УДК 536.24

В.И. Гаврыш, канд. физ.-мат. наук
Национальний университет «Львовская политехника»,
(Украина, 79013, Львов, ул. С. Бандеры, 12,
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

Моделирование температурных режимов в кусочно-однородных элементах электронных устройств со сквозными тепловыделяющими инородными включениями

С использованием обобщенных функций получено уравнение теплопроводности с разрывными и сингулярными коэффициентами для изотропной многослойной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, которая содержит инородное сквозное тепловыделяющее включение. С использованием кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях включения и интегрального преобразования Фурье построено численно-аналитическое решение задачи теплопроводности с граничными условиями второго рода. Выполнен численный анализ для однослойной бесконечной пластины со сквозным тепловыделяющим включением.

За узагальненими функціями отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для ізотропної безмежної багатошарової пластини з теплоізольованими лицевими поверхнями, яка містить чужорідне наскрізне теплоактивне включення. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межових поверхнях включення та інтегрального перетворення Фур'є знайдено аналітично-числовий розв'язок задачі теплопровідності з крайовими умовами другого роду. Виконано числовий аналіз для одношарової безмежної пластини з наскрізним включенням, що виділяє тепло.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, стационарная краевая задача, изотропная пластина, инородное включение, идеальный тепловой контакт.

Важное значение для производства микроэлектронных устройств имеют композитные материалы, среди которых особое место занимают кусочно-однородные структуры (слоистые, однородные и слоистые с инородными включениями), которые широко применяются в интегральных сенсорах для мониторинга температуры и влажности, светоизлучающих элементах для динамических светодиодных подсветок, температурных преобразователях и др. Поскольку указанные структуры и в процессе производства, и при эксплуатации подвергаются температурному воздействию в широком диапазоне, что приводит к образованию структурных дефектов, при прогнозировании надежности устройств важной проблемой является определение температурных полей и их градиентов. В связи с этим возникла необходимость построения новых линейных математических моделей процесса теплопроводности для слоистых тел с инородными сквозными тепловыделяющими включениями и разработки эффективных методов решения возникающих при этом линейных граничных задач теплопроводности.

В работах [1, 2] приведены некоторые методы решения линейных граничных задач теплопроводности для однородных тел. В работе [3] сформулирована задача стационарной теплопроводности для слоистых пластин постоянной и переменной толщины в пространственной постановке. Методом начальных функций трехмерная задача сведена к двумерной. Для пластины со слоями переменной толщины получена система уравнений с переменными коэффициентами. Проанализированы полученные двумерные краевые задачи. Для пластин с однородными слоями постоянной толщины построено решение в аналитической форме. Показано, что это решение совпадает с решением, полученным методом разделения переменных.

В работе [4] построено внешнее асимптотическое разложение решения задачи нестационарной теплопроводности для слоистых анизотропных неоднородных пластин с граничными условиями второго рода на лицевых поверхностях. Проанализированы полученные двумерные решающие уравнения и исследованы асимптотические свойства решений задачи теплопроводности. Получены оценки точности, с которой температура в пластине за предельным слоем считается кусочно-линейной или кусочно-квадратичной, распределенной по толщине слоистой конструкции. Приведено физическое обоснование некоторых особенностей асимптотического разложения температуры.

Работы [5—10] посвящены развитию методов решения стационарных линейных задач теплопроводности с теплоотдачей для конструкций двумерной кусочно-однородной структуры. В работах [11,12] приведены общие уравнения теплопроводности для кусочно-однородных тел.

Рассмотрим линейную математическую модель стационарного процесса теплопроводности для отдельных элементов микроэлектронных устройств, представленных в виде изотропной многослойной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, имеющей сквозное инородное тепловыделяющее включение, используя методику решения задачи теплопроводности с граничными условиями второго рода.

