получаем

$$N = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) \; m_1 + ... + (m_i - 1) \, m_1 m_2 ... \; m_{i-1} + ...$$
$$... + (m_{n-1} - 1) m_1 \; m_2 ... m_{n-2} = m_1 - 1 + m_2 m_1 - m_1 + m_1 m_2 m_3 - m_1 m_2 + ...$$
$$... + m_1 \; m_2 ... m_{n-2} m_{n-1} - m_1 \; m_2 ... m_{n-2} =$$
$$= m_1 m_2 \; ... \; m_{n-2} m_{n-1} - 1 < \frac{M}{2} = m_1 \; m_2 ... m_{n-2} \; m_{n-1}.$$

Таким образом, процесс определения принадлежности числа данной половине диапазона сводится к определению π_n.

Известный подход состоит в следующем:

$$\alpha_1 = N \, (\mathrm{mod} \, m_1) = (\pi_1 + \pi_2 m_1 + ... + \pi_i \, m_1 m_2 \; ... \; m_{i-1} + ...$$
$$... + \pi_{n-1} m_1 m_2 ... \; m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 ... \; m_{n-1}) (\mathrm{mod} \, m_1) = \pi_1.$$

Из (1) следует

$$N_1 = N - \alpha_1 = (0, \alpha_2 - \alpha_1, ..., \alpha_n - \alpha_1) = \pi_2 m_1 + ... + \pi_i \, m_1 m_2 \; ... \; m_{i-1} + ...$$
$$... + \pi_{n-1} m_1 m_2 ... \; m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 ... \; m_{n-1},$$

т.е. число N_1 кратно m_1. При этом значения остатков по некоторым другим n_1 модулям также могут оказаться равными нулю. Разделив N_1 на произведение модулей, для которых значения остатков равны нулю, уменьшаем на $n_1 + 1$ число разрядов. После выполнения аналогичных действий получаем значение π_n.

В табл. 1 представлен процесс получения π_n числа $N = 2012 = (0, 2, 2, 3, 10)$ для системы модулей $11, 7, 5, 3, 2$. Объем диапазона чисел $M = m_1 m_2 \ldots m_n = 11*7*5*3*2 = 2310$. Поскольку $N = 2012 > M/2 = 1155$, результат $\pi_n = 1$— верный. Этот результат достигается за пять тактов.

Пусть $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Обратным кодом $\overline{\alpha}_i$ остатка α_i называется число $\overline{\alpha}_i = (m_i - 1) - \alpha_i$. Пусть $N_1 = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. Составим сумму $N_0 = N + N_1$:

$$N_0 = ((\alpha_1 + \overline{\alpha}_1), (\alpha_2 + \overline{\alpha}_2), \ldots, (\alpha_i + \overline{\alpha}_i) + \ldots + (\alpha_n + \overline{\alpha}_n)) =$$

$$= ((m_1 - 1), (m_2 - 1), \ldots, (m_i - 1), \ldots, (m_n - 1)) = M - 1.$$

Следовательно, $N_1 = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ является представлением числа $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в обратном коде, т.е. $\overline{N} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.

Обратным кодом π_i позиционной характеристики π_i называется число $\overline{\pi}_i = (m_i - 1) - \pi_i$. Пусть

$$N_1 = \overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2 m_1 + \ldots + \overline{\pi}_i\, m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \ldots$$

$$\ldots + \overline{\pi}_{n-1}\, m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \overline{\pi}_n\, m_1 m_2 \ldots m_{n-1}\ .$$

Составим сумму $N_0 = N + N_1$:

$$N_0 = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \ldots + \pi_i\, m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \ldots + \pi_{n-1}\, m_1 m_2 \ldots m_{n-2} +$$

