УДК 519.226

Э. Г. ГЛАДКИЙ

БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ С ДОРАБОТКАМИ

Для биномиальной схемы испытаний анализируются традиционные способы оценки вероятности безотказной работы (ВБР) системы по результатам испытаний с доработками (модели роста надежности; модели, учитывающие эффективность проведенных доработок; байесовские марковские модели) и показаны их недостатки. Для определения надежности по результатам испытаний с доработками предложено использовать модифицированный байесовский подход. Отличительной особенностью разработанной модели является использование в качестве априорной информации точечной оценки надежности, определенной на основе анализа эффективности проведенных доработок, и промежутка неопределенности для неизвестного значения априорного среднего квадратического отклонения. Получены расчетные соотношения для определения апостериорной оценки надежности технической системы и ее среднего квадратического отклонения в процессе экспериментальной отработки с учетом доработок и показано практическое применение предложенной математической модели. Разработанная математическая модель позволяет достаточно гибко учитывать влияние на оценку ВБР проводимых в процессе экспериментальной отработки системы доработок.

Для біноміальної схеми випробувань проаналізовано традиційні способи оцінки ймовірності безвідмовної роботи (ЙБР) системи за результатами випробувань з доопрацюваннями (моделі росту надійності, моделі, що враховують ефективність проведених доробок, байєсовські марковські моделі) і показано їх недоліки. Для визначення надійності за результатами випробувань з доопрацюваннями запропоновано використовувати модифікований байєсовський підхід. Відмінною особливістю розробленої моделі є використання в якості апріорної інформації точкової оцінки надійності, яка визначена на основі аналізу ефективності проведених доопрацювань, та проміжку невизначеності для невідомого значення апріорного середнього квадратичного відхилення. Отримано розрахункові співвідношення для визначення апостеріорної оцінки надійності технічної системи і її середнього квадратичного відхилення в процесі експериментального відпрацювання з урахуванням доопрацювань і показано практичне використання запропонованої математичної моделі. Розроблена математична модель дозволяє гнучко враховувати вплив на оцінку ЙБР доопрацювань, що проводяться в процесі експериментального відпрацювання системи.

The traditional techniques of assessments of chances of failure based on the results of development work tests (reliability-growth models, models that take into account the efficiency of development works, Bayesian Markov models) for a binomial test pattern are analysed and their disadvantages are reported. In order to determine the reliability based on the results of development tests, the modified Bayesian approach is proposed. A special feature of the model proposed is to use as a prior information the point estimate of reliability determined by the analysis of the effectiveness of development works and the uncertainty interval for an unknown value of a priori standard deviation. The calculated relations for a posterior evaluation of the technical system reliability and its standard deviation in the process of experimental testing considering development works are obtained and a practical application of the proposed mathematical model is proposed. The developed mathematical model allows the consideration of the effect of development works carried out during experimental system tests on assessments of chances of failure.

Ключевые слова: *биномиальная схема испытаний, доработка, вероятность безотказной работы, модель роста надежности, байесовские методы, эффективность проведенной доработки.*

Важным этапом создания сложных технических систем является экспериментальная отработка. Она представляет собой эффективный способ доведения надежности системы до требуемого уровня путем выявления и устранения причин скрытых дефектов, которые привели к отказам. Для устранения зафиксированных отказов проводятся мероприятия, называемые доработками. Связаны доработки с частичным изменением конструкции агрегатов и узлов, входящих в состав системы, условий и режимов ее функционирования, усилением контроля изготовления элементов системы и ее сборки. Проведение доработок приводит к ступенчатому изменению надежности технической системы.

© Э. Г. Гладкий, 2015

Определение вероятности безотказной работы (ВБР) системы в условиях проводимых доработок представляет собой важную задачу. Дадим краткую характеристику некоторым методам, используемым для оценки надежности систем с учетом проводимых доработок. При этом будем рассматривать биномиальную схему испытаний, когда в экспериментах отслеживается только факт наличия отказов.

1. Модели роста надежности

В практических расчетах используется большое количество моделей роста надежности (МРН) [1, 2, 5, 6]. Для их построения рассматриваются серии испытаний между доработками. По оценкам показателя безотказности на этих этапах строится аппроксимирующая кривая – кривая роста надежности. На практике широкое распространение нашла экспоненциальная МРН

$$P_i = 1 - a \cdot \exp(-i \cdot b), \tag{1}$$

где P_i – надежность системы после i-той проведенной доработки; a, b – коэффициенты, определяемые путем обработки статистики по результатам испытаний. Неизвестные параметры МРН определяются с использованием метода максимума правдоподобия [1, 5] либо метода наименьших квадратов [4].

