УДК 621.372

В.С. Годлевский, д-р техн. наук,
А.М. Денисенко, канд. физ.-мат. наук
Государственное предприятие «ДИСИТ» НАН Украины»
(03164, Киев, ул. Ген. Наумова, 17,
тел. (044)4229622, e-mail: disit2007@gmail.com)

Сокращение вычислений для базовых дискретных преобразований Фурье и Хартли при разреженных массивах сигналов

Приведены основанные на учете нулевых элементов в массивах входных и выходных сигналов алгоритмы, использование которых обеспечивает сокращение вычислений прямого и обратного базового дискретного преобразования Фурье и прямого базового преобразования Хартли.

Наведено базовані на обліку нульових елементів в масивах вхідних і вихідних сигналів алгоритми, що забезпечують скорочення обчислень прямого і зворотного базового дискретного перетворення Фурьє і прямого базового перетворення Хартлі.

Ключевые слова: уменьшение вычислений, дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Хартли, учет нулевых элементов в алгоритмах.

Постановка задачи. При частотной цифровой обработке сигналов (спектральной и корреляционной, адаптивной фильтрации) применяются близкие по смыслу и виду дискретные преобразования Фурье (ДПФ) или Хартли (ДПХ) [1, 2]. Целесообразность применения каждого из них зависит от особенностей решаемых задач и свойств используемых вычислительных средств. Рассмотрим пример цифровой обработки вещественных сигналов.

Базовое прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) N-точечной вещественной последовательности $\{f_k,\ k=0,\dots,\ N-1\}$ (где все составляющие последовательности являются действительными числами) при $N=2^p$ (где p — целое число) имеет вид

$$F_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right),\ n=0,\dots,N-1. \tag{1}$$

При спектральной обработке сигналов в частотной области достаточно из (1) вычислить только первые гармоники, от нуля до $N/2-1$, поскольку остальные гармоники F_n при $n=N/2, \ldots, N-1$ никакой дополнительной информации о частотных свойствах последовательности $\{f_k\}$ не несут. Это следует из равенств

$$F_{N-n}=F_n^*, \; n=1,\ldots,\frac{N}{2}-1, \qquad (2)$$

где операция «*» означает комплексное сопряжение. Однако при обратном дискретном преобразования Фурье (ОДПФ),

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right), \quad n=0,\ldots,N-1, \qquad (3)$$

используются все спектральные составляющие (2).

Базовое дискретное прямое преобразование Хартли вещественной последовательности $\{f_k, \; k=0, \ldots, N-1\}$ имеет вид

$$H_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \; n=0,\ldots,N-1, \qquad (4)$$

где

$$\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)=\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

При этом ДПХ и ДПФ связаны следующими соотношениями:

$$\operatorname{Re}F_n=\frac{1}{2}(H_n+H_{N-n}), \; \operatorname{Im}F_n=\frac{1}{2}(-H_n+H_{N-n}), \; n=1,\ldots,\frac{N}{2}-1. \qquad (5)$$

Базовое дискретное преобразование Хартли обладает свойствами, отличающими его от ДПФ. Во-первых, обратное преобразование Хартли (ОДПХ) совпадает с ДПХ с точностью до коэффициента $1/N$:

$$f_n=\sum_{k=0}^{N-1}H_k\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \; n=0,\ldots,N-1. \qquad (6)$$

Во-вторых, при реализации ДПХ вычисления проводятся в поле действительных чисел. Это в некоторых случаях дает возможность несколько уменьшить объем кода программы и число операций по сравнению с ДПФ.

Наличие быстрых методов [1—5] вычислений преобразований Фурье (БПФ) и Хартли (БПХ) делает применение дискретных преобразований (1) и (4) эффективным средством вычисления спектров, корреляционных функций и решения других задач, связанных со спектральным разложением и фильтрацией сигналов, в случае, когда требуется найти все гармоники от нуля до $N/2-1$, а с помощью обратных преобразований (ОБПФ, ОБПХ) — все временные отсчеты сигналов. При этом в случае применения как прямых, так и обратных БПФ и БПХ число операций (умножения и сложения) не превышает $C\ N\log N$, что при больших значениях N существенно меньше числа N^2 операций при непосредственном применении преобразований (1), (3), (4), (6). В этом случае константа C зависит только от выбора алгоритма быстрого преобразования и не зависит от значения N. В работе [2, с. 136] приведен пример реализации алгоритма Кули—Тьюки для комплексного входящего массива, где установлено, что число операций действительного умножения M_R и действительного сложения A_R, необходимых для расчета БПФ, составляет

$$A_R = \frac{1}{2} N(-10+7\log_2 N)+8,\quad M_R = \frac{1}{2} N(-10+3\log_2 N)+8,$$

или

$$A_R = 3N(-1+\log_2 N)+4,\quad M_R = N(-7+2\log_2 N)+12,$$

в зависимости от реализации операции комплексного умножения (при условии, что массивы значений синусов и косинусов предварительно подготовлены и используются в программе как массивы действительных чисел).

