
УДК 681.3.057:518.12

Н.Л. Костьян

Киевский национальный университет технологий и дизайна
(Украина, 01011, Киев, ул. Немировича-Данченко, 2,
тел. 047 2640043, e-mail: friit_ikt@uke.net),

О.А. Наконечная

Восточноевропейский университет экономики и менеджмента
(Украина, 18028, Черкассы, ул. Чиковани, 17,
тел. 067 4705750, e-mail: nakonechnaya@ukr.net)

Метод аналитического представления экспериментальных зависимостей

Рассмотрен метод получения аналитического выражения функций времени посредством представления экспериментально полученных данных в виде решения однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Достигнуто повышение точности аппроксимации при использовании метода нахождения псевдообратной матрицы.

Розглянуто метод отримання аналітичного виразу функцій часу засобами представлення експериментально отриманих даних у вигляді розв'язку однорідного лінійного різницевого рівняння з постійними коефіцієнтами. Досягнуто підвищення точності апроксимації при використанні методу знаходження псевдооберненої матриці.

К л ю ч е в ы е с л о в а : аппроксимация, z-преобразование, однородное линейное разностное уравнение, псевдообратная матрица.

В теоретических исследованиях и практических разработках при решении многих задач динамики требуются аналитические выражения зависимостей, т.е. функций времени, представленных дискретными значениями (таблицами), полученными экспериментально или в результате расчетов. Как правило, такие зависимости регистрируются на выходах физических объектов, в том числе различных измерительных приборов или других технических устройств. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможное представление экспериментальных зависимостей в виде решений дифференциальных уравнений как динамических моделей широкого класса физических объектов. Такой подход является основой многих методов идентификации в задачах динамики.

Постановка задачи. Будем рассматривать непрерывные, ограниченные по модулю функции времени, полученные в результате эксперимента

© Н.Л. Костьян, О.А. Наконечная, 2013

или расчета. При этом воспользуемся соответствующими положениями теории динамических систем [1, 2], согласно которым всякую непрерывную, ограниченную по модулю, функцию времени можно с наперед заданной точностью аппроксимировать интегралом однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на конечном отрезке $t_0 \leq t \leq t_k$ или на всей полуоси $0 \leq t \leq +\infty$, если функция стремится к пределу при $t \rightarrow +\infty$. Можно показать, что эти положения справедливы для дискретных значений функции в равноотстоящих точках в случае представления зависимостей решениями однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\bar{f}^{(n)}(t) + \bar{a}_{n-1} \bar{f}^{(n-1)}(t) + \dots + \bar{a}_1 \bar{f}'(t) + \bar{a}_0 \bar{f}(t) = 0. \quad (1)$$

Пусть r_1, r_2, \dots, r_ν — корни его характеристического уравнения кратности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид $\bar{f}(t) = \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{c}_{i0} + \bar{c}_{i1}t + \dots + \bar{c}_{i,\mu_i-1}t^{\mu_i-1}) e^{r_i t}$, где \bar{c}_{ij} — произвольные постоянные.

Теперь рассмотрим однородное линейное разностное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$f[(k+n)T] + a_{n-1}f[(k+n-1)T] + \dots + a_1f[(k+1)T] + a_0f(kT) = 0 \quad (2)$$

такое, что корни его характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = e^{r_1 T}$, $\lambda_2 = e^{r_2 T}$, ..., $\lambda_\nu = e^{r_\nu T}$, а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$ — кратность этих корней. Общее решение уравнения (2) имеет следующий вид:

$$f(kT) = \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{c}_{i0} + \bar{c}_{i1}t + \dots + \bar{c}_{i,\mu_i-1}t^{\mu_i-1}) e^{r_i t}, \quad (3)$$

где \bar{c}_{ij} — произвольные постоянные. Если $f(kT) = \bar{f}(kT)$ при $k=0, 1, 2, \dots$, а $f(t)$ — аппроксимирующая функция для некоторой функции $\varphi(t)$, то и $f(kT)$ будет аппроксимирующей функцией для $\varphi(t)$ с такой же погрешностью аппроксимации в точках $t = kT$.

При представлении какой-либо функции интегралом дифференциального уравнения возникают трудности, связанные с тем, что неизвестны значения производных при $t=0$, являющиеся начальными условиями. В случае использования решения разностного уравнения n -го порядка начальными условиями являются известные значения аппроксимирующей функции при $t = kT$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Представление функции в виде решения разностного уравнения.

