УДК 681.3(075)

А.И. Семенко [1], **И.В. Мельник** [2], доктора техн. наук
[1] Государственный университет
информационно-коммуникационных технологий
(Украина, 03110, Киев, ул. Соломенская, 7,
e-mail: setel@ukr.net),
[2] Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»,
(Украина, 03056, Киев, пр. Победы, 37, корпус 12,
тел. (044) 4068292, (044) 4549505, e-mail: imelnik@edd.ntu-kpi.kiev.ua)

Расчет автокорреляционной функции цифровых сигналов с использованием матричных макроопераций системы MatLab

Приведены математические модели цифровых квазипериодических сигналов, позволяющие описывать их с помощью матричных макроопераций. Основным средством для формирования математических моделей сигналов являются арифметико-логические выражения. С помощью разработанных средств моделирования рассчитаны автокорреляционные функции для цифровых сигналов различной формы. Функции обработки цифровых сигналов реализованы с использованием средств матричного программирования системы MatLab.

Наведено математичні моделі цифрових квазіперіодичних сигналів, які дозволяють описувати їх з використанням матричних макрооперацій. Головним засобом для формування математичних моделей сигналів є арифметико-логічні вирази. За допомогою розроблених засобів моделювання розраховано автокореляційні функції для цифрових сигналів різної форми. Функції обробки сигналів реалізовані з використанням засобів матричного програмування системи MatLab.

К л ю ч е в ы е с л о в а: обработка цифровых сигналов, автокорреляционная функция, матричные макрооперации, арифметико-логическое выражение.

Современные методы программирования достаточно разнообразны и позволяют находить комплексные подходы к решению сложных математических задач, включая задачи теории сигналов. При этом широко используются различные средства программирования, в том числе: структурное, объектно-ориентированное, логическое, функциональное программирование [1—4]. В настоящее время при решении задач программирования широкое применение находят математические системы автоматизированного проектирования, среди которых особое место занимает система научно-технических расчетов MatLab.

Отличительными чертами системы MatLab при решении задач математического моделирования являются следующие: относительная простота средств программирования, реализация большого числа математических функций, включая функции численных методов, развитые средства визуализации [1—4]. Однако основное преимущество средств программирования системы MatLab над стандартными средствами программирования состоит в ее преимущественной ориентации на использование векторных и матричных макроопераций обработки данных вместо стандартных средств структурного программирования, к которым относятся операторы ветвления и цикла [3, 4].

Аппарат матричного программирования и возможности его использования при написании реальных программ в настоящее время изучены недостаточно, поэтому актуальными являются дальнейшие исследования, которые позволят открыть новые возможности использования этих прогрессивных средств программирования. В работах [1, 2] подробно исследован вопрос о возможности использования матричных макроопераций для решения стандартных математических задач и прикладных задач математической физики. Описание этих исследований продолжено в работах [5, 6], где показано, что большинство задач обработки данных, численных методов, а также задач математической физики могут быть решены средствами матричного программирования.

В работе [6] показано, как с помощью матричного представления можно анализировать вычислительные свойства алгоритма, в том числе рассмотрена возможность его распараллеливания. Введены новые понятия, такие как арифметико-логическое выражение, рекуррентное арифметико-логическое выражение и вектор-функция, позволяющие сформировать обобщенную методику написания программ средствами матричного программирования. Установлено также, что для решения большинства стандартных и оригинальных задач программирования существующий набор матричных макроопераций системы MatLab является недостаточным, и предложены дополнительные функции, предназначенные для реализации рекуррентных вычислений [1, 2, 5]. Преимущества разработанной методики матричного программирования связаны, в первую очередь, с простотой написания и отладки программ. Поэтому представляется целесообразным расширить круг задач математического моделирования, решаемых с помощью средств матричного программирования.

Постановка задачи. Важным классом нерассмотренных задач, которые могут быть эффективно решены с использованием средств матричного программирования, являются задачи анализа и обработки цифровых сигналов. До настоящего времени анализировалась в основном возможность использования матричных макроопераций для реализации рекуррентных вычислений и численных методов, а задачи анализа и обработки цифровых сигналов, имеющие специфический характер, не рассматривались. Особенность их математического описания состоит в том, что цифровые сигналы обычно имеют квазипериодический характер и именно это их свойство используется математическими средствами обработки. Кроме того, цифровые сигналы имеют случайный характер, поэтому для их анализа используют математические средства статистической обработки данных. Вместе с тем, в системе MatLab существуют специальные функции, предназначенные для обработки цифровых сигналов, но написаны они стандартными средствами структурного программирования.