Постановка задачи. Изотропная (относительно теплофизических параметров) многослойная бесконечная пластина, отнесенная к прямо-

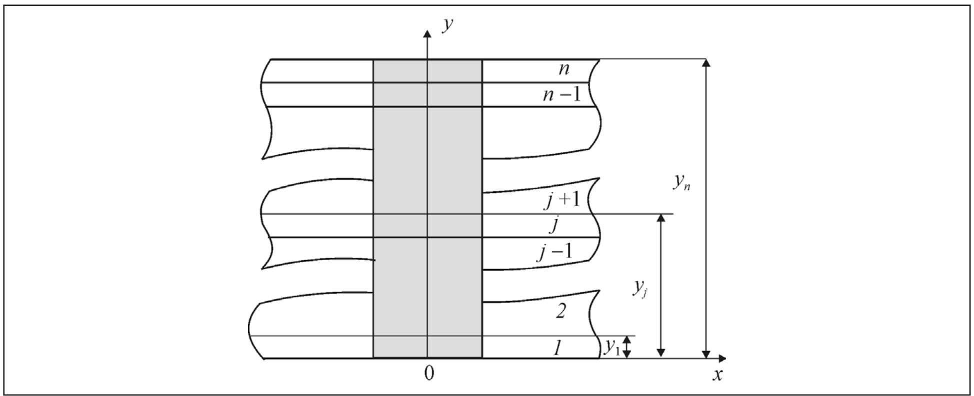

Рис.1. Сечение изотропной многослойной бесконечной пластины с инородным сквозным тепловыделяющим включением плоскостью $z = 0$: *1*, *2* — слои пластины

угольной системе координат *Oxyz* с теплоизолированными лицевыми поверхностями $|z| = \delta$, имеет инородное сквозное включение, в области $\Omega_0 = \{(x,\, y,\, z): |x| \le h, 0 \le y \le y_n, |z| \le \delta\}$ которого действуют равномерно распределенные внутренние источники тепла мощностью $q_0 = \text{const}$. На граничных поверхностях $K_0 = \{(x,\, 0,\, z): |x| < \infty,\ |z| \le \delta\}$, $K_n = \{(x,\, y_n,\, z): |x| < \infty,$ $|z| \le \delta\}$ пластины заданы краевые условия второго рода, а на поверхностях сопряжения $K_j = \{(x,\, y_j,\, z): |x| > h,\ |z| \le \delta\}$ $(j = \overline{1, n-1})$ разнородных слоев пластины, где y_j — толщина *j*-го слоя, и граничных поверхностях $K_\pm = \{(\pm h, y, z):\ 0 \le |y| \le y_n, |z| \le \delta\}$ включения осуществляется идеальный тепловой контакт (рис. 1).

Математическая модель задачи. Стационарное температурное поле $t(x, y)$ в приведенной системе находим в результате решения уравнения теплопроводности [11, 12]

$$\operatorname{div}[\lambda(x,\, y)\operatorname{grad}\theta] = -q_0 S_-(h - |x|) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\theta\Big|_{|x|\to\infty} = 0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty} = \frac{\partial\theta}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial\theta}{\partial y}\Big|_{y=y_n} = 0, \tag{2}$$

где $\lambda(x, y)$ — коэффициент теплопроводности многослойной бесконечной пластины,

$$\lambda(x, y) = \sum_{j=1}^{n} [\lambda_j + (\lambda_0 - \lambda_j)\, S_-(h - |x|)]\, N(y, y_{j-1})\,; \tag{3}$$

λ_j и λ_0 — коэффициенты теплопроводности материалов соответственно *j*-го слоя пластины и включения; $\theta = t - t_c$ — избыточная температура; t_c —

температура внешней среды; $N(y, y_{j-1}) = S_+(y - y_{j-1}) - S_+(y_{j-1})$; $y_0 = 0$; $S_\pm(\zeta)$ — асимметрические единичные функции [13],

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Введем функцию

$$T = \lambda(x, y)\theta \tag{4}$$

и продифференцируем ее по переменным x и y с учетом (3). В результате получим

$$\lambda(x, y)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} + \theta\big|_{|x|=h}\delta_+(|x| - h)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0 - \lambda_j)\, N(y, y_{j-1}),$$

$$\lambda(x, y)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)\,\theta\big|_{y=y_j}\delta_+(y - y_j)\,. \tag{5}$$

