УДК 517.5

Д.И. Морозов, канд. физ.-мат. наук
Национальний университет «Киево-Могилянская академия»
(Украина, 04655, Киев, ул. Г. Сковороди, 2,
тел. (063) 6128335, e-mail: denis.morozov178@gmail.com)

Применение *p*-адической модели в решении конечно-становой сопряженности кусочно-линейных сферически-транзитивных автоморфизмов корневого бинарного дерева

Использована *p*-адическая модель для решения конечно-становой сопряженности кусочно-линейных сферично-транзитивных автоморфизмов корневого бинарного дерева. Использование численных *p*-адических методов является технически удобным для работы с конечными автоматами.

Застосовано *p*-адичну модель для розв'язку скінченно-станової спряженості кусково-лінійних сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева. Використання чисельних *p*-адичних методів є технічно зручним для роботи зі скінченними автоматами.

Ключевые слова: автоморфизм, корневое дерево, изометрия, p-адический.

В 1980 г. была решена проблема Милнора существования групп промежуточного роста [1] и предложена группа, порожденная конечным множеством обратимых автоматов над конечным алфавитом, имеющая промежуточный рост. С подобными группами связана серия сложных проблем. Исследуем одну из них.

Группы обратимых автоматов над конечным алфавитом естественным образом представляются подгруппами автоморфизмов корневого однородного дерева. Для таких групп проблема конечно-становой сопряженности не решена [2], в отличие от проблемы общей сопряженности в группе автоморфизмов однородного корневого дерева, где решение получено на основании исследования изоморфности деревьев типа автоморфизмов, для которых проверяется сопряженность.

При решении данной проблемы естественным является постепенное расширение класса автоморфизмов корневого однородного дерева, для которых данная проблема решена. В качестве такого класса рассмотрим класс кусочно-линейных сферически-транзитивных автоморфизмов корневого бинарного дерева.

Для работы с автоморфизмами корневого бинарного дерева существует удобная техника представления их в виде изометрий кольца Z_2 целых 2-адических чисел. Определение корневого бинарного дерева состоит в следующем. Множество вершин дерева разбивается на подмножества вершин одного уровня:

а) v_0 — корень или вершина нулевого уровня;

б) для каждого $i = 0, 1, 2 \ldots$ дерево содержит 2^i вершин и ребер i-го уровня.

Введем отношение смежности: каждая вершина i-го уровня смежна с двумя вершинами (левой и правой) (i + 1)-го уровня. Координатизация ребер этого дерева происходит следующим образом: два смежных ребра, соединяющих вершину i-го уровня с двумя вершинами (i + 1)-го уровня, получают отметки 0 (левое) и 1 (правое). Номера уровней вершин являются инвариантными относительно действия группы автоморфизмов дерева T_2. Автоморфизм, действуя на T_2, индуцирует действие на всех поддеревьях дерева T_2, которое является самоподобным. Индуцированные действия автоморфизма на поддеревьях, изоморфных T_2, назовем состояниями данного автоморфизма.

Определение 1. Автоморфизм дерева T_2 называется конечно-становым, если множество его состояний — конечно. Такие автоморфизмы образуют группу $F\mathrm{Aut}\, T_2$.

Любой бесконечный путь без циклов, начинающийся в корне v_0, будем называть концом дерева. Такой путь координатизируется бесконечной влево последовательностью 0 и 1 описанным выше способом. Рассмотрим эту бесконечную двоичную последовательность, как 2-адическое число из соответствующего кольца Z_2.

Отождествляя координатизацию путей с двоичным разложением целых 2-адических чисел, получим представление автоморфизмов дерева T_2 функциями на Z_2. Каждому автоморфизму дерева соответствует функция f_α: если автоморфизм α переводит конец x в конец y, то $f_\alpha(x) = y$. Например, конечный автомат, задаваемый соотношениями $a = (id, a)s$, $id = (id, id)$ соответствует 2-адической изометрии $f(x) = x + 1$, которая имеет важное значение в теории вычислимости, поскольку является базовой примитивно-рекурсивной функцией.

Автоморфизмы, которым соответствуют линейные функции кольца Z_2, будем называть линейными. Исследование группы автоморфизмов корневого однородного дерева с помощью изометрий кольца целых p-адических чисел позволяет решать ряд проблем, связанных с этой группой.

Следует заметить, что проблема конечно-становой сопряженности в данной группе достаточно сложна, и существуют группы, порожденные конечными групповыми автоматами, для которых данная проблема неразрешима [2], в отличие, например, от проблемы сопряженности в группе невырожденных линейных операторов над полем. Эта проблема, как известно, эквивалентна нахождению жордановой нормальной формы данных операторов.

