



УДК 621.316.99

**Д.Г. Колиушко**, канд. техн. наук,  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический ин-т»  
(Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,  
тел. (057) 7076280, e-mail: den@kpi.kharkov.ua),

**С.С. Руденко**, аспирант  
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский ин-т «Молния»  
Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т»  
(Украина, 61013, Харьков, ул. Шевченко, 47,  
тел. (057) 7076671, e-mail: sergej\_rudenko@mail.ru)

### **Математическая модель заземляющего устройства энергообъекта при наличии подстилающего слоя**

Предложена математическая модель неэквипотенциального заземляющего устройства произвольной конфигурации для расчета нормируемых параметров с учетом влияния подстилающего слоя.

Запропоновано математичну модель нееквіпотенціального заземлювального пристрою довільної конфігурації для розрахунку нормованих параметрів з урахуванням впливу підстильного шару.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* математическая модель, заземляющее устройство, подстилающий слой, трехслойная структура грунта.

**Постановка проблемы.** Заземляющее устройство (ЗУ) — одно из важнейших составных частей любого объекта электроэнергетики. Его основными задачами являются обеспечение надежного функционирования оборудования и электробезопасности обслуживающего персонала. Для проверки соответствия ЗУ нормативным требованиям осуществляется контроль его основных параметров: напряжения прикосновения, потенциала на ЗУ и сопротивления ЗУ. Повышение точности расчета данных параметров является актуальной задачей относительно техники безопасности и оптимизации материальных затрат при модернизации и проектировании ЗУ.

В настоящее время в Украине расчет параметров ЗУ осуществляется с помощью математической модели ЗУ, расположенного в двухслойном грунте. Основу такой модели составляет решение полевой задачи о распределении электрического поля электрода [1]. Разработаны методы повышения точности расчета: учет неэквипотенциальности и произвольной конфигурации ЗУ [2], учет нелинейного распределения плотности тока

© Д.Г. Колиушко, С.С. Руденко, 2014

вдоль заземлителя [3]. Однако в настоящее время одним из основных источников погрешности расчета нормируемых параметров ЗУ является приведение многослойного грунта к эквивалентному двухслойному. В трехслойном грунте толщина первого слоя, как правило, не превышает 1 м. Удельное сопротивление такого слоя зависит от наличия насыпного грунта на территории энергообъекта, сезонного изменения климатических условий, бетонирования территории, постепенного загрязнения грунта отходами технологического процесса (угольной пылью, воздействием агрессивных реагентов и др.).

Вопросы разработки математической модели ЗУ, размещенного в трехслойном грунте, изучены недостаточно ввиду сложности получения соответствующих математических выражений. В [4, 5] приведены математические модели ЗУ, размещенных в многослойном грунте, которые построены на основе метода оптической аналогии. Их недостатком является значительное возрастание количества вычислений, так как один точечный источник тока (ТИТ) заменяется  $2n$  дополнительными ТИТ, где  $n$  — число слоев. Поскольку для ЗУ мощных электроустановок число расчетных узлов сетки может составлять несколько тысяч, увеличение их числа в семь раз (в случае трехслойного грунта) приводит к существенным трудностям при выполнении расчета имеющимися техническими средствами. Поэтому разработка математической модели ЗУ, размещенного во втором слое трехслойного полупространства, первый слой которого — подстилающий, является актуальной задачей.

**Результаты исследований.** При моделировании короткого замыкания на землю для расчета нормируемых параметров ЗУ определяется величина потенциала как в окрестности ЗУ, так и на поверхности земли. Таким образом, чтобы учесть наличие подстилающего слоя необходимо рассмотреть два случая:

- 1) ЗУ находится во втором слое, а точка наблюдения  $P$  — в первом.
- 2) ЗУ и точка наблюдения  $P$  находятся во втором слое.