Здесь $\delta_\pm(\zeta) = \dfrac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$ — асимметрические дельта-функции Дирака [13]. Подставив (5) в соотношение (1), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных с разрывными и сингулярными коэффициентами

$$\Delta T + \theta\big|_{|x|=h}\delta'_+(|x| - h)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0 - \lambda_j)\, N(y, y_{j-1}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)\,\theta\big|_{y=y_j}\delta'_+(y - y_j) = -q_0 S_-(h - |x|), \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Решение граничной задачи теплопроводности. Аппроксимируем функцию $\theta(\pm h, y)$ в виде

$$\theta(\pm h, y) = \theta_1^{(\pm jh)} + \sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(\pm jh)} - \theta_k^{(\pm jh)})\, S_-(y - y_k^{(j)^*})\,, \tag{7}$$

где $y_k^{(j)^*} \in\,]y_{j-1}, y_j[$; $y_1^{(j)^*} \le y_2^{(j)^*} \le \ldots \le y_{m-1}^{(j)^*}$; m — число разбиений интервала $]y_{j-1}, y_j[$; $\theta_k^{(\pm jh)}$ $(k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ — неизвестные аппроксимирующие значения. Подставив (7) в уравнение (6), получим

$$\Delta T - \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\,\theta\big|_{y=y_j} \delta'_+(y-y_j) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_j)[\delta'_+(x-h)(\theta_1^{(jh)} N(y, y_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(jh)} - \theta_k^{(jh)})\, N(y, y_k^{(j)^*}, y_j)) - \delta'_-(x+h)(\theta_1^{(-jh)} N(y, y_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(-jh)} - \theta_k^{(-jh)})\, N(y, y_k^{(j)^*}, y_j))] - q_0 S_-(h-|x|), \tag{8}$$

где $N(y, y_k^{(j)^*}, y_j) = S_-(y - y_k^{(j)^*}) - S_+(y - y_j)$.

Применив интегральное преобразование Фурье по координате x к уравнению (8) и граничным условиям (2) с учетом (4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dy^2} - \xi^2 \overline{T} = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\,\overline{\theta}\big|_{y=y_j} \delta'_+(y-y_j) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ i\xi \sum_{j=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_j)[e^{i\xi h}(\theta_1^{(jh)} N(y, y_{j-1}) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(jh)} - \theta_k^{(jh)})\, N(y, y_k^{(j)^*}, y_j)) - e^{-i\xi h}(\theta_1^{(-jh)} N(y, y_{j-1}) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(-jh)} - \theta_k^{(-jh)})\, N(y, y_k^{(j)^*}, y_j))] + \frac{2q_0}{\xi} \sin \xi h \right\} \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=0} = \left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=y_n} = 0, \tag{10}$$

где $\overline{T}$ — трансформанта функции T, $\overline{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} T dx$; ξ — параметр интегрального преобразования Фурье; $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Решив уравнение (9), получим

$$\overline{T}=C_1 ch\xi y+C_2 sh\xi y+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\,\overline{\theta}\,(\xi,y_j)\,ch\xi\,(y-y_j)\,S_+(y-y_j)+$$

$$+\frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}}\Bigg\{i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_j)[e^{i\xi h}(\theta_1^{(jh)}(\,ch\xi\,(y-y_j)\,S_+(y-y_j)-$$

$$-ch\xi\,(y-y_{j-1})\,S_+(y-y_{j-1})+N\,(y,y_{j-1}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(jh)}-\theta_k^{(jh)})(ch\xi\,(y-y_j)\,S_+(y-y_j)-ch\xi\,(y-y_k^{(j)^*})\,S_-(y-y_k^{(j)^*})+$$

$$+N\,(y,y_k^{(j)^*},y_j)))-e^{-i\xi h}(\theta_1^{(-jh)}(\,ch\xi\,(y-y_j)\,S_+(y-y_j)-$$

$$-ch\xi\,(y-y_{j-1})\,S_+(y-y_{j-1})+N(y,y_{j-1}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(-jh)}-\theta_k^{(-jh)})(\,ch\xi\,(y-y_j)\,S_+(y-y_j)-ch\xi\,(y-y_k^{(j)^*})\,S_-(y-y_k^{(j)^*})+$$