В связи с этим исследование возможностей использования средств матричного программирования для решения задач обработки сигналов представляет научный и практический интерес. Рассмотрим набор математических функций, предназначенных для вычисления автокорреляционной функции (АКФ) цифровых сигналов.

Общие подходы к формированию математических моделей цифровых сигналов в системе MatLab при использовании матричных макроопераций. В целом методы матричного программирования системы MatLab основаны на таких подходах.

1. Стандартные функции обработки матриц и векторов, написанные разработчиками системы с использованием методов и средств структурного программирования [3, 4].

2. Функции обработки матриц и векторов, основанные на макрооперациях, которые в ряде случаев позволяют избежать использования средств структурного программирования [3, 4].

3. Арифметико-логические выражения, которые при реализации ветвящихся алгоритмов позволяют избежать использования операторов условного перехода [2, 5, 6].

4. Векторные и матричные функции рекуррентных вычислений, позволяющие при реализации циклических алгоритмов заменять операторы цикла [2, 5, 6].

5. Вектор-функция, используемая для вычисления строк формируемой матрицы [2, 5, 6].

При анализе свойств цифровых сигналов возможно использование всех описанных подходов, и выбор какого-либо конкретного из них в каждом случае обусловлен либо возможностями имеющихся программных средств, либо используемым и предпочитаемым стилем программирования.

Матричные алгоритмы расчета временных зависимостей для квазипериодических сигналов. Для построения моделей цифровых квазипериодических сигналов различной формы на языке системы MatLab

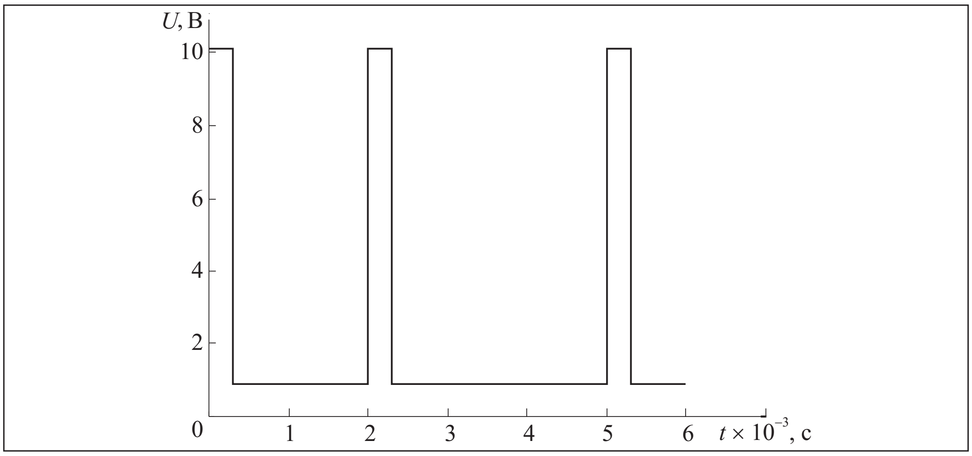

Рис. 1. Форма импульсного сигнала для входного вектора [1, 0, 1, 0, 0, 1]: рабочая частота — 1 кГц; длительность импульсов — 0,1 мс

предложены специальные функции. Поскольку разрабатывались универсальные средства моделирования, были рассмотрены различные способы кодировки цифровых сигналов:

1) потенциальное кодирование;
2) импульсное кодирование;
3) сигналы с амплитудной модуляцией;
4) сигналы с частотной модуляцией;
5) сигналы с фазовой модуляцией.

Для моделирования временных зависимостей цифровых сигналов предназначены две функции: одна — для построения потенциальных и импульсных кодов, вторая — для описания сигналов с несущей синусоидальной частотой. Тип сигнала задается через параметр функции: 1 — потенциальный или импульсный код, 2 — амплитудная модуляция, 3 — частотная модуляция, 4 — фазовая. Последовательность единиц и нулей, соответствующая коду сигнала, задана в виде входного вектора.

В созданных программных средствах предусмотрена также возможность вывода данных моделирования в графическом виде. Для потенциальных и импульсных кодов отдельно задана частота следования импульсов, их длительность, амплитуда единицы и амплитуда нуля. Задание числовой последовательности единиц и нулей в виде входного вектора полностью соответствует синтаксису и особенностям языка системы MatLab. Например, вектору [1, 0, 1, 0, 0, 1] соответствует временная зависимость, приведенная на рис. 1. Функция для расчета значений сигнала в заданные моменты времени реализована в файле `formimp.m`, который имеет следующий вид.