Таблица 1. **Получение π_n известным методом**

Модуль				
2	**3**	**5**	**7**	**11**
Остаток				
0	2	2	3	10
–10				
0	1	2	0	0
: (7*11)				
0	2	1	=	=
–1				
1	1	0	=	=
: 5				
1	2	0	=	=
–2				
1	0	=	=	=

$$+\pi_n m_1 m_2 \dots m_{n-1} + ((m_1-1)-\pi_1) + ((m_2-1)-\pi_2)\, m_1 + \dots$$
$$\dots + ((m_n-1)-\pi_n)\, m_1 m_2 \dots m_{n-1} = m_1 m_2 \dots m_n - 1 = M-1\,.$$

Таким образом, число

$$N_1 = \overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2 m_1 + \dots + \overline{\pi}_i\, m_1 m_2 \dots m_{i-1} + \dots$$
$$\dots + \overline{\pi}_{n-1}\, m_1 m_2 \dots m_{n-2} + \overline{\pi}_n\, m_1 m_2 \dots m_{n-1}$$

является представлением числа

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \dots + \pi_i\, m_1 m_2 \dots m_{i-1} + \dots$$
$$\dots + \pi_{n-1}\, m_1 m_2 \dots m_{n-2} + \pi_n\, m_1 m_2 \dots m_{n-1}$$

в обратном коде:

$$\overline{N} = \overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2 m_1 + \dots + \overline{\pi}_i\, m_1 m_2 \dots m_{i-1} + \dots$$
$$\dots + \overline{\pi}_{n-1}\, m_1 m_2 \dots m_{n-2} + \overline{\pi}_n\, m_1 m_2 \dots m_{n-1}\,.$$

При равновероятном распределении чисел диапазона M возможность того, что хотя бы один разряд числа N равен нулю, составляет

$$p_0^1 = 1 - \left(\left(1-\frac{1}{m_1}\right)\times\left(1-\frac{1}{m_2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{m_{n-1}}\right)\right)^2,$$

$$p_0^1 = 1 - \left(\left(1-\frac{1}{11}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = 1-\left(\frac{10}{11}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}83\,.$$

Полученное значение $p_0^1 = 0{,}83$ свидетельствует о целесообразности использования такого представления чисел в СОК для ускорения определения принадлежности числа данной половине диапазона.

Работа предложенного алгоритма показана в табл. 2—6, где для каждого делителя (модуля), представленного своими остатками по модулю в

Таблица 2. **Остатки по модулю 11**

Делитель	Делимое										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	Остаток										
3	0 10	4 6	8 2	1 9	5 5	9 1	2 8	6 4	10 0	3 7	7 3
5	0 10	9 1	7 3	5 5	3 7	1 9	10 0	8 2	6 4	4 6	2 8
7	0 10	8 2	5 5	2 8	10 0	7 3	4 6	1 9	9 1	6 4	3 7

соответствующей таблице, верхняя строка — величина остатка в прямом коде, нижняя строка — в обратном коде.

В табл. 7 представлен процесс получения π_n для того же числа $N = 1487 = (1, 2, 2, 3, 2)$ в той же системе модулей 11, 7, 5, 3, 2, что и в табл. 1, но с помощью предложенного алгоритма. В четвертые строки блоков A и B одновременно записывается число N соответственно в прямом и обратном коде. При этом блок A считается активным.

Из сопоставления значений остатков в четвертой строке блоков A и B видно, что остатки по модулям 3 и 11 в блоке B равны нулю. Поэтому блок B принимаем в качестве активного и выполняем деление числа N на $(3*11)$. В пятой строке блока B величина делителя $(3*11)$ представлена своими остатками по соответствующим модулям.

Из табл. 6 для делимого, равного 1, выбираем верхнюю строку делителя 1, т.е. значение 1, и в качестве прямого кода записываем в ячейку модуля 2 шестой строки блока B. Одновременно в ячейку модуля 2 шестой строки блока A записываем в качестве обратного кода нижнюю строку делителя 1, т.е. значение 0.