Однако, при частотной обработке сигналов на практике достаточно часто случается, что требуемое число компонент преобразования в (1) или (3) является небольшим. При этом в (1), (2) множество искомых гармоник имеет вид полосы частот:

$$S = \{[r, r+m-1],\quad r = \overline{0, N/2-1},\quad m < N/2-r+1\}. \tag{7}$$

Кроме того, часто исходная последовательность $\{f_k\}$ также содержит большое число нулевых элементов. К таким случаям относятся следующие типовые задачи:

1. Узкополосная обработка сигналов, при которой для выборки $\{f_k,\ k=0, \ldots, N-1\}$ значений сигналов во временной области определяются значения спектральных составляющих сигналов в узкой полосе частот. Спектральные составляющие сигналов подвергаются обработке в частотной области (например, корреляционной обработке и (или) адаптивной нелинейной фильтрации [6]). После фильтрации определяется образ во временной области. При этом отношение числа отсчетов сигнала в исходной и результирующей временных последовательностях к числу отсчетов спектральных составляющих сигналов в промежуточных последовательностях в узкополосной частотной области может достигать значений порядка нескольких сотен или даже тысяч.

2. Увеличение точности и избирательности спектральной и корреляционной обработки сигналов в результате существенного увеличения размерности исходной последовательности значений сигнала посредством включения в него нулевых значений. Данная задача на практике может встречаться как в качестве составной части задачи 1, так и в качестве самостоятельной задачи (например, при расчете только спектральных характеристик в частотной области исходного сигнала, заданного во временной области).

3. Оптимизация временных функций (окон) для преобразования Фурье, при которой искусственно добавляется большое число нулевых (вспомогательных) элементов к исходному массиву отсчетов сигналов для увеличения точности вычисления параметров оконных функций (функций цели и ограничений) [7, 8].

При решении перечисленных задач с помощью стандартных алгоритмов, основанных на методах БПФ или БПХ, значительная часть общей трудоемкости приходится либо на вычисления с нулевыми элементами, либо на вычисления части элементов выходного массива, которая не востребована в постановке задачи обработки сигналов. В таких случаях непосредственное вычисление по формулам (1), (2), (4) (применение стандартного ДПФ или ДПХ) более эффективно по сравнению с алгоритмами быстрого преобразования.

Для уменьшения общей трудоемкости вычислений преобразования Фурье последовательностей с большим содержанием нулевых элементов целесообразно применять модифицированные алгоритмы, направленные на исключение из обработки нулевых и избыточных данных. Будем рассматривать алгоритмы, представляющие собой комбинации стандартных ДПФ или ДПХ и модификацию быстрых алгоритмов их вычисления, а также проанализируем области их целесообразного применения.

Рассмотрим случай, когда требуется найти малое число m гармоник входной последовательности $\{f_k, k=0, \ldots, N-1\}$ (входного сигнала). Как известно, если число искомых гармоник m такое, что $1 \le m \le C \log N$, то рекомендуется применять стандартные ПДПФ или ПДПХ, поскольку, например, в случае применения ПДПФ для полосы S в (7) требуются только $2m\,N$ операций вместо $CN \log N$ в случае БПФ. Известны ускоренные методы ПДПФ, позволяющие уменьшить число операций при выполнении ПДПФ, например метод Герцеля, использование которого позволяет в два раза уменьшить число операций по сравнению с непосредственным применением ПДПФ. Известны также методы, направленные на адаптивное исключение из вычислений в алгоритмах БПФ операций с нулевыми элементами (например, [9 —12]).

Рассмотрим алгоритмы, позволяющие уменьшать число операций по сравнению с методом Герцеля при выполнении ПДПФ, а также число операций при выполнении ПДПХ. Эти алгоритмы основаны на раздельном использовании свойств симметрии функций $\cos x$ и $\sin x$.