Пример 1.

```
function VectSignal=formimp(vinp,T,timp,U0,U1);
   if (timp>=T) error ('Error! Condition timp<T must be…
satisfied.'), end;
   if (timp<0) error ('Error! Impuls durability timp
   should be… positive value.'), end;
   if (T<0) error ('Error! Durability of digital signal T …
should be positive value.'), end;
   nel=length(vinp)*10000; Tsign=T*length(vinp); Tq=
Tsign/10000;
   selper=round(T/Tq); selimp=round(timp/Tq);
   selpause=selper-selimp;
   VectU0=U0*ones(1,selper);
   VectU1_Nach=U1*ones(1,selimp);
   VectU1_Konec=U0*ones(1,selpause);
   VectU1=[VectU1_Nach,VectU1_Konec];
   VectSignal=Form_Impuls_Signal(vinp,VectU0,VectU1);
   Tout=0:Tq:Tq*(length(VectSignal)-1);
   plot(Tout,VectSignal);
   grid on;
   TAU=0:100.*Tq:Tq*(length(VectSignal)-1);
return
```

В начале программы проводится проверка корректности ввода данных. Очевидно, что все проверки проводятся с использованием условного оператора, однако, как видно из текста программы, все дальнейшие операции по обработке данных квазипериодической структуры сигнала выполняются декларативно, без использования ветвящихся и циклических структур. Процесс вычисления значения сигнала в конкретные моменты времени реализован через функцию `Form_Impuls_Signal.m`, исходный код которой имеет следующий вид.

Пример 2.

```
function Sout=Form_Impuls_Signal(vinp_s,VectU0_S,
VectU1_S);
   nrr=length(vinp_s);
   ffh='(vs_M(ii-2)==0).*M(1,:)+vs_M(ii-2)==1).*M(2,:)';
   A=recmat(2,nrr+2,[VectU0_S;VectU1_S],ffh,-1,1e10,
vinp_s);
   A(1,:)=[]; A(2,:)=[];
   c=size(A);rr=c(1)*c(2); G=A'; Sout=reshape(G,1,rr);
return
```

Как видно из приведенной программы, вычислительный процесс в данном случае осуществляется с помощью функции `recmat`, которая не входит в состав стандартного пакета системы MatLab и была дописана для расширения ее функциональных возможностей по организации рекуррентных вычислений. Полный исходный программный код этой процедуры приведен в работе [2], а возможности ее использования как альтернативы средствам структурного программирования при организации рекуррентных вычислений подробно рассмотрены в работах [2, 5, 6].

В данном случае эта функция осуществляет следующие действия. Если в данный момент времени уровень сигнала равен 1, она устанавливает значение U_1, а если 0 — значение U_0. Для построения квазипериодического сигнала значения функции вычисляются для различных моментов времени, при этом первая строка матрицы соответствует первому периоду сигнала, вторая — второму и так далее. Как видно из кода написанной программы, для вычисления строк матрицы используется арифметико-логическое выражение, определяемое строковой переменной `ffh`.

Рассмотрим пример для того же вектора [1, 0, 1, 0, 0, 1]. Пусть уровню 0 соответствует значение 0,9 В, а уровню 1 — значение 10,1 В (см. рис. 1). Будем рассматривать потенциальный, а не импульсный код, т.е. предположим, что смена уровня происходит только при смене значения сигнала. Для простоты предположим также, что период составляют пять отсчетов. Тогда вычисленные значения сигнала будут представлены в виде такой матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 & 10{,}1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

После этого выполняется транспонирование матрицы A и ее объединение по столбцам, для чего используется стандартная функция MatLab `reshape` [1—4].

В общем случае временную зависимость для квазипериодического сигнала легко записать в виде арифметико-логического выражения. Допустим, что цифровой сигнал задан в виде вектора

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \tag{2}$$

где n — число элементов заданного вектора **X**. Тогда математическое выражение для потенциального кода можно записать в виде

$$n = \left[\frac{t}{T}\right], \ U(t) = \sum_{n=0}^{N} (x_n = 0) U_0 + (x_n = 1) U_1 , \qquad (3)$$

где N — число периодов рассматриваемого сигнала; n — номер периода; T — период.

