УДК 519.6

В.А. Иванюк, канд. тех. наук
Каменец-Подольский национальный университет им. Ивана Огиенко
(Украина, 32300, Каменец-Подольский, ул. Уральская, 1,
тел. (097) 8051401, e-mail: wivanyuk@gmail.com),
Н.Л. Костьян
Киевский национальный университет технологий и дизайна
(Украина, 01011, Киев, ул. Немировича-Данченка, 2,
e-mail: k_n_l@mail.ru)

Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы

Рассмотрен способ построения динамической модели линейного объекта в форме дробно-рациональной передаточной функции по реакции на входное воздействие произвольной формы. Получена оценка точности идентификации.

Розглянуто спосіб побудови динамічної моделі лінійного об'єкта у формі дробово-раціональної передатної функції по реакції на вхідний вплив довільної форми. Отримано оцінку точності ідентифікації.

Ключевые слова: *передаточная функция, идентификация, преобразование Лапласа.*

Известно, что наилучшую оценку параметров математической модели объекта может дать только специально организованный активный эксперимент с аналитического вида тестовым воздействием [1]. Однако организация такого эксперимента не всегда возможна по причине высокой стоимости или практической неосуществимости. Поэтому приходится определять параметры модели объекта по его отклику на входное воздействие произвольной формы. Эти динамические характеристики часто бывают либо уникальными, либо неподдающимися улучшению.

Методика оценки параметров математической модели объекта заданного аналитического вида (обычно дробно-рациональной передаточной функции $H(p)=\sum_{k=0}^{m} a_k p^k \bigg/ \sum_{i=0}^{n} b_i p^i$, $n \ge m$), наиболее применимая для решения поставленной задачи, описана в [2, 3]. Суть методики заключается в следующем. Передаточная функция объекта бесконечно-дифференцируе-

© В.А. Иванюк, Н.Л. Костьян, 2014

ма ($H(p) \in C^{\infty}$), а измеренное входное воздействие и реакция объекта, заданные на конечном дискретном множестве, описываются некоторыми непрерывными функциями $x(t)$, $y(t) \in C^0$. При этом непосредственно использовать измеренные значения $x(t)$ и $y(t)$ для оценки параметров модели $H(p)$ затруднительно, так как любой метод решения системы алгебраических уравнений, к которой сводится данная задача, по сути, заключается в оценке не менее чем $2n$ первых конечных разностей от $x(t)$, $y(t)$ (где n — порядок знаменателя $H(p)$). Поэтому на первом шаге необходимо обеспечить мощное сглаживание $x(t)$ и $y(t)$), такое, чтобы выполнялось условие $x(t)$, $y(t) \in C^{2n}$, что может быть достигнуто, например, последовательным $2n$-кратным интегрированием.

Наиболее удобная форма интегрального сглаживания вытекает из определения преобразования Лапласа

$$H(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\eta(t)\,dt. \tag{1}$$

Если в (1) экспоненту заменить ее разложением в ряд Тейлора—Маклорена в точке $p^* = p + \alpha$, где α — произвольное положительное действительное число, то получим

$$\begin{gathered} H(p^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^*)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha t} t^k\,\eta(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\, p^{*k}, \\ P_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha t} t^k\,\eta(t)\,dt, \end{gathered} \tag{2}$$

где P_k — k-й момент Пуассона [2, 3]; $\eta(t)$ — импульсная переходная функция объекта. Можно показать, что $P_k \in C^k$, т.е. удовлетворяют условиям корректности решения поставленной задачи. Если при проведении эксперимента измерена не функция $\eta(t)$, а реакция $y(t)$ объекта на воздействия $x(t)$, то необходимый для оценки величин коэффициентов дробно-рациональной функции $H(p)$ спектр Пуассона H_k, $k = \overline{0, 2n}$, определяется из решения известного равенства

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \tag{3}$$

Пусть Y_k и X_k — последовательность моментов Пуассона входного воздействия $x(t)$ и реакции объекта $y(t)$. Тогда искомый спектр H_k вычисляется

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2014. V. 36. № 3

по вытекающим из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k p^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} Y_k p^k}{\sum_{k=0}^{\infty} X_k p^k}$$

формулам

$$H_0 = \frac{Y_0}{X_0}, \ \ H_k = \frac{Y_k - \sum_{m=0}^{k-1} H_m X_{k-m}}{X_0}. \tag{4}$$

Из системы (4) непосредственно следует, что погрешность в определении k-го момента Пуассона значительно больше погрешности оценок моментов Y_k и X_k. Следовательно, достоверность параметров модели $H(p)$ при произвольном входном воздействии будет существенно хуже, чем при оценке их величин, например, по переходной или импульсной функции объекта. Этот недостаток метода принципиально неустраним при любой методике вычислений.