Подвергнем уравнение (2) z -преобразованию. Обозначим $F(z)$ изображение решения $f(kT)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям

$$f(0) = f_0, f(T) = f_1, f(2T) = f_2, \dots, f[(n-1)T] = f_{n-1}. \quad (4)$$

Используя теорему сдвига и теорему линейности, получаем

$$F(z)z^n - f_0z^n - f_1z^{n-1} - \dots - f_{n-2}z^2 - f_{n-1}z + a_{n-1}[F(z)z^{n-1} - f_0z^{n-1} - f_1z^{n-2} - \dots - f_{n-2}z] + \dots + a_1[F(z)z - f_0z] + a_0F(z) = 0.$$

Группируя члены уравнения по степеням z и решая его относительно $F(z)$, находим

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_{n-(i+1)} z^{n-i}}{\sum_{j=0}^n a_{n-j} z^{n-j}}, \quad a_n = 1, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= f_0, \\ b_{n-2} &= f_1 + a_{n-1}f_0, \\ b_{n-3} &= f_2 + a_{n-1}f_1 + a_{n-2}f_0, \\ &\dots \\ b_0 &= f_{n-1} + a_{n-1}f_{n-2} + a_{n-2}f_{n-3} + \dots + a_1f_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (5) устанавливает связь между изображением $F(z)$ решения $f(kT)$ и коэффициентами a_{n-1}, \dots, a_0 уравнения (3), а также между $F(z)$ и начальными условиями (4).

Согласно определению z -преобразования изображение функции $f(kT)$ можно также представить в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad (7)$$

где $f_k = f(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Разделив числитель и знаменатель дроби (5) на z^n и приравняв ее правой части выражения (7), получим

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} z^{-j} \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-(i+1)} z^{-i}.$$

Умножая степенные ряды в левой части, находим

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} z^{-j} \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = \sum_{q=0}^{\infty} c_q z^{-q}, \tag{8}$$

$$c_q = \sum_{s=0}^q a_{n-s} f_{q-s}, \quad a_{n-s} \equiv 0, \quad s > n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_{n-(i+1)} z^{-i} = \sum_{q=0}^{\infty} c_q z^{-q}.$$

Поскольку результат суммирования не зависит от обозначения переменной, в правой части полученного равенства можно заменить букву q буквой i . Приравнявая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях z и принимая $b_{n-(i+1)} \equiv 0$ для $n-(i+1) < 0$, т.е. для $i \geq n$, с учетом (8) окончательно получаем

$$b_{n-(i+1)} = \sum_{s=0}^i a_{n-s} f_{i-s}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где $b_{n-(i+1)} \equiv 0, i \geq n; a_{n-s} \equiv 0, s > n; f_{i-s}$ — значения функции $f(kT)$ при $k = i-s$. Придавая i последовательно значения

$$\underbrace{i=0, 1, 2, \dots, n-1}_n, \quad \underbrace{n, n+1, \dots, n+m-1}_m, \quad m \geq n,$$

получаем $n + m$ таких соотношений:

$$\begin{aligned} i=0, \quad b_{n-1} &= f_0, \\ i=1, \quad b_{n-2} &= f_1 + a_{n-1} f_0, \\ &\dots \dots \dots \tag{9} \\ i=n-1, \quad b_0 &= f_{n-1} + a_{n-1} f_{n-2} + \dots + a_1 f_0; \\ i=n, \quad 0 &= f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \dots + a_1 f_1 + a_0 f_0, \\ i=n+1, \quad 0 &= f_{n+1} + a_{n-1} f_n + \dots + a_1 f_2 + a_0 f_1, \\ &\dots \dots \dots \\ i=2n-1, \quad 0 &= f_{2n-1} + a_{n-1} f_{2n-2} + \dots + a_1 f_n + a_0 f_{n-1}, \tag{10} \end{aligned}$$

этого изображения и будет аппроксимирующей функцией $f(t)$. Обе функции будут совпадать при $2n$ значениях аргумента $t = 0, T, 2T, \dots, (2n - 1) T$. Однако в интервалах между точками разбиения могут быть значительные отклонения аппроксимирующей функции от заданной.

Для повышения точности аппроксимации во всех точках отрезка аппроксимации можно использовать один из методов наилучшего приближения. Для этого рассмотрим общий случай (11), когда $m > n$. Как и ранее, разобьем отрезок аппроксимации на $n + m - 1$ равных частей и определим значения функции $f(t)$ в точках разбиения $f_0, f_1, \dots, f_{n+m-1}$. Теперь система (11) является несовместной и может иметь бесчисленное множество решений. В теории матриц доказано [2], что такая система всегда имеет одно и только одно наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов), которое определяется по формуле

$$a^0 = F^+ f, \quad (13)$$

где F^+ — псевдообратная матрица для прямоугольной $m \times n$ -матрицы F .