Использование свойств симметрии функций при вычислении ПДПФ и ОДПФ. Представим ПДПФ (1) с учетом (7) в виде $F_n = F_{n\cos} + iF_{n\sin}$, $n \in S$, где множество S задано (7); $F_{n\cos}$ и $F_{n\sin}$ — косинусное и синусное преобразования входной последовательности $\{f_k, k=0, \ldots, N-1\}$,

$$F_{n\cos} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \qquad (8)$$

$$F_{n\sin} = -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right). \qquad (9)$$

Для (8) и (9) справедливо следующее утверждение.

***Утверждение* 1.** Если в (1) N делится без остатка на четыре, то для четных гармоник входной последовательности $\{f_k,\ k=0, \ldots, N-1\}$ ПДПФ будет иметь вид

$$F_{2l\cos} = \frac{1}{N}\left(f_0 + (-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + f_{\frac{N}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k + f_{\frac{N}{2}-k} + f_{\frac{N}{2}+k} + f_{N-k}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right), \qquad (10)$$

$$F_{2l\sin} = -\frac{1}{N}\left((-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k - f_{\frac{N}{2}-k} + f_{\frac{N}{2}+k} - f_{N-k}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right), \qquad (11)$$

а для нечетных гармоник входной последовательности —

$$F_{2l+1\cos} = \frac{1}{N}\left(f_0 - f_{\frac{N}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k - f_{\frac{N}{2}-k} - f_{\frac{N}{2}+k} + f_{N-k}\right)\cos\left(\frac{2\pi k(2l+1)}{N}\right)\right), \qquad (12)$$

$$F_{2l+1\sin} = -\frac{1}{N}\left((-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k+f_{\frac{N}{2}-k}-f_{\frac{N}{2}+k}-f_{N-k}\right)\sin\left(\frac{2\pi k(2l+1)}{N}\right)\Bigg), \qquad (13)$$

где $l=0,\ldots,(N/2)-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 1 следует из равенств

$$\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)=\cos\left(\frac{2\pi n\,(N-k)}{N}\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\left(\frac{2\pi n\left(\frac{N}{2}-k\right)}{N}\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{2\pi n\left(\frac{N}{2}+k\right)}{N}\right), \qquad (14)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi n\,(N-k)}{N}\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2\pi n\left(\frac{N}{2}-k\right)}{N}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{2\pi n\left(\frac{N}{2}+k\right)}{N}\right). \qquad (15)$$

Из утверждения 1 следует, что в случае, когда исходная последовательность $\{f_k,\ k=0,\ldots,N-1\}$ вещественная, для вычисления ПДПФ (1) единственной гармоники (одной спектральной составляющей) при фиксированном значении $n=0,\ldots,N-1$ необходимо выполнить $N/2$ операций умножения, а также $2N-2$ операций сложения для четных гармоник и $2N-4$ для нечетных.

При вычислении m гармоник (для $m>1$) целесообразно предварительно вычислить суммы, содержащиеся в (10) — (13) для $k=1,\ldots,(N/4)-1$:

$$f_{k1}=f_k+f_{\frac{N}{2}-k}+f_{\frac{N}{2}+k}+f_{N-k}, \qquad (16)$$

$$f_{k2}=f_k-f_{\frac{N}{2}-k}+f_{\frac{N}{2}+k}-f_{N-k}, \qquad (17)$$

$$f_{k3}=f_k-f_{\frac{N}{2}-k}-f_{\frac{N}{2}+k}+f_{N-k}, \qquad (18)$$

$$f_{k4}=f_k+f_{\frac{N}{2}-k}-f_{\frac{N}{2}+k}-f_{N-k}. \qquad (19)$$

Тогда при вычислении m гармоник, подставляя (16) в (10), (17) в (11) и (18) в (12), (19) в (13), для последовательности $\{f_k, k=0,\ldots,N-1\}$ необходимо выполнить $m\,(N/2)$ умножений, а также $3\,(N/2)+2m\,((N/4)-1)+6$ операций сложения для четных гармоник и $3\,(N/2)+2m\,((N/4)-1)+4$ для нечетных.

Таким образом, для ПДПФ при использовании формул (10)—(13) требуется меньшее число операций, чем при использовании метода Герцеля.