Выскажем ряд замечаний относительно МРН. Согласно методике их построения, ход отработки разбивается на серии испытаний между доработками (рисунок 1). На рисунке n, d – количество испытаний и зафиксированных отказов в серии испытаний, ν – количество проведенных доработок системы. Отказы для каждой серии объединяются в одну общую совокупность, при этом появление отказов одних и тех же типов в разных сериях не отслеживается. Таким образом, ограничение серии количеством испытаний между i-ой и (i+1)-ой доработками приводит к потере информации о зафиксированных типах отказов в предыдущих сериях и о действительной вероятности их появления. К тому же в процессе отработки объемы серий между доработками могут быть незначительными, а, значит, применение статистических методов может оказаться недостаточно эффективным.

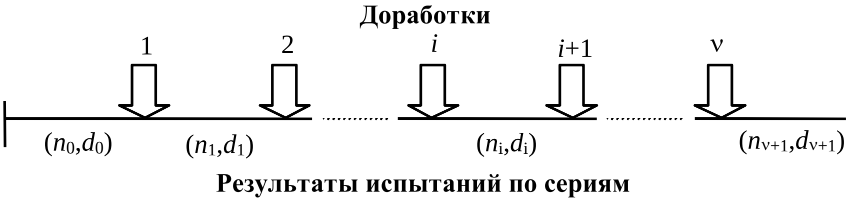

Рис. 1 – Разбиение хода отработки на серии испытаний для моделей роста надежности

2. Подход, основанный на оценке вероятности отсутствия отказов после проведения доработок

Устранить некоторые недостатки МРН позволяет подход, основанный на оценке вероятности отсутствия отказов после проведения доработок [3, 9]. Для этого подхода характерным является классификация отказов, зафиксированных в ходе отработки, по типам проявления. Показатель безотказности в предположении независимости отказов различных типов определяется по формуле:

$$P = \prod_{j=1}^{k} P^{(j)}(m_j), \quad (2)$$

где $P^{(j)}(m_j)$ – вероятность отсутствия отказа с j-ым типом проявления после проведения по данному типу отказа m_j доработок, k – количество типов отказов, по которым проводились доработки.

Для каждого типа отказов результаты испытаний системы делятся на серии (рисунок 2). Граница серии соответствует номеру изделия, предшествующему проведению доработки.

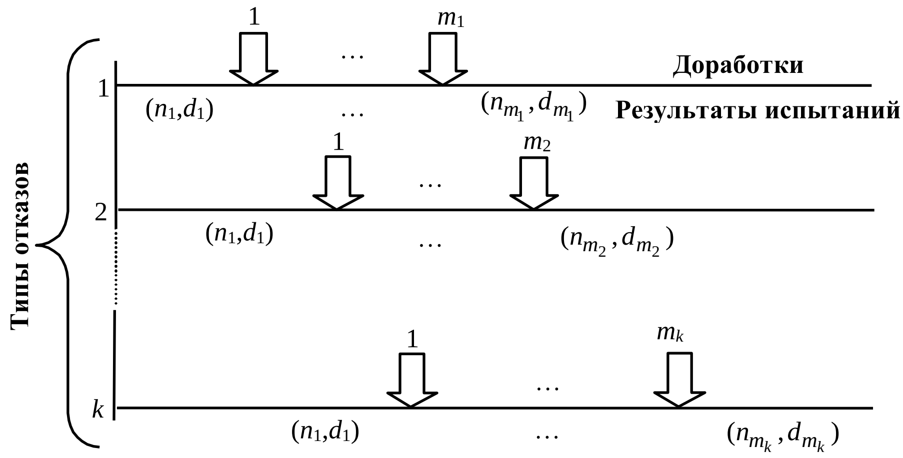

Рис. 2 – Разбиение хода отработки в соответствии с типами отказов

Вероятность отсутствия отказа после проведения доработки оценивается с учетом ее эффективности (привела доработка к устранению причин отказа или нет). Делается это следующим образом. Пусть имеются 2 серии испытаний: до проведения доработки проведено n_1 испытаний, в которых зафиксировано d_1 отказов; после доработки проведено n_2 испытаний и зафиксировано d_2 отказов. В случае, если доработка неэффективна (не изменила надежности системы), обе выборки (n_1, d_1) и (n_2, d_2) принадлежат одной генеральной совокупности и ВБР системы по данному типу отказов может быть определена так

$$\hat{P}_{1,2} = 1 - \frac{d_1 + d_2}{n_1 + n_2}.$$

Если доработка оказалась эффективной, надежность системы по рассматриваемому типу отказов должна оцениваться только по результатам испытаний доработанных систем

$$\hat{P}_2 = 1 - \frac{d_2}{n_2}$$

(формула используется в том числе и для случая, когда $d_2 = 0$).