В [6] получены выражения для расчета потенциала электрического поля, созданного ТИТ, размещенного в трехслойном полупространстве. Эти выражения получены на основе решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат с учетом соответствующих граничных условий. Для случаев 1 и 2 они будут иметь следующий вид:

$$\varphi_{1,2}(r, z) = \frac{I\rho_2}{4\pi} (1 - K_{2,1}) \sum_{n=0}^m K_n (\alpha_1 + \alpha_2 + K_{3,2}(\alpha_3 + \alpha_4)), \quad (1)$$

$$\varphi_{2,2}(r, z) = \frac{I\rho_2}{4\pi} \left[ \alpha_5 + \sum_{n=0}^m K_n (\alpha_2 + K_{3,2}(\alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_4)) - \right.$$

$$\left. -K_{2,1}K_{3,2}(\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9) - K_{2,1}\alpha_{10} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $K_{2,1}, K_{3,2}$  — коэффициенты неоднородности,

$$K_{2,1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad K_{3,2} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2};$$

$\rho_i$  и  $h_i$  — удельное сопротивление  $i$ -го слоя и глубина границ раздела  $i$  и  $i + 1$  слоев;  $\alpha_k$  — геометрические коэффициенты, вычисляемые по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \mp h_n)^2}}, \quad \alpha_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \mp 2h_2 \mp h_n)^2}}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \eta)^2}}, \\ \alpha_6 &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \eta - 2h_2 - h_n)^2}}, \quad \alpha_{7,8} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \mp 2h_1 - 2h_2 - h_n)^2}}, \quad (3) \\ \alpha_9 &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \eta - 2h_1 + 2h_2 + h_n)^2}}, \quad \alpha_{10} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \eta - 2h_1 + h_n)^2}}, \end{aligned}$$

где  $r, z$  — координаты точки наблюдения;  $\eta$  — координата ТИТ по оси  $z$ ;  $K_n$  и  $h_n$  — коэффициенты, полученные в результате численного разложения функции, характеризующей трехслойную среду, в ряд

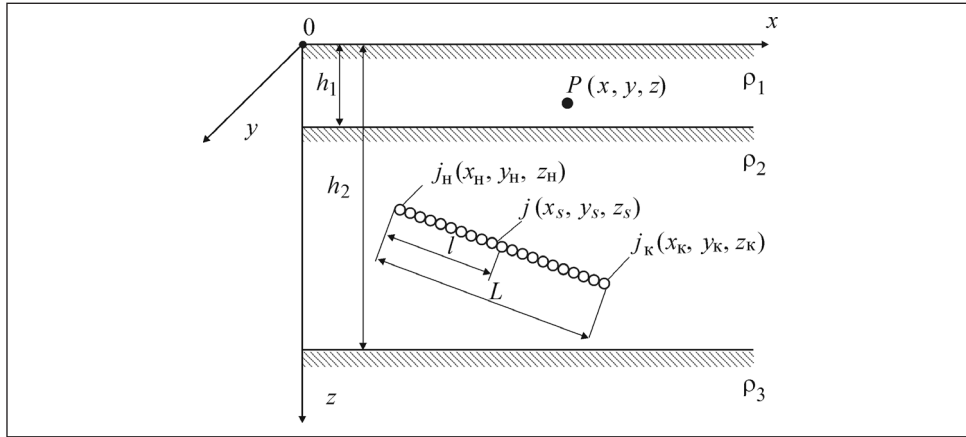
$$F(\lambda) = \frac{1}{1 - K_{2,1}e^{-2\lambda h_1} + K_{2,1}K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2 - h_1)} - K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}}$$

с помощью метода наименьших квадратов [7];  $\lambda$  — параметр разделения переменных в методе Фурье для нахождения общего решения уравнения Лапласа.

Полученные выражения (1) и (2) являются основой для моделирования различных физических процессов, в частности для расчета сложного неэквипотенциального ЗУ произвольной конфигурации, размещенного в трехслойном грунте. Представим электрод ЗУ множеством ТИТ, расположенных вдоль его оси (см. рисунок). Плотность тока такого источника, находящегося на оси  $i$ -го электрода, представим в виде [2]

$$j_i(l_i) = j_{in} + (j_{ik} - j_{in})l_i / L_i, \quad (4)$$

где  $j_{in}$  и  $j_{ik}$  — плотность тока в начальном и конечном узлах  $i$ -го электрода;  $l_i$  — расстояние до  $i$ -го электрода от его начального узла;  $L_i$  — длина  $i$ -го электрода.