Рассмотрим применение ОДПФ (3) для решения распространенной на практике задачи узкополосной частотной фильтрации сигналов, когда по малому числу m ненулевых значений спектральных составляющих сигнала в частотной области определяются все $N-1$ значения сигнала во временной области. В этом случае формула (3) для полосы S (7) примет вид

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=r}^{r+m-1}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)+\sum_{k=N-r-m+1}^{N-r}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)\right),$$

$$n=0,\ \ldots,\ N-1, \tag{20}$$

где без ограничения общности рассуждений предположим, что $r>0$. Поскольку исходная последовательность $\{f_k,\ k=0,\ \ldots,\ N-1\}$ является действительной, преобразуем (20) к виду

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\left(2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Re}F_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Im}F_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right),$$

$$n=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{21}$$

Изменив порядок суммирования во второй сумме (20),

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\left(2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Re}F_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Im}F_k\sin\left(\frac{2\pi(N-k)n}{N}\right)\right),$$

$$n=0,\ \ldots,\ N-1 \tag{22}$$

и использовав для (22) свойство (2), получим

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=r}^{r+m-1}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)+\sum_{k=r}^{r+m-1}F_k^*\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right)\right],$$

$$n=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{23}$$

Запишем (23) в виде

$$\hat{f}_n=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=r}^{r+m-1}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)+\left(\sum_{k=r}^{r+m-1}F_k\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)\right)^*\right),$$

$$n=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{24}$$

Поскольку в (24) $\operatorname{Im}\hat{f}_n = 0$, из (24) непосредственно следует формула (21) в виде

$$\hat{f}_n = \operatorname{Re}\hat{f}_n = \frac{1}{N}\left(2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Re}F_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - 2\sum_{k=r}^{r+m-1}\operatorname{Im}F_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right),$$

$$n = 0, \ldots, N-1. \tag{25}$$

Сформулируем утверждение, аналогичное утверждению 1, для общего случая ОДПФ (3). Это утверждение вытекает из формулы (25) ОДПФ для общего случая:

$$\hat{f}_n = \operatorname{Re}\hat{f}_n = \frac{1}{N}\left(F_0 + (-1)^n F_{\frac{N}{2}} + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\operatorname{Re}F_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\operatorname{Im}F_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right), \; n = 0, \ldots, N-1.$$

***Утверждение* 2.** Если в (3) N делится без остатка на четыре, то ОДПФ (3) для действительной последовательности $\{f_k,\ k = 0, \ldots, N-1\}$ можно представить в виде

$$f_{2l} = \frac{1}{N}\left(F_0 + F_{\frac{N}{2}} + 2(-1)^l\operatorname{Re}F_{\frac{N}{4}} + 2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(\operatorname{Re}F_k + \operatorname{Re}F_{\frac{N}{2}-k}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(\operatorname{Im}F_k - \operatorname{Im}F_{\frac{N}{2}-k}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right), \tag{26}$$

$$f_{2l+1} = \frac{1}{N}\left(F_0 - F_{\frac{N}{2}} - 2(-1)^l\operatorname{Im}F_{\frac{N}{4}} + 2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(\operatorname{Re}F_k + \operatorname{Re}F_{\frac{N}{2}-k}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(\operatorname{Im}F_k + \operatorname{Im}F_{\frac{N}{2}-k}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right), \tag{27}$$

где $l = 0, \ldots, (N/2)-1$.

Доказательство утверждения 2 выполняется с помощью таких же приемов, как и доказательство утверждения 1.

Из утверждения 2 следует, что для вычисления m_0 временных значений ОДПФ (3) необходимо выполнить $m_0 N$ сложений и $m_0\left(\frac{N}{2}+1\right)$ умножений. При вычислении ОДПФ (20), в случае m ненулевых значений спектральных составляющих сигнала в частотной области, для одного временного отсчета ОДПФ необходимо выполнить N сложений и $\min\left(2m+3, \frac{N}{2}+1\right)$ умножений. При вычислении m_0 отсчетов ($m_0>1$) ОДПФ целесообразно, как и в случае ПДПФ, предварительно вычислить суммы, содержащиеся в (26), (27) для $k=1, \ldots, (N/4)-1$. Тогда для вычисления m_0 отсчетов ОДПФ потребуется $m_0 \min\left(2m+3, \frac{N}{2}+1\right)$ операций умножения и $N+\left(\frac{N}{2}+2\right)(m_0-1)$ операций сложения.