Путем усреднения информации о безотказности системы до и после доработки с использованием теоремы о полной вероятности в [9] определяется вероятность отсутствия отказа после проведения доработки

$$\hat{P} = R \cdot \hat{P}_{1,2} + (1-R)\hat{P}_2, \qquad (3)$$

где R – весовой коэффициент, который представляет собой вероятность того, что проведенная доработка не изменила надежности системы.

Вероятности $P^{(j)}(m_j)$ оцениваются согласно (3) для последней проведенной по каждому типу отказов доработки. При этом данные до проведения последней доработки: количество испытаний и зафиксированных отказов (n_1, d_1), пересчитываются с учетом всех предыдущих доработок, проведенных по данному типу отказов [9].

Весовой коэффициент R, входящий в (3), определяется с использованием метода проверки статистических гипотез и выражает вероятность выбора гипотезы об однородности статистических данных до и после доработки. Он определяется следующим образом [9]

$$R = \sum_{r=d_1}^{\hat{d}} \frac{C_{n_1}^{r} C_{n_2}^{d-r}}{C_n^d}, \qquad (4)$$

где $\hat{d} = \min(d, n_1)$, $d = d_1 + d_2$, $n = n_1 + n_2$.

Величина $E = 1–R$ может рассматриваться как мера эффективности проведенных доработок.

Для такого подхода характерным является выделение серий испытаний по каждому типу отказов отдельно. При этом не учитывается, что для каждого типа отказов система в процессе выделенных серий испытаний может изменяться, поскольку могут быть проведены доработки по какому-либо другому типу отказов. К тому же формула (2) не дает учесть скрытые причины отказов, которые сохраняются в системе.

Разновидностью указанного способа оценки надежности является подход, основанный на переводе испытаний с отказами, по которым проведены эффективные доработки, в разряд незачетных и исключении их из общей статистики результатов испытаний. Испытание, в котором имел место отказ, переводится в разряд незачетных, если причина отказа установлена, проведены мероприятия по ее устранению и эффективность этих мероприятий подтверждена последующими безотказными по данному типу отказов испытаниями. Эффективность проведенной доработки подтверждается с использованием метода проверки статистических гипотез. Для некоторого заданного уровня доверия γ определяется количество требуемых успешных по данному типу отказа последующих испытаний [3]. Подобная модель обладает несомненной простотой и наглядностью. В пользу использования такого подхода свидетельствует тот факт, что выяснить причины отказов помогает устанавливаемая на испытываемые системы телеметрия. Она позволяет получать достаточно полную информацию о протекающих процессах, а значит, с большой долей достоверности выяснить причины отказов. Установить причины имевших место отказов также позволяет компьютерное моделирование.

Несмотря на простоту, у последнего подхода имеются существенные недостатки. Во-первых, он обладает большой долей дискретности: пока для подтверждения эффективности не набрано требуемое количество успешных испытаний, отказ считается зачетным (при этом с каждым безотказным испытанием уверенность в эффективности проведенных мероприятий возрастает). Во-вторых, вопрос перевода отказа в разряд незачетных напрямую связан с назначением уровня доверительной вероятности γ, что естественно вносит в процесс оценки надежности определенную долю субъективизма.

3. Байесовские модели оценки надежности по результатам испытаний с доработками

Из всего множества байесовских моделей рассмотрим только следующую процедуру байесовского статистического оценивания надежности технической системы по результатам испытаний с доработками [10]. Точечные оценки ВБР в сериях испытаний между доработками $P_0, \ldots, P_\nu$ полагаются случайными величинами и интерпретируются как простая марковская последовательность. Предполагается, что доработки могут приводить к следующим трем исходам:

$$P_i < P_{i-1};\ P_i = P_{i-1};\ P_i > P_{i-1}\ (i = \overline{1,\nu}),$$

где P_{i-1}, P_i – ВБР, достигнутые для (i–1)-ой и i-ой серий испытаний соответственно. Вероятности указанных состояний принимаются равными

$$\varepsilon_i = \text{Вер}\{P_i > P_{i-1}\};\ \omega_i = \text{Вер}\{P_i = P_{i-1}\};\ 1-\varepsilon_i-\omega_i = \text{Вер}\{P_i < P_{i-1}\}\ \text{для}\ i = \overline{1,\nu}.$$