$$+N\,(y,y_k^{(j)^*},\,y_j)))]+\frac{2q_0}{\xi^2}\sin\xi h\Bigg\},\qquad(11)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Величины $\overline{\theta}\,(\xi,y_j)$ $(j=\overline{1,n-1})$ определяем, решив систему линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_s\overline{\theta}\,(\xi,y_s)=C_1 ch\xi y_s+C_2 sh\xi y_s+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\,\overline{\theta}\,(\xi,y_j)\,ch\xi\,(y_s-y_j)\times$$

$$\times S_+(y_s-y_j)+\frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}}\Bigg\{i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_j)[e^{i\xi h}(\theta_1^{(jh)}(\,ch\,\xi(y_s-y_j)\,S_+(y_s-y_j)-$$

$$-ch\,\xi(y_s-y_{j-1})\,S_+(y_s-y_{j-1})+N(y_s,y_{j-1}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(jh)}-\theta_k^{(jh)})(ch\xi\,(y_s-y_j)\,S_+(y_s-y_j)-$$

$$-ch\xi\,(y_s-y_k^{(j)^*})\,S_-(y_s-y_k^{(j)^*})+N\,(y_s,y_k^{(j)^*},\,y_j)))-$$

$$-e^{-i\xi h}(\theta_1^{(-jh)}(\,ch\xi\,(y_s-y_j)\,S_+(y_s-y_j)-ch\,\xi(y_s-y_{j-1})\,S_+(y_s-y_{j-1})+$$

$$+N\,(y_s,y_{j-1}))+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(-jh)}-\theta_k^{(-jh)})(\,ch\xi\,(y_s-y_j)\,S_+(y_s-y_j)-$$

$$-ch\xi\,(y_s-y_k^{(j)^*})\,S_-(y_s-y_k^{(j)^*})+N\,(y_s,y_k^{(j)^*},\;y_j)))]+\frac{2q_0}{\xi^2}\sin\xi h\Bigg\}$$

в виде

$$\overline{\theta}\,(\xi,y_s)=c_1F_s^c(\xi)+c_2F_s^s(\xi)+$$

$$+\frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}}\Bigg\{i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_j)[e^{i\xi h}(\theta_1^{(jh)}\varphi_s^{(j)}(\xi)+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(jh)}-\theta_k^{(jh)})\,\psi_{sk}^{(j)}(\xi))-$$

$$-e^{-i\xi h}(\theta_1^{(-jh)}\varphi_s^{(j)}(\xi)+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(-jh)}-\theta_k^{(-jh)})\,\psi_{sk}^{(j)}(\xi))]+\frac{2q_0}{\xi^2}\,\Phi_s(\xi)\Bigg\},\;\; s=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

где

$$F_1^c(\xi)=\frac{ch\,\xi y_1}{\lambda_1};\; F_r^c(\xi)=\frac{1}{\lambda_r}\left[ch\xi y_r+\sum_{\beta=1}^{r-1}(\lambda_{\beta+1}-\lambda_\beta)\,ch\xi\,(y_r-y_\beta)\,F_\beta^c(\xi)\right];$$

$$F_1^s(\xi)=\frac{sh\,\xi y_1}{\lambda_1};\; F_r^s(\xi)=\frac{1}{\lambda_r}\left[sh\xi y_r+\sum_{\beta=1}^{r-1}(\lambda_{\beta+1}-\lambda_\beta)\,sh\xi\,(y_r-y_\beta)\,F_\beta^s(\xi)\right];$$

$$\varphi_1^{(j)}(\xi)=\frac{1-ch\,\xi y_1}{\lambda_1};\; \varphi_r^{(j)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_r}\,[ch\xi\,(y_r-y_j)-ch\xi\,(y_{r-1}-y_{j-1})+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{r-1}(\lambda_{\beta+1}-\lambda_\beta)\,ch\xi\,(y_r-y_\beta)\,\varphi_\beta^{(j)}(\xi)];$$

$$\psi_{1k}^{(j)}(\xi)=\frac{ch\xi\,(y_1-y_j)-ch\xi\,(y_1-y_k^{(j)^*})}{\lambda_1};$$