Рассмотрим решение проблемы конечно-становой спряженности для сферически-транзитивных кусочно-линейных автоморфизмов корневого бинарного дерева. При таком ограничении множества автоморфизмов существует эффективный алгоритм решения этой проблемы.

В [3] доказано следующее утверждение при условии, что $F\mathrm{Aut}\,T_2$ — группа конечно-становых автоморфизмов корневого бинарного дерева.

Лемма 1. $f(x)=p_1x+p_2\in F\mathrm{Aut}\,T_2 \Leftrightarrow p_1, p_2\in Z_2\bigcap Q$.

Теорема 1. Автоморфизмы $f(x)=(4k+1)x+(2t+1)\,(k,t\in Z_2)$ являются сферически-транзитивными.

Теорема 2. Изометрии $f_1(x) = (4k_1 + 1)x + 1$ и $f_2(x) = (4k_2 + 1)x + 1(k_1, k_2 \in Z_2^Q)$ сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2 \Leftrightarrow 4k_1+1=4k_2+1$.

Определение 2. Назовем конечно-становой сферически-транзитивный автоморфизм дерева T_2 0-полным, если образ действия его централизатора в $F\mathrm{Aut}\,T_2$ на 0 совпадает с множеством квазипериодических концов дерева T_2.

Необходимо обратить внимание на то, что для проверки конечно-становой сопряженности двух конечно-становых сферически-транзитивных автоморфизмов, из которых один является 0-полным, достаточно проверить конечно-становость решения уравнения спряженности, которое 0 переводит в 0.

Определение 3. Определим $\varphi\,(a)$ для сферически-транзитивного автоморфизма $a=(b,c)\circ\sigma$ в виде $\varphi\,(a) = bc$ и определим $\varphi^n(a)$, как n-ю итерацию $\varphi\,(a)$.

В [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть a, b — 0-полные сферически-транзитивные конечно-становые изометрии кольца Z_2. Изометрии a и b сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi^n(a)$ и $\varphi^n(b)$ сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2$ для некоторого $n\in N$.

Воспользуемся далее этими утверждениями. Согласно теореме 2 автоморфизмы $5x+1$ и $5x+3$ сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2$, а автоморфизмы $5x+1$ и $9x+1$ не сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2$. Но теорема 2 не позволяет ответить на вопрос, сопряжены ли, например, конечно-становые сферически-транзитивные автоморфизмы вида $(3x,15x+1)\circ\sigma$ и $(5x+2{,}9x+3)\circ\sigma$, или $(x,15x+1)\circ\sigma$ и $(3x,15x+1)\circ\sigma$ (запись $(3x,15x+1)\circ\sigma$ означает, что на левое поддерево дерева T_2 действует автоморфизм $f(x)=3x$, на правое поддерево — автоморфизм $g(x)=15x+1$ и что правое и левое поддеревья T_2 меняются местами).

Обобщим теорему 2 на класс конечно-становых кусочно-линейных сферически-транзитивных автоморфизмов.

Определение 4. Назовем автоморфизм дерева T_2 кусочно-линейным, если существует уровень дерева T_2, для которого все состояния этого уровня данного автоморфизма являются линейными.

Для использования теоремы 3 необходимы доказательства 0-полноты исследуемых классов автоморфизмов.

Лемма 2. Конечно-становая линейная сферически-транзитивная изометрия является 0-полной.

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$(((a-1)\,t+1)\,x+bt)\circ(ax+b)=a\,(((a-1)\,t+1)\,x+bt)+b=$$

$$=a\,((a-1)\,t+1)\,x+abt+b,$$

$$(ax+b)\circ(((a-1)t+1)\,x+bt=((a-1)\,t+1)(ax+b)+bt=$$

$$=a\,((a-1)\,t+1)\,x+b\,(a-1)\,t+b+bt=a\,((a-1)\,t+1)\,x+abt+b.$$

Следовательно, автоморфизм $((a-1)\,t+1)\,x+bt$ коммутирует с автоморфизмом $ax+b\,(a,b,t\in Z_2)$. Действительно, согласно лемме 1 при $a,b,t\in Z_2\bigcap Q$ автоморфизм $((a-1)\,t+1)\,x+bt$ является конечно-становым, т.е. принадлежит централизатору $C_{F\mathrm{Aut}\,T_2}(ax+b)$.

Согласно теореме 1, если автоморфизм $ax+b$ является сферически-транзитивным, то $a=4a'+1,\ b=2b'+1,\ a',b'\in Z_2$. Поскольку b — обратимый элемент кольца Z_2 и $0\cdot((4a't+1)\,x+(2b'+1)\,t)=(2b'+1)\,t$, а $4a't+1$ — обратимо для произвольного $t\in Z_2$ (при условии автоморфности $(4a't+1)\,x+$ $+(2b'+1)\,t)$), то $0*C_{F\ \mathrm{Aut}\,T_2}(ax+b)=Z_2\bigcap Q$. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $x*a$ действие автоморфизма a на конец дерева x.