В [10] автором определены априорная начальная ($h_0(P_0)$), а также априорные ($h_i(P_i/P_{i-1})$) и апостериорные ($\hbar_i(P_i/P_{i-1},I_i)$) переходные плотности распределения показателя безотказности для каждой серии испытаний

$$h_0(P_0) = \frac{1}{1-P_н},$$

$$h_i(P_i/P_{i-1}) = \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon_i-\omega_i}{P_{i-1}}, & 0 \le P_i < P_{i-1} \\ \omega_i, & P_i = P_{i-1} \\ \dfrac{\varepsilon_i}{1-P_{i-1}}, & P_{i-1} < P_i \le 1 \end{cases},$$

$$\hbar(P_i/P_{i-1}, I_i) = \frac{h_i(P_i/P_{i-1})\, l_i(P_i/I_i)}{\int_0^1 h_i(p/P_{i-1})\, l_i(p/I_i)\, dp}\ (i = \overline{1,\nu}),$$

где $P_н$ – начальный уровень надежности технической системы до проведения испытаний; $l(p/I_i) = C_n^d p^{n-d}(1-p)^d$ – функция правдоподобия, соответствующая биномиальной схеме испытаний; I_i – результаты испытаний в i-ой серии (n, d).

Далее задача сводится к определению безусловной апостериорной плотности $\hbar_i(P_i)$

$$\hbar_i(P_i) = \int_{P_н}^1 \int_0^1 \underset{(i-1)}{\ldots} \int_0^1 \hbar_0(P_0) \prod_{j=1}^{i} \hbar\left(P_j/P_{j-1}, I_j\right) dP_0 \cdot \ldots \cdot dP_i.$$

С ее использованием определяются апостериорная оценка надежности и ее среднее квадратическое отклонение для i-ой серий испытаний.

Приведенная байесовская модель имеет ряд недостатков. Во-первых, как отмечено в [10], в плане прикладного использования модель имеет существенную сложность, особенно в общем случае при получении $\hbar_i(P_i)$. Во-вторых, разработчик, исходя из субъективных соображений, должен назначить вероятности ε_i, ω_i, от которых существенно зависят оценки ВБР. Однако несомненным преимуществом такой модели является использование для оценки надежности в сериях байесовской методологии, что представляется обоснованным с учетом малых объемов испытаний между проводимыми доработками.

4. Модель оценки надежности системы с учетом проводимых доработок, использующая теорию состояния

В работе [7] автором предложена модель точечной оценки надежности ракет-носителей и их систем, основанная на теории состояний, которая в некотором смысле обобщает подход, описанный в разделе 2. При построении расчетных соотношений было принято, что доработка приводит к двум последствиям: увеличивает надежность системы (доработка эффективная) либо оставляет надежность на прежнем уровне (доработка неэффективная). В ракетной технике подобное обстоятельство обусловлено большим объемом получаемых телеметрических данных и широкими возможностями компьютерного моделирования физических процессов. Таким образом, при проведении доработок значение показателя безотказности системы должно находиться в интервале между оценкой надежности, полученной с учетом всех имевших место отказов, и оценкой надежности, рассчитаной с учетом того, что отказы, по которым проведены эффективные доработки, считаются незачетными.

Будем предполагать, что в испытаниях зафиксировано k типов отказов и по всем из них проведены доработки. В соответствии с формулой полной вероятности ВБР системы с учетом проводимых доработок будет определяться следующим образом

$$\hat{P} = \hat{P}_0 \cdot P(B_0) + \sum_{i=1}^{C_k^1} \hat{P}_1^{(i)} \cdot P(B_1^{(i)}) + \sum_{i=1}^{C_k^2} \hat{P}_2^{(i)} \cdot P(B_2^{(i)}) + \ldots + \hat{P}_k \cdot P(B_k), \qquad (5)$$

где $\hat{P}_j^{(\bullet)}$ – оценка ВБР с учетом незачетных j типов отказов; $P(B_j^{(\bullet)})$ – вероятность того, что по j типам отказов проведены эффективные доработки и отказы указанных типов переведены в разряд незачетных. Оценка $\hat{P}_j^{(\bullet)}$ определяется по формулам

$$\hat{P}_j = 1 - \frac{d - \sum_{i=1}^{j} d_i}{n - \sum_{i=1}^{j} d_i},$$

если $d - \sum_{i=1}^{j} d_i > 0$, и

$$\hat{P}_k = 1 - \frac{1}{n - \sum_{i=1}^{k} d_i + 2},$$

если все типы отказов переведены в разряд незачетных (d_i – количество отказов i-го типа, по которым проведены эффективные доработки).