Таким образом, вычислив псевдообратную матрицу F^+ и умножив ее на столбец f , найдем столбец коэффициентов $a = (a_{n-1}^0, \dots, a_0^0)$, являющийся наилучшим приближенным решением системы (11). Вычислив, далее, по формулам (9) коэффициенты b_{n-1}^0, \dots, b_0^0 , построим изображение (5). Оригинал $f^0(t)$ этого изображения есть наилучшее приближение (по методу наименьших квадратов) к заданной функции $f(t)$. Если все полюсы $F(z)$ простые (этот случай представляет наибольший практический интерес), то аппроксимирующая функция будет суммой членов вида $Ae^{\lambda(kT)}, e^{\alpha(kT)} [B \cos \omega(kT) + C \sin \omega(kT)]$.

Величины m и n выбираются по виду аппроксимирующей функции. Точность аппроксимации можно оценить по относительной величине среднего квадрата ошибки

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{n+m-1} [f(kT) - f^0(kT)]^2}{\sum_{k=0}^{n+m-1} [f(kT)]^2}}. \quad (14)$$

Воспользуемся методом нахождения псевдообратной матрицы [3], который требует вычисления определителей и эффективно реализуется на ЭВМ.

Апробация метода. В таблице приведены значения функции $f(t)$, полученные в результате расчета.

Для аппроксимирующей функции принято $n = 3$, $m = 14$. В результате решения по формуле (13) матричного равенства

$$(-1) \begin{pmatrix} 0,4561 \\ 0,4003 \\ 0,2735 \\ 0,1527 \\ 0,0787 \\ 0,0460 \\ 0,0315 \\ 0,0273 \\ 0,0226 \\ 0,0164 \\ 0,0105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3136 & 0,0659 & 0,0002 \\ 0,4561 & 0,3136 & 0,0659 \\ 0,4003 & 0,4561 & 0,3136 \\ 0,2735 & 0,4003 & 0,4561 \\ 0,1527 & 0,2735 & 0,4003 \\ 0,0787 & 0,1527 & 0,2735 \\ 0,0460 & 0,0787 & 0,1527 \\ 0,0315 & 0,0460 & 0,0787 \\ 0,0273 & 0,0315 & 0,0460 \\ 0,0226 & 0,0273 & 0,0315 \\ 0,0164 & 0,0226 & 0,0315 \\ 0,0105 & 0,0164 & 0,0226 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

получены значения коэффициентов $a_2^0 = -1,6346$, $a_1^0 = -1,1087$, $a_0^0 = -0,3362$, а по соотношениям (9) найдены коэффициенты $b_1^0 = 0,0634$, $b_0^0 = 0,2075$.

Изображение аппроксимирующей функции имеет вид

$$F(z) = \frac{z(0,0002z^2 + 0,0634z + 0,2075)}{z^3 - 1,6346z^2 + 1,1087z - 0,3362}.$$

Для оригинала получаем выражение аппроксимирующей функции в виде

$$f^0(t) = 0,7241e^{-0,558t} - e^{-0,809t}(0,7239 \cos 1,7040t + 0,3307 \sin 1,7040t).$$

Полученные значения функции $f^0(t)$ приведены в таблице.

Графики функций $f(t)$ и $f^0(t)$ представлены на рис. 1. Относительная величина среднего квадрата ошибки, вычисленная по формуле (14), составляет $\bar{E} \approx 5\%$.

t	$f(t)$	$f^0(t)$	t	$f(t)$	$f^0(t)$
0	0,0002	0,0002	3,5	0,0787	0,0680
0,5	0,0659	0,0657	4,0	0,0460	0,0462
1,0	0,3136	0,3133	4,5	0,0315	0,0407
1,5	0,4561	0,4399	5,0	0,0273	0,0422
2,0	0,4003	0,3937	5,5	0,0226	0,0416
2,5	0,2735	0,2611	6,0	0,0164	0,0313
3,0	0,1527	0,1380	6,5	0,0105	0,0207