$$\psi_{rk}^{(j)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_r}\,[ch\xi\,(y_r-y_j)-ch\xi\,(y_r-y_k^{(j)^*})+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{r-1}(\lambda_{\beta+1}-\lambda_\beta)\,ch\xi\,(y_r-y_\beta)\,\psi_{\beta k}^{(j)}(\xi)];$$

$$\Phi_1(\xi)=\frac{1}{\lambda_1};\; \Phi_r(\xi)=\frac{1}{\lambda_r}\sum_{\beta=1}^{r-1}(\lambda_{\beta+1}-\lambda_\beta)\,ch\xi\,(y_r-y_\beta)\,\Phi_\beta(\xi),\;\; r=\overline{2,n-1}\,.$$

Из граничных условий (10) находим постоянные интегрирования:

$$C_1=\Delta_1/\Delta_*,\quad C_2=0\,. \tag{13}$$

Здесь

$$\Delta_* = sh\xi y_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) F_j^c(\xi)\, sh\xi(y_n - y_j); \;\; \Delta_1 = -\frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}} \Delta_1^*,$$

где

$$\Delta_1^* = i \sum_{j=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_j) \{ e^{i\xi h} [\theta_1^{(jh)} (sh\xi(y_n - y_j) - sh\xi(y_n - y_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \varphi_l^{(j)}(\xi)\, sh\xi(y_n - y_l)) + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(jh)} - \theta_k^{(jh)})(sh\xi(y_n -$$

$$- y_j) - sh\xi(y_n - y_k^{(j)^*}) + \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \psi_{lk}^{(j)}(\xi)\, sh\xi(y_n - y_l))] -$$

$$- e^{-i\xi h} [\theta_1^{(-jh)} (sh\xi(y_n - y_j) - sh\xi(y_n - y_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \varphi_l^{(j)}(\xi)\, sh\xi(y_n - y_l)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(-jh)} - \theta_k^{(-jh)})(sh\,\xi(y_n - y_j) - sh\xi(y_n - y_k^{(j)^*}) + \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} -$$

$$- \lambda_l) \psi_{lk}^{(j)}(\xi)\, sh\xi(y_n - y_l))] \} + \frac{2q_0}{\xi^2} \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \Phi_j(\xi)\, sh\xi(y_n - y_j).$$

Применив к выражению (11) обратное интегральное преобразование Фурье, с учетом (12), (13) получим

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_j) [\sin\xi(x-h)(\theta_1^{(jh)} (ch\xi(y - y_j) S_+(y - y_j) - \right.$$

$$- ch\xi(y - y_{j-1}) S_+(y - y_{j-1}) + N(y, y_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \varphi_l^{(j)}(\xi)\, ch\xi(y - y_l) S_+(y - y_l) - \frac{ch\xi y}{\Delta_*} (sh\xi(y_n - y_j) -$$

$$- sh\xi(y_n - y_{j-1}) + \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \varphi_l^{(j)}(\xi)\, sh\xi(y_n - y_l))) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(jh)} - \theta_k^{(jh)})(ch\xi(y - y_j) S_+(y - y_j) - ch\xi(y - y_k^{(j)^*}) S_+(y - y_k^{(j)^*}) +$$

$$+N(y,y_k^{(j)^*},y_{j-1})+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\Psi_{lk}^{(j)}(\xi)\,ch\xi(y-y_l)S_+(y-y_l)-$$

$$-\frac{ch\xi y}{\Delta_*}(sh\xi(y_n-y_j)-sh\xi(y_n-y_k^{(j)^*})+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\Psi_{lk}^{(j)}(\xi)\,sh\xi(y_n-y_l))))-$$

$$-\sin\xi(x+h)(\theta_1^{(-jh)}(ch\xi(y-y_j)S_+(y-y_j)-ch\xi(y-y_{j-1})S_+(y-y_{j-1})+$$

$$+N(y,y_{j-1})+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\varphi_l^{(j)}(\xi)\,ch\xi(y-y_l)S_+(y-y_l)-$$