Для временной зависимости сигнала с амплитудной модуляцией аналогично можно записать

$$n = \left[\frac{t}{T}\right], \ U(t) = \sum_{n=0}^{N} (x_n = 0) U_0 \sin(\omega t) + (x_n = 1) U_1 \sin(\omega t), \qquad (4)$$

а для сигнала с частотной модуляцией —

$$n = \left[\frac{t}{T}\right], \ U(t) = \sum_{n=0}^{N} (x_n = 0) U \sin(\omega_0 t) + (x_n = 1) U \sin(\omega_1 t), \qquad (5)$$

где U — амплитуда сигнала; ω_0 и ω_1 — частота, соответствующая нулевому значению цифрового сигнала и его единичному значению. Аналогично можно записать математическое выражение для сигнала с фазовой модуляцией:

$$n = \left[\frac{t}{T}\right], \ U(t) = \sum_{n=0}^{N} (x_n = 0) U \sin(\omega t + \varphi_0) + (x_n = 1) U \sin(\omega t + \varphi_1), \qquad (6)$$

где φ_0 и φ_1 — фаза, соответствующая нулевому значению цифрового сигнала и его единичному значению.

Пример временной зависимости, описываемой соотношением (4), приведен на рис. 2. Аналогичные временные зависимости можно построить для соотношений (5), (6).

Выражения (2)—(6) можно переписать и в другой эквивалентной форме, например представить их в виде сумм сигма-функций и дельта-функций [1, 2]. Однако преимущество приведенных выше арифметико-логических выражений состоит в том, что они основаны на теории алгоритмов. Поэтому такое представление моделей сигналов в значительной степени упрощает написание программ, предназначенных для их обработки. Особенно эффективно применяются арифметико-логические выражения при использовании матричных макроопераций обработки данных, хотя они могут применятся и при использовании классических средств структурного программирования [1, 2].

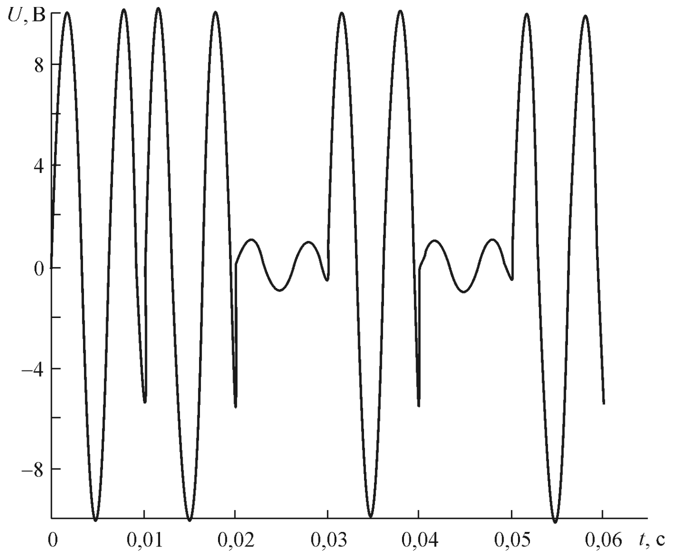

Рис. 2. Форма синусоидального сигнала с амплитудной модуляцией для входного вектора [1, 1, 0, 1, 0, 1]: рабочая частота — 1 кГц; длительность импульсов — 10 мс; $U_1 = 10$ В, $U_0 = 1$В

Анализируя пример 1, можно сделать вывод о том, что разработанные и исследованные в работах [1, 2, 5, 6] средства матричного программирования при корректной записи арифметико-логических выражений (2)—(6) могут быть использованы для описания периодических и квазипериодических функций. Это открывает новые возможности для использования средств матричного программирования при решении стандартных и оригинальных задач теории цифровых сигналов.

Матричный алгоритм вычисления АКФ сигнала. Как известно, АКФ сигнала определяет связь между значениями случайного сигнала в момент времени t и в момент времени $t-\tau$ и определяется из соотношения [7, 8]

$$r(\tau) = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} U(t)U(t-\tau)\,dt, \qquad (7)$$

где T_c — время прохождения сигнала. Если функция цифрового квазипериодического сигнала $U(t)$ задана в виде арифметико-логических выражений вида (2)—(6), интеграл (7) можно вычислить так.

1. Из выражений (2)—(6) вычисляем значения сигнала $U(t)$ в моменты времени t. При этом шаг интегрирования по времени dt определяется исходя из минимальной ошибки вычислений при использовании соответствующего метода численного интегрирования [9].