Электрод, представленный в виде множества ТИТ и расположенный во втором слое

В выражениях (3) расстояние между ТИТ, расположенным на оси электрода, и точкой наблюдения  $P$ , может быть записано в виде  $r = \sqrt{(x_s - x)^2 + (y_s - y)^2}$ , где  $x, y$  — декартовы координаты точки  $P$ ;  $x_s, y_s, z_s = \eta$  — координаты ТИТ  $i$ -го электрода,

$$\begin{aligned} x_s &= x_{и\eta} + (x_{к\eta} - x_{и\eta}) l_i / L_i, \\ y_s &= y_{и\eta} + (y_{к\eta} - y_{и\eta}) l_i / L_i, \\ z_s &= z_{и\eta} + (z_{к\eta} - z_{и\eta}) l_i / L_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $(x_{и\eta}, y_{и\eta}, z_{и\eta})$  и  $(x_{к\eta}, y_{к\eta}, z_{к\eta})$  — координаты начального и конечного узлов  $i$ -го электрода. В этом случае все коэффициенты  $\alpha_k$  могут быть представлены в виде

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{L^2} l^2 + \frac{B_k}{L} l + C_k}},$$

где

$$\begin{aligned} A &= (x_{к\eta} - x_{и\eta})^2 + (y_{к\eta} - y_{и\eta})^2 + (z_{к\eta} - z_{и\eta})^2; \\ B_{1,2} &= 2[M \mp (z_{к\eta} - z_{и\eta})(z \mp z_{и\eta} \mp h_n)]; \quad C_{1,2} = N + (z \mp z_{и\eta} \mp h_n)^2; \\ B_{3,4} &= 2[M \mp (z_{к\eta} - z_{и\eta})(z \mp z_{и\eta} \pm 2h_2 \pm h_n)]; \quad C_{3,4} = N + (z \mp z_{и\eta} \pm 2h_2 \pm h_n)^2; \\ B_5 &= 2[M + (z_{к\eta} - z_{и\eta})(z_{и\eta} \mp z)]; \quad C_5 = N + (z_{и\eta} \mp z)^2; \end{aligned}$$

$$B_6 = 2[M - (z_{ik} - z_{ih})(z - z_{ih} - 2h_2 - h_n)]; \quad C_6 = N + (z - z_{ih} - 2h_2 - h_n)^2;$$

$$B_{7,8} = 2[M \pm (z_{ik} - z_{ih})(z \pm z_{ih} \mp 2h_1 - 2h_2 - h_n)];$$

$$C_{7,8} = N + (z \pm z_{ih} \mp 2h_1 - 2h_2 - h_n)^2;$$

$$B_9 = 2[M - (z_{ik} - z_{ih})(z - z_{ih} - 2h_1 + 2h_2 + h_n)];$$

$$C_9 = N + (z - z_{ih} - 2h_1 + 2h_2 + h_n)^2;$$

$$B_{10} = 2[M + (z_{ik} - z_{ih})(z + z_{ih} - 2h_1 + h_n)]; \quad C_{10} = N + (z + z_{ih} - 2h_1 + h_n)^2;$$

$$M = (x_{ik} - x_{ih})(x_{ih} - x) + (y_{ih} - y_{ih})(y_{ih} - y); \quad N = (x_{ih} - x)^2 + (y_{ih} - y)^2.$$

С учетом (4), (5) на основании (1) и (2) можно получить выражения для расчета поля ЗУ произвольной конфигурации, расположенного во втором слое трехслойного грунта, и привести их к такому же виду, как и для двухслойной модели [2]. Тогда суммарный потенциал электрического поля  $\varphi_i$  в трехслойном грунте, создаваемый в точке  $P$  токами точечных источников  $i$ -го электрода, для случаев 1 и 2 можно соответственно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{i,1,2} = & \frac{\rho_2}{4\pi} (1 - K_{2,1}) \left[ j_{ih} \left( \sum_{n=0}^m K_n (G_{1,i} + G_{2,i} + K_{3,2}(G_{3,i} + G_{4,i})) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{n=0}^m K_n (S_{1,i} + S_{2,i} + K_{3,2}(S_{3,i} + S_{4,i})) \right) + \right. \\ & \left. + j_{ik} \sum_{n=0}^m K_n (S_{1,i} + S_{2,i} + K_{3,2}(S_{3,i} + S_{4,i})) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i,2,2} = & \frac{\rho_2}{4\pi} \left[ j_{ih} \left( G_{5,i} + \sum_{n=0}^m K_n (G_{2,i} - K_{2,1}G_{10,i} + K_{3,2}(G_{6,i} + G_{3,i} + G_{4,i}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_{2,1}K_{3,2}(G_{7,i} + G_{8,i} + G_{9,i})) - S_{1,i} - \sum_{n=0}^m K_n (S_{2,i} - K_{2,1}S_{10,i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + K_{3,2}(S_{6,i} + S_{3,i} + S_{4,i}) - K_{2,1}K_{3,2}(S_{7,i} + S_{8,i} + S_{9,i})) \right) + \right. \\ & \left. + j_{ik} \left( S_{1,i} + \sum_{n=0}^m K_n (S_{2,i} - K_{2,1}S_{10,i} + K_{3,2}(S_{6,i} + S_{3,i} + S_{4,i}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_{2,1}K_{3,2}(S_{7,i} + S_{8,i} + S_{9,i})) \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