$$-\frac{ch\,\xi y}{\Delta_*}(sh\xi(y_n-y_j)-sh\xi(y_n-y_{j-1})+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\varphi_l^{(j)}(\xi)\,sh\xi(y_n-y_l)))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(-jh)}-\theta_k^{(-jh)})(ch\,\xi(y-y_j)S_+(y-y_j)-ch\,\xi(y-y_k^{(j)^*})S_+(y-y_k^{(j)^*})+$$

$$+N(y,y_k^{(j)^*},y_{j-1})+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\Psi_{lk}^{(j)}(\xi)\,ch\xi(y-y_l)S_+(y-y_l)-$$

$$-\frac{ch\xi y}{\Delta_*}(sh\xi(y_n-y_j)-sh\xi(y_n-y_k^{(j)^*})+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\Psi_{lk}^{(j)}(\xi)\,sh\xi(y_n-y_l))))]+$$

$$+\frac{2q_0}{\xi^2}\sin\xi h\cos\xi x\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\Phi_j(\xi)\,ch\xi(y-y_j)S_+(y-y_j)-\right.$$

$$\left.-\frac{ch\,\xi y}{\Delta_*}\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\Phi_j(\xi)\,sh\xi(y_n-y_j)\right]\Bigg\}d\xi\,. \qquad (14)$$

Неизвестные аппроксимирующие значения температуры $\theta_k^{(\pm jh)}$ $(k=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n})$ находим, решив систему $2\,n\,m$ линейных алгебраических уравнений, полученную из выражения (14).

Итак, искомое температурное поле в многослойной бесконечной пластине со сквозным тепловыделяющим включением описывает формула

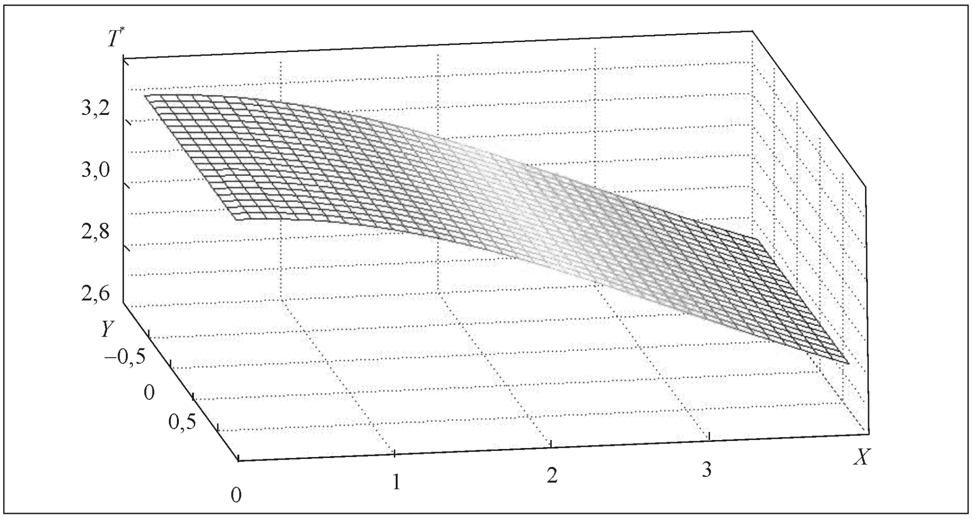

Рис. 2. Зависимость безразмерной температуры T^* от безразмерных координат X и Y

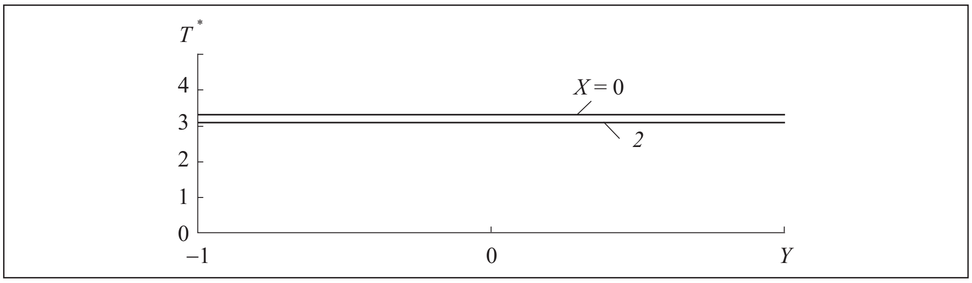

Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры T^* от безразмерной координаты Y

(14), из которой получаем значение температуры в произвольной точке пластины (в ее разнородных слоях, в области включения и на граничных поверхностях разнородных слоев).