2. Значения сигнала в момент времени $t-\tau$ определяем из следующего арифметико-логического выражения:

$$U(t-\tau)=0(t<\tau)+U(t-\tau)(t\geq\tau). \tag{8}$$

3. Для всех значений аргумента τ формируются строки матрицы, в которых для различных значений переменной интегрирования t вычисляем значение $U(t)U(t-\tau)$.

4. Выполняем операцию транспонирования полученной матрицы.

5. Выполняем операцию суммирования столбцов матрицы.

6. Все элементы полученного вектора умножаем на шаг интегрирования по времени *dt*. В результате получаем отсчитываемые значения АКФ сигнала (7).

Программа, предназначенная для вычисления АКФ сигнала, написанная на языке программирования системы MatLab, имеет следующий вид.

Пример 3.

```
function acf(vinp,T,timp,U0,U1,w,n)
   if (timp>=T) error (‘Ошибка! Должно выполняться условие…
timp<T’), end;
   if (timp<0) error (‘Ошибка! Время импульса timp должно
быть… положительным’), end;
   if (T<0) error (‘Ошибка! Период следования импульсов T…
должен быть положительным’), end;
   if (n==1)VIMP=formimp(vinp,T,timp,U0,U1); end;
   if (n==2)VIMP=formimpsinamp(vinp,T,U0,U1,w);end;
   if (n==3)VIMP=formimpsinfreq(vinp,T,U0,U1,w);end;
   if (n==4)VIMP=formimpsinfaze(vinp,T,U0,U1,w);end;
   Tsign=T*length(vinp); TAU=Tsign/500;
   Tg=Tsign/10000; NN=round(TAU/Tg);
   Str1=Num2Str(NN); Nit=Tsign/TAU; Str4=Num2Str(length
VIMP));
   Str2=strcat(‘[zeros(1,’,Str1,’),M(ii-1,1:(length(M
ii-1,:))-…‘,Str1,’))]’);
   Macf=recmat(1,Nit,VIMP,Str2,1e-10,1e10);
   Macf2=recmat(1,Nit,Macf,’M(1,:).*M(ii,:)’,1e-50,1e50);
   Macf2(1,:)=VIMP.*VIMP;
   figure
   Tout=0:Tg:Tg*(length(VIMP)-1);
   Vacf=sum(Macf2’)*Tg;
   Tout=0:Tsign/500:Tsign-Tsign/500;
   plot(Tout,Vacf)
return
```

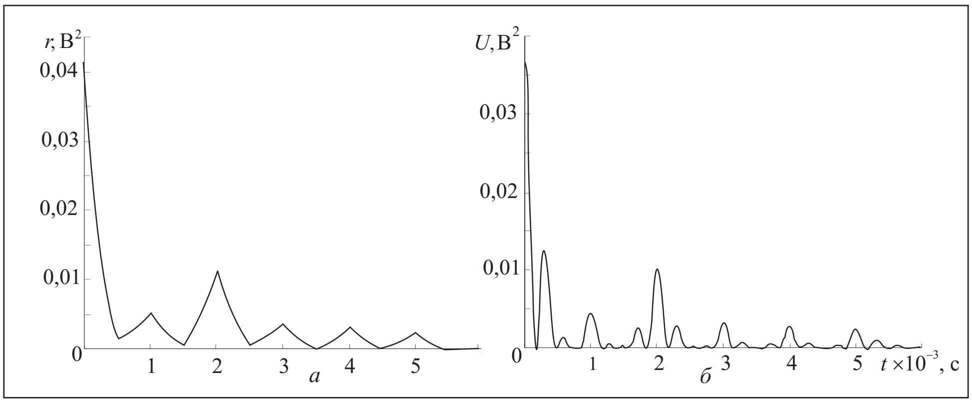

Рис. 3. Автокорреляционная функция импульсного сигнала (*а*) и цифрового сигнала с амплитудной модуляцией (*б*) для входного вектора [1, 1, 0, 1, 0, 1]: *а* — рабочая частота — 1 кГц; длительность импульсов — 0,5 мс; *б* — рабочая частота — 10 кГц

На рис. 3 приведены графики АКФ для импульсного кода и для сигнала с амплитудной модуляцией. Аналогично можно получить АКФ для сигналов с фазовой и частотной модуляцией.

Перспективы дальнейших исследований использования средств матричного программирования для анализа свойств цифровых сигналов. Форма представления временных зависимостей сигналов в виде соотношений (2)—(6) очень удобна при написании программ для обработки сигналов и анализа их свойств. Приведенная в примере 3 программа, предназначенная для расчета и анализа свойств АКФ, является лишь одной из возможных. Так же просто можно рассчитать взаимную корреляционную функцию двух сигналов. Для этого достаточно в полученной матрице для АКФ заменить первую строку вектором второго сигнала. В работе [1] приведена функция для расчета частотного спектра периодических сигналов.