Использование свойств симметрии функций при вычислении ДПХ. Рассмотрим ДПХ (4), представив его в виде

$$H_n = H_{n\cos} + H_{n\sin},\ n=0, \ldots, N-1. \tag{28}$$

где

$$H_{n\cos} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),\ H_{n\sin} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Для преобразования (28) сформулируем утверждение, аналогичное утверждению 1.

***Утверждение* 3.** Если в (4) N делится без остатка на четыре, то для четных гармоник входной действительной последовательности $\{f_k,\ k= =0, \ldots, N-1\}$ запишем

$$H_{2l\cos} = \frac{1}{N}\left(f_0 + (-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + f_{\frac{N}{2}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k + f_{\frac{N}{2}-k} + f_{\frac{N}{2}+k} + f_{N-k}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right),$$

$$H_{2l\sin} = \frac{1}{N}\left((-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k - f_{\frac{N}{2}-k} + f_{\frac{N}{2}+k} - f_{N-k}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)\right),$$

а для нечетных гармоник входной последовательности —

$$H_{2l+1\cos} = \frac{1}{N}\left(f_0 - f_{\frac{N}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k - f_{\frac{N}{2}-k} - f_{\frac{N}{2}+k} + f_{N-k}\right)\cos\left(\frac{2\pi k(2l+1)}{N}\right)\right),$$

$$H_{2l+1\sin} = \frac{1}{N}\left((-1)^l\left(f_{\frac{N}{4}} + f_{\frac{3N}{4}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\frac{N}{4}-1}\left(f_k + f_{\frac{N}{2}-k} - f_{\frac{N}{2}+k} - f_{N-k}\right)\sin\left(\frac{2\pi k(2l+1)}{N}\right)\right),$$

где $l = 0, \ldots, (N/2)-1$.

Рассмотрим далее ОДПХ (6). Для задачи узкополосной частотной фильтрации сигналов с малым числом m ненулевых значений спектральных составляющих сигнала в частотной области формула (6) для полосы S (7) примет вид

$$f_n = \sum_{k=r}^{r+m-1} H_k \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \sum_{k=N-r+m+1}^{N-r} H_k \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \; n = 0, \ldots, N-1. \quad (29)$$

Для ПДПХ (4) в виде (28) легко установить следующее свойство:

$$H_{N-n} = H_{n\cos} + H_{n\sin}, \quad n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1. \quad (30)$$

Учитывая (30), можно представить (29) в виде

$$f_n = 2\sum_{k=r}^{r+m-1} H_{n\cos}\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + 2\sum_{k=r}^{r+m-1} H_{n\sin}\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \; n = 0, \ldots, N-1.$$

Для общего случая ОДПХ (6) получим

$$f_n = H_0 + (-1)^n H_{\frac{N}{2}} + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_{n\cos}\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_{n\sin}\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),$$

$$n = 0, \ldots, N-1.$$

***Утверждение* 4.** Если N делится без остатка на четыре, то ОДПХ (6) можно представить в виде

$$f_{2l} = H_0 + H_{\frac{N}{2}} + 2(-1)^l H_{\frac{N}{4}\cos} + 2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(H_{k\cos} + H_{\frac{N}{2}-k\cos}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(H_{k\sin} - H_{\frac{N}{2}-k\sin}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right),$$

$$f_{2l+1}=H_0-H_{\frac{N}{2}}+2(-1)^l H_{\frac{N}{4}\sin}+2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(H_{k\cos}-H_{\frac{N}{2}-k\cos}\right)\cos\left(\frac{4\pi kl}{N}\right)+$$

$$+\,2\sum_{k=1}^{(N/4)-1}\left(H_{k\sin}+H_{\frac{N}{2}-k\sin}\right)\sin\left(\frac{4\pi kl}{N}\right),$$

для $l=0,\,\ldots,(N/2)-1$.

Из утверждений 3 и 4 следует, что число операций сложения и умножения при расчетах для ПДПХ и ОДПХ совпадет с числом операций сложения и умножения для ПДПФ и ОДПФ.

В некоторых случаях, в частности, когда необходимо анализировать достаточно узкую полосу частот ($m<N/4$), для уменьшения числа операций сложения можно использовать ДПХ (4), приведенное к виду

$$H_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}-\frac{\pi}{4}\right),\ n=0,\,\ldots,\,N-1. \tag{31}$$

Для (31) справедливо следующее утверждение.