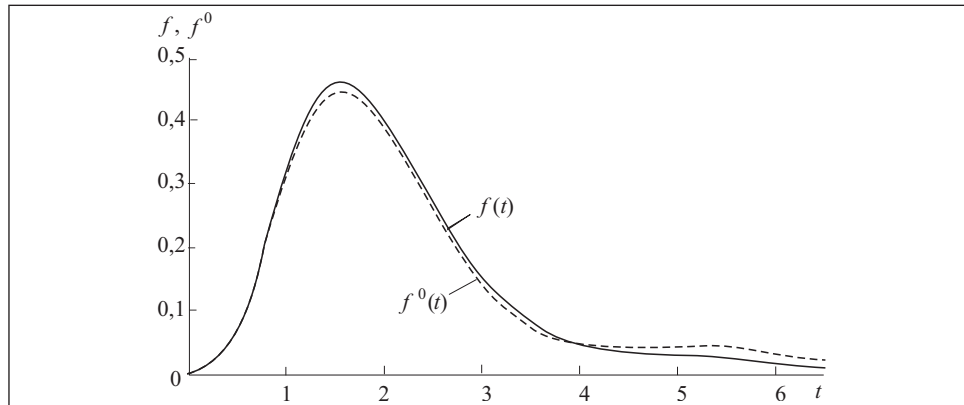


Рис. 1. Аппроксимация расчетных значений функций $f(t)$ и $f^0(t)$

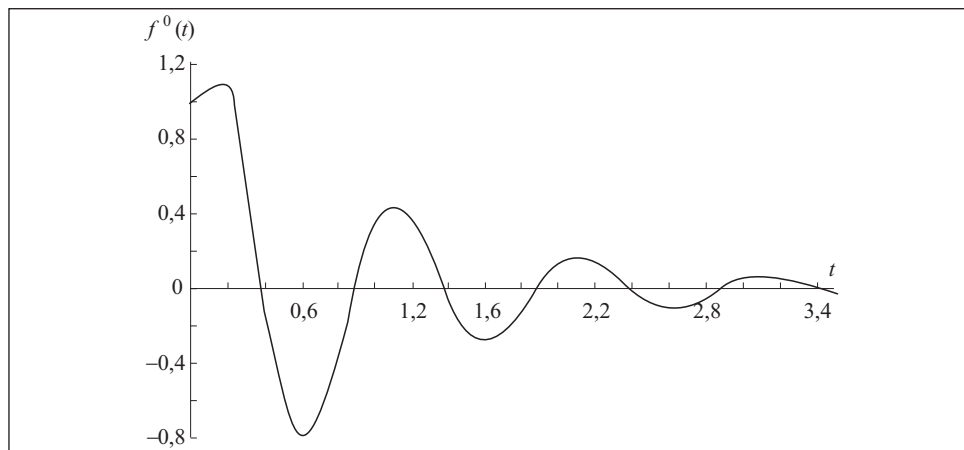


Рис. 2. Кривая затухающего гармонического процесса

Особенностью предлагаемого метода является тот факт, что увеличение порядка аппроксимирующих уравнений не влияет на точность приближения. Рассмотрим это утверждение на следующем примере. Выполнена аппроксимация кривой затухающего гармонического процесса (рис. 2). Поскольку процесс гармонический, принято $n = 2$ и получена аппроксимирующая функция $f^0(t) = e^{-1,055t} (\cos 6,275 t + 1,0136 \sin 6,275 t)$. Затем проведена аппроксимация при $n = 4$, вследствие чего внесено два паразитных корня, которым соответствуют два дополнительных члена в аппроксимирующей функции

$$f^0(t) = e^{-t} (0,9972 \cos 6,280 t + 1,0308 \sin 6,280 t) + e^{-3,095t} (0,0028 \cos 7,615 t + 0,0052 \sin 7,615 t). \quad (15)$$

Как видно из (15) и рис. 2, паразитные члены имеют малую амплитуду, большой отрицательный показатель степени экспоненциального множителя и быстро затухают. В обоих случаях точность приближения составляла $\bar{E} \approx 2\%$.

Выводы

Изложенный метод позволяет получить необходимое аналитическое выражение функции времени, заданной с использованием экспериментальных данных. Поскольку начальными условиями решения разностного уравнения являются значения аппроксимирующей функции, данный метод более предпочтителен, чем аппроксимация функции интегралом дифференциального уравнения, при котором начальные условия неизвестны. Подход, использованный для наилучшего приближения функции, эффективно реализуется алгоритмически. Точность представления функции не зависит от порядка аппроксимирующих уравнений.

The paper deals with method to obtain analytical expressions for the functions of time by representation of experimentally obtained data in a form of solution of a homogeneous linear differential equation with constant coefficients. The increase of the approximation accuracy was achieved by using the method of finding the pseudoinverse matrix.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. — М. : Либроком, 2010. — 336 с.
2. Степаньянц Г.А. Теория динамических систем. — М. : Либроком, 2010. — 312 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Физматлит, 2004. — 560 с.

Поступила 04.10.13

КОСТЬЯН Наталья Леонидовна, ст. преподаватель кафедры информационно-компьютерных технологий и фундаментальных дисциплин Киевского национального университета технологий и дизайна. В 1999 г. окончила Черкасский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование, параметрическая идентификация динамических объектов.

НАКОНЕЧНАЯ Оксана Андреевна, преподаватель кафедры информационных технологий и экономической кибернетики Восточноевропейского университета экономики и менеджмента. В 2001 г. окончила Черкасскую академию менеджмента. Область научных исследований — математическое моделирование.