Пример и анализ численных результатов. Рассмотрим бесконечную пластину со сквозным инородным включением, для которой выполнен численный анализ безразмерной избыточной температуры $T^* = T/(q_0 h^2)$ при таких исходных данных: материал пластины — керамика ВК94-I, $(\lambda_1 = 13{,}4 W/(m \times K)$; материал включения — серебро $(\lambda_0 = 419 W/(m \times K)$; $n = 10$ — число разбиений интервала $]0, Y_1[$; $Y_1 = y_1/h = 1$.

На рис. 2 представлена зависимость температуры T^* от безразмерных $X = x/h$ и $Y = y/h$ координат. Как видим, температура достигает максимума в области действия равномерно распределенных в инородном включении внутренних источников тепла.

На рис. 3 показано изменение температуры T^* в зависимости от координаты Y при различных значениях X. Как видно из рис. 3, температура изменяется линейно и практически постоянна для указанных значений X. При этом различие между ее значением в области включения ($X = 0$) и в пластине вне его ($X = 2$) несущественное, что соответствует предложенной математической модели.

Выводы

Полученное с помощью интегрального преобразования Фурье численно-аналитическое решение (14) граничной задачи теплопроводности (1), (2) позволяет в произвольной точке рассматриваемой структуры вычислять значения температуры на основе разработанного алгоритма и программных средств, прогнозировать режимы работы отдельных элементов электронных устройств и идентифицировать неизвестные параметры, что способствует повышению термопрочности и увеличивает срок их эксплуатации.

A heat equation with discontinuous and singular coefficients for an isotropic multi-layer plate with thermally insulated surfaces which contains a heat-generating foreign through inclusion has been deduced with the use of generalized functions. A numerical-analytical solution for the heat equation with boundary conditions of the second kind has been constructed using a piecewise linear approximation of the temperature on the boundary surfaces of the inclusion and Fourier integral transform. The numerical analysis of a single-layer infinite plate with a through heat-generating inclusion has been made.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Н.В., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. Ч. I. — М. : Высш. шк., 1982. — 327 с.
2. *Немировский Ю. В., Янковский А.П.* Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций //Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — **51**, № 2. — С. 222—238.
3. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Асимптотический анализ задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях первого и третьего рода на лицевых поверхностях // Там же. — 2007. — **50**, № 2. — С. 160—175.
4. *Havrysh V.I., Kosach A.I.* Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion // Materials Science. — 2012. — **47**, № 6. — P. 773—782.
5. *Havrysh V.I., Fedasyuk D.V., Kosach A.I.* Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion // Ibid. — 2011. — **46**, № 5. — P. 702—708.
6. *Gavrysh V.I.* Thermal state modelling in thermosensitive elements of microelectronic devices with reach-through foreign inclusions // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. — 2012. — **15,** № 3. — P. 247—251.
7. *Gavrysh V.* Modelling the temperature conditions in the three-dimensional piecewise homogeneous elements of microelectronic devices // Ibid. — 2011. — **14**, № 4. — P. 478—482.

8. *Гаврыш В.И.* Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями//Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 4.— С. 99—107.
9. *Гаврыш В.И.,Косач А.И.* Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. — 2011. — № 1—2 (90). — С. 27—30.
10. *Fedasyuk D., Gavrysh V.* Modelling of temperature conditions in electrical devices of inhomogeneous structure // Computational Problems of Electrical Engineering. — 2012. — **2**, № 1. — P. 25—28.
11. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
12. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977. — 720 с.

Поступила 14.10.13

ГАВРЫШ Василий Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский госуниверситет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры, разработка методов решения линейних и нелинейных граничных задач теплопроводности.