Еще более широкие возможности открываются при использовании матричных алгоритмов для построения цифровых кодов. Многие методы кодирования непосредственно основаны на теории матриц и на теории групп Галуа. При этом группы можно рассматривать как векторы, определяя только правила работы с ними. Матричные методы в теории кодирования используются также для определения синдрома ошибки. Подробно матричные методы построения и обработки цифровых кодов рассмотрены в работе [10].

Использование в теории обработки сигналов арифметико-логических выражений вида (2)—(6) имеет неоспоримые преимущества по сравнению со стандартными средствами структурного программирования. Прежде всего, это простота и эффективность написания, тестирования и отладки программных средств, что особенно важно при создании и тестировании новых алгоритмов обработки сигналов. Как указано в работе [5], преимущество средств матричного программирования состоит в том, что в строках формируемых матриц сохраняются результаты всех промежуточных вычислений, в то время как при прохождении команд цикла они утрачиваются. С одной стороны, это в значительной степени упрощает анализ результатов вычислений и поиск логических ошибок в написанной программе. С другой стороны, сохранение всех результатов промежуточных вычислений требует резервирования большого количества оперативной памяти. Однако при стремительном развитии вычислительной техники эта проблема в настоящее время не является существенной. Кроме того, не всегда удобно записывать алгоритм обработки сигнала в виде строковых переменных, как это сделано в примерах 1—3.

Выводы

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что средства матричного программирования, предложенные в работах [2, 5, 6], могут быть успешно использованы для анализа свойств цифровых квазипериодических сигналов. Созданные программные средства достаточно просты и эффективны. Они написаны с использованием средств функционального программирования системы MatLab в виде небольших функций, что позволяет добавлять новые функции, создавая новые библиотеки.

Предложенная методика программирования функций обработки сигналов может представлять интерес для широкого круга специалистов, занимающихся теорией цифровых сигналов. Особенно эффективно применение данной методики при создании новых математических методов и алгоритмов обработки сигналов.

Mathematical models of quasi-periodic digital signals, adjusted for their description using matrix macrooperations, are described in the article. The main means for forming such mathematical models of signals are the arithmetic-logic equations. Autocorrelation functions for different digital signals have been calculated using the elaborated means of modeling. The functions for processing of digital signals are realized with the use of means of matrix programming in the MatLab system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельник І.В.* Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв’язання задач із електроніки: навч. посібник. Т. 1. Основи роботи та функції системи. — К. : Університет «Україна», 2009. — 507 с.
2. *Мельник І.В.* Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв’язання задач із електроніки: навч. посібник. Т. 2. Основи програмування та розв’язання прикладних задач. — К. : Університет «Україна», 2009. — 507 с.

3. *Дьяконов В.П.* MatLab 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Полное руководство пользователя. — М. : Салон-Пресс, 2002. — 768 с.
4. *Мартынов Н.Н.* Введение в MatLab 6. — М. : Кудиц-Образ, 2002. — 352 с.
5. *Мельник И.В.* Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении прикладных задач // Электрон. моделирование. — 2009. — **31**, № 3. — С. 37—51.
6. *Мельник И.В., Шинкаренко Н.В.* Анализ алгоритмических особенностей вычисляемых матриц при решении задач программирования средствами матричных макроопераций. // Там же. — 2011. — **33**, № 2. — С. 81—92.
7. *Кузьмин И.В., Кедрус В.А.* Основы теории информации и кодирования. — К. : Вища школа, 1977. — 238 с.
8. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. / Пер. с англ. — М. : Изд. дом «Вильямс», 2003. — 1104 с.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М. : Наука, 1989. — 432 с.
10. *Берлекэмп Э.* Алгебраическая теория кодирования / Пер. с англ. — М. : Мир, 1971. — 478 с.

Поступила 11.02.13

СЕМЕНКО Анатолий Илларионович, д-р техн. наук, профессор факультета телекоммуникаций Государственного университета информационно-коммуникационных технологий, лауреат Государственной премии СССР. В 1960 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование телекоммуникационных систем и сигналов.

МЕЛЬНИК Игорь Витальевич, д-р техн. наук, доцент кафедры электронных приборов и устройств Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1989 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование электронно-лучевых технологических устройств, программирование и теория алгоритмов.