Таблица 3. **Остатки по модулю 7**

Делитель	Делимое						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	Остаток						
	0	5	3	1	6	4	2
3	6	1	3	5	0	2	4
5	0	3	6	2	5	1	4
	6	3	0	4	1	5	2
	0	2	4	6	1	3	5
4	6	4	2	0	5	3	1

Таблица 4. **Остатки по модулю 5**

Делитель	Делимое				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
	Остаток				
3	0	2	4	1	3
	4	2	0	3	1
2	0	3	1	4	2
	4	1	3	0	2
1	0	1	2	3	4
	4	3	2	1	0

Таблица 5. **Остатки по модулю 3**

Делитель	Делимое		
	0	**1**	**2**
	Остаток		
2	0	2	1
	2	0	1
1	0	1	2
	2	1	0

Таблица 6. **Остатки по модулю 2**

Делитель	Делимое	
	0	**1**
	Остаток	
1	0	1
	1	0

Таблица 7. **Определение π_n по предлагаемому алгоритму**

Делитель	Блок A						Блок B				
1	Модуль						Модуль				
2	**2**	**3**	**5**	**7**	**11**		**2**	**3**	**5**	**7**	**11**
3	Остаток						Остаток				
4	0	2	2	3	10	$\rightarrow$	1	0	2	3	0
5							1	$\times$	3	5	$\times$
6	0	=	0	4	=	$\leftarrow$	1	=	4	2	=
7	1	2	$\times$	5	5						
8	0	=	=	5	=		1	=	=	1	=
9	-5										
10	**1**	=	=	0	=						

Из табл. 4 для делимого, равного 2, выбираем верхнюю строку делителя 3, т.е. значение 4, и в качестве прямого кода записываем в ячейку модуля 5 шестой строки блока B. Одновременно в ячейку модуля 5 шестой строки блока A записываем в качестве обратного кода нижнюю строку делителя 3, т.е. значение 0.

Из табл. 3 для делимого, равного 3, выбираем верхнюю строку делителя 5, т.е. значение 2, и в качестве прямого кода записываем в ячейку модуля 7 шестой строки блока B. Одновременно в ячейку модуля 7 шестой строки блока A записываем в качестве обратного кода нижнюю строку делителя 5, т.е. значение 4.

Выполняем сопоставление значений остатков в шестой строке блоков A и B, из которого видно, что остаток по модулям 5 в блоке A равен нулю. Поэтому принимаем блок A в качестве активного и выполняем деление числа N на 5 таким же способом, как описано выше.

Из очередного сопоставления значений остатков в восьмой строке блоков A и B видно, что нулевые остатки в обоих блоках отсутствуют. Поэтому заключительная итерация состоит в вычитании значения остатка по $m=7$.

В рассматриваемом примере вычитание выполнено на активном блоке A. В десятой строке получаем $\tilde{\pi}_n = 1$. Поскольку заключительная итерация выполнена на блоке A, т.е. число переходов от одного блока к другому — четное, окончательное значение, $\pi_n = \tilde{\pi}_n = 1$, совпадает со значением π_n, полученным с использованием известного подхода. В данном примере результат достигнут за три итерации, выигрыш в быстродействии $\theta = 5/3 = 1{,}67$.

Выводы

Предложенный алгоритм обеспечивает повышение быстродействия выполнения операции принадлежности числа данной половине диапазона. Полученные результаты могут быть использованы для разработки патентно-способных и несложных при схемной реализации вычислительных структур. Представляется целесообразным применение предложенного подхода для эффективного выполнения немодульных операций.

The method of increasing the fast-acting of the operation of the number membership in the given half of the range in the system of residual classes is considered. The method is based on simultaneous presentation of the numbers in direct and reverse codes with the choice of active presentation on every iteration.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.* Машинная арифметика в остаточных классах. — М. : Сов. радио, 1968. — 440 с.
2. **Пат. 12654 Україна**, МКВ7 G 06 F 7/04 , B 23 D 41/00. Спосіб визначення у системі залишкових класів належності числа до даної половини / Ю.Д. Поліський.— Опубл. 15.02.2006. — Бюл. № 2.

Поступила 11.03.14

ПОЛИССКИЙ Юрий Давидович, канд. техн. наук. В 1960 г. окончил Днепропетровский металлургический ин-т. Область научных исследований — системы и средства управления.