***Утверждение* 5.** Если в (31) N делится на два, то

$$H_n=\frac{1}{N}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(f_0+(-1)^n f_{\frac{N}{2}}\right)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(f_k+(-1)^n f_{\frac{N}{2}+k}\right)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}-\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{32}$$

для $n=0,\,\ldots,\,N-1$.

Доказательство утверждения 5 сводится к поиску таких точек p, для которых

$$\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{2\pi pn}{N}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{33}$$

или

$$\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi pn}{N}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{34}$$

При $p=\frac{N}{2}+k$ равенство (33) выполняется для четных, а равенство (34) — для нечетных значений n, в чем можно убедиться, подставив $p=\frac{N}{2}+k$ в (33) и (34). Это и является доказательством утверждения 5.

Из утверждения 5 следует, что если косинусы в (32) вычислены заранее, то при фиксированном значении n для вычисления ДПХ необходимо выполнить N сложений и $(N/2)+1$ умножений. Аналогичный подход можно применить и для ОДПХ (6).

Отсечение нулевых элементов в известных алгоритмах БПФ. Известны модификации алгоритмов БПФ, предназначенные для решения различных практических задач цифровой обработки сигналов при наличии большого числа нулевых элементов во входящих последовательностях как ПДПФ, так и ОДПФ. Модификацию быстрых алгоритмов, направленную на исключение из вычислений нулевых элементов принято называть отсечением нулевых элементов (pruning) [9]. В работе [9] внесены изменения в БПФ-алгоритм, предложенный в [10], состоящие в исключении из вычислений нулевых бабочек на каждом уровне вычисления БПФ, при этом число уровней остается постоянным.

В работе [11] показано, что при простом изменении БПФ-алгоритма по основанию два с прореживанием по времени приблизительный относительный выигрыш по времени составляет

$$t_s = \frac{\log_2 N - \log_2 m}{\log_2 N},$$

где N — общее число точек преобразования, среди которых только m — ненулевые.

В работе [12] область отсечения нулевых элементов БПФ расширена на случай, когда число требуемых отсчетов результирующей последовательности m_0 меньше числа точек преобразования N. При этом утверждается, что для алгоритмов, описанных в [9, 11], общий относительный выигрыш по числу операций при наличии нулей как в исходной, так и в результирующей последовательности составляет

$$t_s = \begin{cases} \dfrac{2\log_2 N - \log_2 m - \log_2 m_0 - 2\left(1 - \dfrac{m_0}{N}\right)}{\log_2 N} & \text{при } mm_0 \ge N, \\[2ex] \dfrac{\log_2 N - \log_2 m - \dfrac{2m}{N}(m_0 - 1)}{\log_2 N} & \text{при } mm_0 < N. \end{cases} \tag{35}$$

Рассмотрим подробнее алгоритм отсечения нулевых элементов в БПФ [12]. Обозначим через $M_{R0}^{\text{БПФ}}$ и $A_{R0}^{\text{БПФ}}$ соответственно число операций умножения и сложения БПФ для этого алгоритма. Через $M_{R0}^{\text{ДПФ}}$ и $A_{R0}^{\text{ДПФ}}$

обозначим число операций умножения и сложения в ДПФ, оптимизированного с учетом исключения нулевых элементов. Следуя [12], находим

$$A_{R0}^{\text{БПФ}} = A_{R0}^{\text{БПФ}}(N, m, m_0) = \frac{N}{m} + 7\frac{N}{m}(\log_2 m - 1) +$$

$$+7\sum_{i=\log_2\frac{N}{m}+1}^{\log_2 m_0}\sum_{j=1}^{2^{i-1}}\left[\frac{N-j}{2^i}\right] + 5\sum_{i=\log_2 m_0+1}^{\log_2 N}\sum_{j=1}^{N_0}\left[\frac{N-j}{2^i}\right], \quad (36)$$

$$M_{R0}^{\text{БПФ}} = M_{R0}^{\text{БПФ}}(N, m, m_0) = 4\frac{N}{m}(\log_2 m - 1) +$$

$$+4\left(\sum_{i=\log_2\frac{N}{m}+1}^{\log_2 m_0}\sum_{j=1}^{2^{i-1}}\left[\frac{N-j}{2^i}\right] + \sum_{i=\log_2 m_0+1}^{\log_2 N}\sum_{j=1}^{N_0}\left[\frac{N-j}{2^i}\right]\right), \quad (37)$$