Структура грунта	Трехслойный грунт		Двухслойный грунт		Погрешность вычисления потенциала, %	
	$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$h_1, h_2, \text{ м}$	$\rho_1, \rho_2, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$h_1, \text{ м}$	на поверхности грунта	в окрестности ЗУ
<i>A</i> ( $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ )	$\rho_1 = 50$ $\rho_2 = 100$ $\rho_3 = 500$	$h_1 = 0,4$ $h_2 = 3$	$\rho_1 = 67,4$ $\rho_2 = 406$	0,74	От -19,6 до -26,7	От -17,3 до -26,6
<i>K</i> ( $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ )	$\rho_1 = 50$ $\rho_2 = 500$ $\rho_3 = 50$	$h_1 = 0,4$ $h_2 = 3$	$\rho_1 = 140$ $\rho_2 = 72$	1,21	От 38,8 до 47,5	От 37 до 46,4
<i>Q</i> ( $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ )	$\rho_1 = 500$ $\rho_2 = 100$ $\rho_3 = 50$	$h_1 = 0,4$ $h_2 = 3$	$\rho_1 = 246$ $\rho_2 = 53,8$	0,93	От -0,6 до -2,7	От 11 до 15,4
<i>H</i> ( $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ )	$\rho_1 = 500$ $\rho_2 = 50$ $\rho_3 = 500$	$h_1 = 0,4$ $h_2 = 3$	$\rho_1 = 178$ $\rho_2 = 347$	1,21	От -42,9 до -67,3	От -44,6 до -69

где  $G_{k,i}$  и  $S_{k,i}$  — коэффициенты, полученные при интегрировании (1) и (2) по длине электрода с учетом  $L = \sqrt{A}$ ,

$$G_{k,i} = \int_0^{L_i} \frac{dl_i}{\sqrt{\frac{A_i}{L_i^2} l_i^2 + \frac{B_{k,i}}{L_i} l_i + C_{k,i}}} =$$

$$= \ln \left| \sqrt{1 + \frac{B_{k,i} + C_{k,i}}{A_i} + \frac{B_{k,i}}{2A_i}} + 1 \right| - \ln \left| \frac{B_{k,i}}{2A_i} + \sqrt{\frac{C_{k,i}}{A_i}} \right|,$$

$$S_{k,i} = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} \frac{l_i dl_i}{\sqrt{\frac{A_i}{L_i^2} l_i^2 + \frac{B_{k,i}}{L_i} l_i + C_{k,i}}} = \sqrt{1 + \frac{B_{k,i} + C_{k,i}}{A_i}} - \sqrt{\frac{C_{k,i}}{A_i}} - \frac{B_{k,i}}{2A_i} G_{k,i}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции полей суммарный потенциал в точке  $P$ , создаваемый всеми электродами, можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{Q_3} \varphi_i = \sum_{i=1}^{Q_3} (k'_i j_{in} + k''_i j_{ik}), \quad (8)$$

где  $k'_i$  и  $k''_i$  — коэффициенты при  $j_{in}$  и  $j_{ik}$  для (6) и (7);  $Q_3$  — конечное число электродов. Учитывая произвольность выбора начального и конечного

узлов электрода, записываем (8) относительно плотности тока  $m$ -го узла в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{Q_y} j_m \left( \sum_{m_n} a_i + \sum_{m_k} b_i \right) = \sum_{i=1}^{Q_y} d_m j_m, \quad (9)$$

где  $Q_y$  — число подземных узлов сетки ЗУ;  $m_n$  и  $m_k$  — номера электродов, для которых  $m$ -й узел является начальным и конечным;  $j_m$  — плотность тока  $m$ -го узла.

На основании выражений (6), (7) и (9) в среде Visual Basic разработана тестовая программа для расчета потенциала электрического поля ЗУ при заданной плотности тока. Для оценки влияния подстилающего слоя на нормируемые параметры ЗУ с помощью данной программы был проведен численный эксперимент, который заключался в определении погрешности при расчете потенциала на поверхности грунта и в окрестности ЗУ с эквивалентированием трехслойного грунта двухслойным [8].