В этом случае рекомендуется обеспечение хорошей помехозащищенности и надежности измерительной аппаратуры, а также достаточной избыточности обмеров $x(t)$ и $y(t)$. Иными словами, частота дискретизации $x(t)$ и $y(t)$ не должна существенно отличаться от частоты по Котельникову т.е. шаг измерений должен быть не больше, чем $\Delta t \approx 1/f_{\text{срез}}$, где $f_{\text{срез}}$ — верхняя граница спектра $H(j\omega)$, соответствующая частоте (в герцах), при которой модуль амплитудно-частотной характеристики объекта становится меньше утроенной величины приведенной погрешности измерительного комплекса.

При вычислении спектров Пуассона существенное значение имеет используемый метод численного интегрирования. В [4] показано, что при применении классических методов интегрирования получают смещенные оценки величин моментов вследствие эффекта «мимикрии» частот. Наиболее подходит для вычисления спектра Пуассона метод Филона второго порядка [4], суть которого состоит в том, что на шаге интегрирования функция $x(t)$ или $y(t)$ представляется параболой второго порядка. При этом интеграл (2) берется в явном виде, и вычисление спектра p_k выполняется по рекуррентной формуле.

При решении ряда практических задач существенное значение имеет выбор порядка метода Филона. В случае использования данного метода первого порядка достоверность результатов часто оказывается недостаточной, а при использовании метода третьего порядка значительно увеличивается вычислительное время, однако сохраняется качество результатов. Наилучшие результаты обработки сигналов, имеющих непрерывную первую производную, достигаются аппроксимацией $x(t)$ и $y(t)$ на шаге интегрирования сплайном третьего порядка $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, удовлетворяющим условию непрерывности производной $f'(t)$.

Известно [4], что определители систем алгебраических уравнений, при решении которых определяются коэффициенты $H(p)$, плохо обусловлены, точнее, близки к гильбертовским. Величины гильбертовского определителя ΔG для ряда значений n систем алгебраических уравнений, соответствующих числу неизвестных коэффициентов передаточной функции $H(p)$, следующие:

n	4	5	6	7	8
ΔG	$2 \cdot 10^{-7}$	$3{,}7 \cdot 10^{-12}$	$5{,}4 \cdot 10^{-18}$	$4{,}8 \cdot 10^{-25}$	$2{,}7 \cdot 10^{-33}$

Отсюда следует, что оценка определителя по экспериментально измеренным динамическим характеристикам более семи неизвестных коэффициентов $H(p)$ является нереальной задачей. Причина этого заключается в свойствах k-го момента Пуассона

$$P_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T e^{-\alpha t} t^k \, \eta(t)\, dt,$$

где T — длительность переходного процесса, по истечении которого амплитуда $\eta(t)$ будет меньше, чем утроенная величина погрешности измерительного комплекса.

Из известной теоремы Чебышева о полиномах, наименее отклоняющихся от нуля, следует, что парабола $t^k \in [0, T]$ может быть представлена параболой степени $k-1$ с погрешностью не менее чем 2^{1-2k}. Например, параболу t^5 можно заменить параболой четвертой степени

$$t^5 = 2{,}5t^4 - \frac{35}{16}t^3 + \frac{25}{32}t^2 + \frac{25}{256}t + \frac{1}{512}$$

с погрешностью не больше чем 0,2 %. Следовательно, можно утверждать, что если погрешность измерительного комплекса σ = 0,5 %, то все моменты Пуассона, начиная с пятого, будут линейно зависимыми от первых четырех. Если σ = 0,1 %, то шестой и последующие моменты Пуассона можно представить как линейную комбинацию первых пяти. Таким образом, при реально достижимой точности обмеров динамических характеристик промышленных объектов ($\tilde{\sigma}=1\,\%$) можно оценить величины не более чем четырех-пяти неизвестных коэффициентов передаточной функции $H\,(p)$.

С помощью алгоритма идентификации объекта, построенного по данной схеме, вычисляются коэффициенты дробно-рациональных функций второго и третьего порядка по следующим формулам:

при $n=2$

$$D_0=\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix},\; D_1=\begin{vmatrix} P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 \end{vmatrix},\; D_2=\begin{vmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix};$$

$$D=D_0-D_1+D_2;$$

$$b_0=1,\; b_1=\frac{\tau\,(D_1-2D_0)}{D},\; b_2=\frac{\tau^2 D_0}{D},$$

$$a_0=\frac{P_0(D_2-D_1)+P_1D_2}{2D},\; a_1=\frac{\tau\,(P_0D_1-P_1D_2)}{2D};$$

при $n=3$

$$D_0=\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \\ P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} P_0 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_4 & P_5 \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_4 \\ P_2 & P_3 & P_5 \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix};$$

$$D=D_3-D_2+D_1-D_0;$$

$$b_0=1,\; b_1=\frac{\tau\,(D_2-2D_1+3D_0)}{D},\; b_2=\frac{\tau^2(D_1-3D_0)}{D},\; b_3=\frac{\tau^2 D_0}{D};$$

$$a_0=\frac{[P_0(D_3-D_2+D_1)+P_1(D_3-D_2)+P_2D_3]}{2D},$$

$$a_1=\frac{\tau[P_0(D_2-2D_1)-P_1(D_3-2D_2)-2P_2D_3]}{2D},$$

$$a_2=\frac{\tau^2[P_0D_1-P_1D_2+P_2D_3]}{2D},$$

где $\tau=1/\alpha$.