где [ ] — операция взятия целого числа. Из (36) и (37), а также утверждений 1 и 2 следует, что при определенных значениях m, m_0

$$M_{R0}^{\text{ДПФ}} < M_{R0}^{\text{БПФ}},\ A_{R0}^{\text{ДПФ}} < A_{R0}^{\text{БПФ}}.$$

Сравнивая число операций сложения и умножения для БПФ из работы [12] и ДПФ при $m = N = 1024$ и различных значениях m_0, приведенное в таблице, можно сделать вывод о целесообразности использования описанных модификаций ДПФ при относительно небольших значениях m_0.

m_0	$A_{R0}^{\text{БПФ}}$, $A_{R0}^{\text{ОБПФ}}$	$M_{R0}^{\text{БПФ}}$, $M_{R0}^{\text{ОБПФ}}$	$A_{R0}^{\text{ОДПФ}}$	$M_{R0}^{\text{ОДПФ}}$	$A_{R0}^{\text{ДПФ}}$ при значениях гармоники		$M_{R0}^{\text{ДПФ}}$
					четных	нечетных	
1	6 139	4 092	1 024	513	2 052	2 050	512
2	9 718	6 136	2 048	1 026	2 562	2 560	1 024
4	13 292	8 176	4 096	2 052	3 582	3 580	2 048
8	16 856	10 208	8 192	4 104	5 622	5 620	4 096
16	20 400	12 224	16 384	8 208	9 702	9 700	8 192
32	23 904	14 208	32 768	16 416	17 862	17 860	16 384
64	27 328	16 128	65 536	32 832	34 182	34 180	32 768

Выводы

Представленные алгоритмы ДПФ и ДПХ дают возможность уменьшить число требуемых операций по сравнению с известными алгоритмами БПФ и БПХ при больших значениях отношений размерностей массивов входных или выходных сигналов к числу ненулевых элементов в этих массивах.

The authors perform algorithms based on the account of zero elements in the arrays of input and output signals. The use of these signals ensures the reduction of calculations of the Fourier direct and inverse base discrete transformation and Hartley direct base transformation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М. : Мир, 1978. — 848 с.
2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. —М. : Мир, 1989. — 448 с.
3. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. — М. : Мир, 1990. — 175 с.
4. *Прадо Ж.* Замечание к статье «Быстрое преобразование Хартли» // ТИИЭР. — 1985. — **73**, № 12. — С. 182—183.
5. *Сергеев В.В, Усачев А.В.* Новый алгоритм быстрого преобразования Хартли // Компьютерная оптика, 1990, Вып.7. — С. 66—67.
6. *Адаптивные* фильтры. Под ред. Коуэна К.Ф., Гранта П.М. — М. : Мир, 1988. — 388 с.
7. *Годлевский В.С., Денисенко А.М.* Методические погрешности дискретного преобразования Фурье и способы их компенсации// Электрон. моделирование. — 2006. — **28**, № 3. — С. 83 — 98.
8. *Годлевский В.С., Денисенко А.М.* Численный синтез оконных функций для дискретного преобразования Фурье // Электрон. моделирование. — 2006. — **28**, № 4. — С. 75 — 87.
9. *Markel J.D.* FFT pruning // IEEE Trans. Audio Electroacoust. — 1971. — Vol. AU-19. — P. 305—311.
10. *Gentleman W.M., Sandle G.* Fast Fourier transforms for fun and profit // AFIPS Conf. Proc. — Washington, D. C. : Spartan, 1966. — Vol. 29. — P. 563—578.
11. *Skinner D.P.* Prunning the decimation-in-time FFT algorithm // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. — 1976. — Vol. ASSP-24. — P. 193—194.
12. *Sreenivas T.V., Rao P.V.S.* FFT algorithm for both input and output pruning// Ibid. — 1979. Vol. ASSP-27. — P. 291—292.

Поступила 27.12.12

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, директор государственного предприятия «ДИСИТ» НАН Украины. В 1986 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование, оптимизация режимов и диагностика трубопроводных систем, аналоговая и цифровая обработка сигналов.

ДЕНИСЕНКО Александр Михайлович, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. государственного предприятия «ДИСИТ» НАН Украины. В 2000 г. окончил Киевский национальный университет им. Т. Шевченко. Область научных исследований — цифровая обработка сигналов.