В таблице приведены результаты вычислений электрофизических параметров грунта для ЗУ, выполненного в виде сетки из 16 узлов с ячейкой  $5 \times 5 \text{ м}^2$ , размещенной на глубине 0,6 м. Вычисления выполнены для четырех типов структуры трехслойного грунта ( $A, K, Q, H$ ) [8], а также эквивалентного им двухслойного.

Анализ приведенных в таблице данных свидетельствует о том, что для трех из четырех возможных типов геоэлектрической структуры ( $A, K$  и  $H$ ) эквивалентирование трехслойного грунта с подстилающим слоем двухслойным приводит к существенной погрешности (от  $-69\%$  до  $47,5\%$ ) при расчете значений потенциала на ЗУ и напряжения прикосновения. При этом для структур  $A$  и  $H$  эквивалентирование приводит к занижению расчетных величин и соответственно повышает электроопасность установки, а для структуры  $K$  — к завышению и соответственно к неоправданному возрастанию материальных затрат при модернизации ЗУ. Анализ результатов расчета также показал, что величина погрешности в центральных узлах сетки ЗУ значительно выше, чем в крайних (от 1,25 до 4,5 раз). Это связано с ее накоплением при суперпозиции полей от каждого электрода. Таким образом, погрешность расчета нормируемых параметров для ЗУ больших размеров с увеличением числа узлов будет возрастать.

## Выводы

1. Предложенная математическая модель неэквипотенциального ЗУ произвольной конфигурации позволяет рассчитывать нормируемые параметры ЗУ с учетом наличия подстилающего слоя.

2. Рассмотрение трехслойной геоэлектрической структуры с подстилающим слоем в качестве эквивалентной двухслойной приводит к значительной погрешности расчета для структур грунта типа  $A$ ,  $K$  и  $H$ .

3. Эквивалентирование структур грунта  $A$  и  $H$  с подстилающим слоем приводит к существенному занижению расчетных величин потенциала на ЗУ и напряжения прикосновения, что негативно сказывается на уровне электробезопасности.

The mathematical model of nonequipotential grounding connection of optional configuration for the computation of rated parameters with allowance for underlayer effect was suggested.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бургсдорф В.В., Якобс А.И. Заземляющие устройства электроустановок. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 400 с.
2. Линк И.Ю., Колиушко Д.Г., Колиушко Г.М. Математическая модель неэквипотенциального заземляющего устройства подстанции, размещенного в двухслойном грунте // Электрон. моделирование. — 2003. — 25, № 2. — С. 99—111.
3. Нестеров С.В. Математическая модель заземляющего устройства // Сб. докл. «Первая Российская конференция по заземляющим устройствам»: — 2002. — С. 45—50.
4. Нестеров С.В. Метод расчета заземляющих систем произвольной конфигурации в неоднородных грунтах: Дис. ... канд. техн. наук. — Новосибирск, 2005. — 128 с.
5. Зубов К.Н. Совершенствование расчетных методов молниезащиты и заземляющих устройств в неоднородных грунтах: Дис. ... канд. техн. наук. — Вологда, 2011. — 158 с.
6. Колиушко Д.Г., Руденко С.С. Электрическое поле точечного источника тока в земле с трехслойной структурой // Электрон. моделирование. — 2011. — 33, № 6. — С. 101—111.
7. Колиушко Д.Г., Руденко С.С. Аппроксимация функции, характеризующей трехслойную модель грунта, методом наименьших квадратов // Вісн. Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». «Техніка та електрофізика високих напруг». — 2011. — № 16. — С. 126—132.
8. Коструба С.И. Измерение электрических параметров земли и заземляющих устройств. — М. : Энергоатомиздат, — 1983. — 168 с.

Поступила 27.01.14

*КОЛИУШКО Денис Георгиевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. кафедры «Автоматизированные электромеханические системы» Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т». В 1996 г. окончил Харьковский государственный политехнический университет. Область научных исследований — диагностика заземляющих устройств объектов электроэнергетики.*

*РУДЕНКО Сергей Сергеевич, аспирант, мл. науч. сотр. научно-исследовательского и проектно-конструкторского ин-та «Молния» Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т». В 2010 г. окончил Национальный технический университет «Харьковский политехнический ин-т». Область научных исследований — математическое моделирование электромагнитных полей в неоднородных средах.*