Как свидетельствуют результаты расчетов, их качество существенно зависит от удачного выбора весового коэффициента α в (2). Каких-либо теоретических оценок для выбора оптимальной величины α не существует. Однако область существования оптимальной величины известна. Ее обратная величина τ должна быть не меньше шага дискретизации $x(t)$ или $y(t)$ и не больше длительности переходного процесса. Оптимальной величине τ_0 соответствует наименьшее среднеквадратичное отклонение S между измеренной и расчетной реакцией объекта на заданное входное воздействие. Зависимость величины S от τ многоэкстремальна. Кроме того, область существования τ может оказаться разбитой на подобласти физически реализуемых решений, определяемых условиями Гурвица.

Для определения наименьшей величины среднеквадратического отклонения S выбирается сочетание панорамной оценки зависимости $S(\tau)$ для двадцати значений $\tau_i = 1{,}16\tau_{i-1}$ согласно методу градиента на интервале $0{,}87\tau_0 \le \tau_j \le 1{,}13\tau_0$, где τ_0 соответствует наименьшей величине S, полученной при панорамном просмотре.

Задача определения среднеквадратичного отклонения с помощью данного алгоритма имеет свои особенности. Необходимо найти отклик объекта, заданного передаточной дробно-рациональной функцией второго или третьего порядка, на заданное на дискретной сетке (в общем случае не обязательно регулярной) входное воздействие. При этом реакцию объекта следует вычислять на дискретной сетке, в общем не совпадающей с той, на которой была измерена реакция объекта. Алгоритм вычисления отклика объекта должен быть максимально быстродействующим, так как при решении задачи идентификации он выполняется не менее 40—50 раз и определяет время счета. Достаточно эффективен в этом случае метод интегрирования Тейлора [5].

При реализации алгоритма интегрирования входное воздействие может ступенчато изменяться только в точках отсчета. Между дискретами измерения оно описывается параболой третьего порядка или, если априори известно, что входной сигнал есть гладкая аналитическая функция, — сплайном третьего порядка, обеспечивающим непрерывность первой производной $x(t)$. При этом как входное воздействие, так и отклик объекта может быть представлен рядом Тейлора. Следовательно, можно записать

$$X(p) = \frac{\sum_{k=0}^{3} X(k)\,k!}{(Hp)^k},\quad Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)\,k!}{(Hp)^k}, \tag{5}$$

где $X(k)$ и $Y(k)$ — коэффициенты разложения функций $x(t)$ и $y(t)$ в ряды Тейлора; k — шаг их дискретизации. Подставив (5) в (3), помножив полученное равенство на знаменатель передаточной функции $H\,(p)$, а затем приравняв члены с одинаковыми степенями при p, получим

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} Y(k)\, b_{n-m+k} k}{H^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^{m} X(k)\, a_{n-m+k} k}{H^{-k}}, \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{6}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} Y(k)\, b_k (k+m)}{H^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} X(k)\, a_k (k+m)}{H^{-k}}, \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{7}$$

где n — порядок знаменателя $H\,(p)$.

Равенство (6) определяет реакцию объекта на ступенчатое изменение в момент $t = t_i$ величины входного воздействия. Равенство (7) описывает реакцию объекта на монотонно изменяющуюся часть входного воздействия. Искомая величина реакции объекта в момент времени $t_{i+1} = t_i + t_1$, где $t_1 \le H$, имеет вид

$$Y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{m} Y_i(k) \left(\frac{t_1}{H} \right)^k .$$

Для практических задач можно ограничиться членом $Y\,(m) < 10^{-4}\, Y\,(t_i\,)$, что обеспечивает методическую погрешность не более 0,1 %.

Выводы

Предложенный алгоритм позволяет на основе пассивных экспериментов вычислить коэффициенты дробно-рациональной передаточной функции с точность до 0,1 %.

A method for construction of a dynamic model of a linear object in the form of rational fractional transfer function by the reaction to the input action of arbitrary shape has been considered. The identification accuracy estimate is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верлань А.Ф., Абдусаров Б.Б., Игнатченко А.А., Максимович Н.А.* Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. — Киев : Наук. думка, 1993. — 208 с.
2. *Надежность* современных и перспективных турбогенераторов / Ред. Г.Г. Счастливый. — Киев : Наук. думка, 1978. — 203 с.
3. *Дехтяренко П.И., Коваленко В.П.* Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования. — М. : Энергия, 1973. — 120 с.

4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., исправленное. — СПб. : Изд-во СПб, БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
5. *Пухов Г.Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. — Киев : Наук. думка, 1978. — 259 с.

Поступила 23.04.14

ИВАНЮК Виталий Анатольевич, канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 2003 г. окончил Каменец-Подольский государственный университет. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования динамических систем.

КОСТЬЯН Наталья Леонидовна, ст. преподаватель кафедры информационно-компьютерных технологий и фундаментальных дисциплин Киевского национального университета технологий и дизайна. В 1999 г. окончила Черкасский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование , параметрическая идентификация динамических объектов.