Лемма 3. Конечно-становая изометрия a является 0-полной тогда и только тогда, когда $\varphi^n(a)$ является 0-полной для некоторого $n\in N$.

Доказательство. Для изометрии $a=(b,c)\circ\sigma$ справедливы следующие соотношения:

$$0*a^{2t}=2(0*\varphi\,(a)^t),\ \ 0*a^{2t+1}=2(0*\varphi\,(a)^t\,b)+1\,.$$

Итак, изометрия является 0-полной тогда и только тогда, когда $\varphi\,(a)$ является 0-полной. Применив полученное утверждение n раз, получим аналогичное утверждение для $\varphi^n(a)$.

Теорема 4. Конечно-становая кусочно-линейная сферически-транзитивная изометрия является 0-полной.

Доказательство. Для кусочно-линейной сферически-транзитивной изометрии a найдется $n\in N$ такое, что изометрия $\varphi^n(a)$ будет линейной. Согласно леммам 2 и 3 теорема 4 доказана.

Теорема 5. Два конечно-становых кусочно-линейных сферически-транзитивных автоморфизма сопряженны в $F\mathrm{Aut}\,T_2$ тогда и только тогда, когда в T_2 найдется уровень, для которого все автоморфизмы являются линейными, и произведения всех коэффициентов x равны для обоих автоморфизмов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование в кусочно-линейном автоморфизме уровня, для которого все автоморфизмы являются линейными, следует из определения кусочно-линейного автоморфизма. Согласно теореме 2 конечно-становые сферически-транзитивные автоморфизмы $ax+b$ и $cx+d$ сопряженны в $F\mathrm{Aut}\,T_2$ тогда и только тогда, когда $a=c$. Итак, согласно теоремам 3 и 4 получаем утверждение теоремы 5.

Рассмотрим пример применения теоремы 5. Кусочно-линейные сферически-транзитивные автоморфизмы $f(x)=(3x+1{,}3x)\circ\sigma$ и $g(x)=(9x+2{,}x+7)\circ\sigma$ согласно теореме 5 сопряжены в $F\mathrm{Aut}\,T_2$, поскольку $3\cdot 3=9\cdot 1$.

Выводы

Таким образом, предложенная 2-адическая модель конечно-становой сопряженности представляет собой удобную технику для работы с групповыми автоматами. Запись автомата в виде соответствующей 2-адической функции имеет более компактный вид, чем запись автомата в традиционном алгебраическом виде. Например, автомат, соответствующий функции $f(x)=5x+1$, задается соотношениями

$$a=(b,c)\circ\sigma,\ \ b=(b,d),\ \ c=(a,e)\circ\sigma,\ \ d=(a,c),\ \ e=(d,a)\,.$$

Сформулированный и доказанный критерий сопряженности конечно-становых сферически-транзитивных кусочно-линейных изометрий, а также описание классов сопряженности конечно-становых сферически-транзитивных кусочно-линейных изометрий могут быть использованы при дальнейшем исследовании вопроса конечно-становой сопряженности в $F\mathrm{Aut}\,T_2$.

The p-adic model was used for solving the finite-state conjugacy of the piecewise-linear spherical-transitive automorphism of the binary rooted tree. The use of numerical p-adic methods provides a convenient technique for working with finite-state automata.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы// Тр. МИАН. «Динамические системы, автоматы и бесконечные группы».Т.231. — М. : Наука, 2000. — С. 134—214.

2. *Sunic Z., Ventura E.* The conjugacy problem in automaton groups is not solvable. [Электрон. ресурс]. — Режим доступа: arXiv:1010.1993[math.GR], 11 May 2012 .
3. *Морозов Д.І.* Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченно-станових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева// Вісн. Київського ун-ту. Серія : фізико-математичні науки. — 2008. — Вип. № 1. — С. 40— 43.
4. *Морозов Д.І.* Скінченно-станова спряженість сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.// Науковий часопис НПУ Драгоманова. Вісн. Київського ун-ту. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2013. — № 12. — С. 5—12.

Поступила 06.12.13;
после доработки 24.12.13

МОРОЗОВ Денис Иванович, канд. физ.-мат. наук, докторант, преподаватель кафедры математики Национального университета «Киево-Могилянская академия». В 2001 г. окончил Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко. Область научных исследований — теория групп, теория автоматов, р-адический анализ.