Вероятность $P(B_j^{(\bullet)})$ будет равна произведению вероятностей проведения эффективных доработок по j типам отказов и неэффективных доработок по остальным k–j типам отказов. Например, $P(B_k) = \prod_{i=1}^{k} E_i$ (E_i – эффективность проведенной i-той доработки, определяемая выше).

Если отказы каждого типа носили единичный характер, то каждому элементу группы B_j соответствует одна вероятность $\hat{P}_j$. Формула для расчета ВБР с учетом доработок в этом случае будет иметь вид

$$\hat{P} = \hat{P}_0 \cdot P(B_0) + \hat{P}_1 \sum_{i=1}^{C_k^1} P(B_1^{(i)}) + \hat{P}_2 \sum_{i=1}^{C_k^2} P(B_2^{(i)}) + \ldots + \hat{P}_k \cdot P(B_k) = \sum_{j=0}^{k} P_j \cdot P(\overline{B}_j), \quad (6)$$

где обозначено $P(\overline{B}_j) = \sum_{j=1}^{C_k^i} P(B_j^{(i)})$.

По-видимому, подобная модель оказывается наиболее эффективной для точечной оценки надежности для этапа эксплуатации системы, когда количество испытаний в сериях достаточно велико, а отказов фиксируется незначительное количество.

К сожалению, такой подход не позволяет так же просто определять среднее квадратическое отклонение полученной точечной оценки надежности $\hat{P}_j$. Используя средние квадратические отклонения оценок $\sigma_{\hat{P}_i}$, можно с использованием теоремы о дисперсии записать выражение для $\sigma_{\hat{P}}$. Например, для (6) имеем

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \sum_{i=0}^{k} \left[P\left(\overline{B}^{(i)}\right) \right]^2 \sigma_{\hat{P}_i}^2 . \quad (7)$$

Однако расчеты с использованием (7) показывают, что возможна ситуация, когда $\sigma_{\hat{P}} < \sigma_{\hat{P}_k}$, то есть среднее квадратическое отклонение точечной оценки надежности $\sigma_{\hat{P}}$ оказывается меньше среднего квадратического отклонения оценки надежности системы, когда все проводимые доработки считаются эффективными. Недостаток соотношения (7) для определения дисперсии (или среднего квадратического отклонения) продемонстрируем на следующем простом примере. Предположим, что у нас в ходе отработки системы был отмечен один отказ, по которому проведена доработка. Вероятность того, что доработка была эффективной, обозначим через e. Также будем полагать, что дисперсия оценки надежности системы для случая, когда доработка была неэффективной равна D_0, а для случая эффективной доработки соответственно D_1 ($D_0 > D_1$). В соответствии с формулой (7) имеем

$$D = e^2 D_1 + (1-e)^2 D_0 .$$

Исследуем полученное соотношение, для чего проведем преобразование

$$D = e^2 D_1 + D_0 - 2eD_0 + e^2 D_0 = e^2 (D_0 + D_1) - 2eD_0 + D_0 .$$

Рассмотрим последнее выражение как функцию эффективности проведенной доработки e. Она представляет собой квадратичную параболу с ветвями, направленными вверх. Найдем абсциссу вершины параболы, для чего определим производную по e и приравняем ее нулю. Имеем

$$2e(D_0 + D_1) - 2D_0 = 0 ,$$

откуда

$$e_* = \frac{D_0}{D_0 + D_1} .$$

Из последнего соотношения следует, что абсцисса вершины параболы e_* всегда лежит в интервале [0, 1], а значит, ее ордината оказывается меньше, чем D_1 (рисунок 3). Таким образом, имеется интервал значений e, для которых дисперсия оценки $\sigma^2_{\hat{P}}$ оказывается меньше, чем D_1 (дисперсии для случая, когда отказ переведен в разряд незачетных). Последнее выглядит слишком оптимистичным.

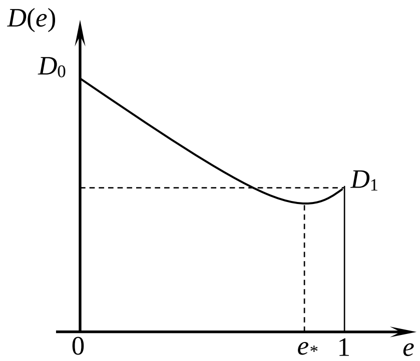

Рис. 3 – Изменение среднего квадратического отклонения оценки надежности в зависимости от эффективности проведенной доработки

5. Байесовская модель оценки надежности по результатам испытаний с доработками

Для более эффективного использования в расчетах надежности системы имеющейся информации по результатам отработки, имеет смысл сохранять серии испытаний между доработками (после каждой доработки изменяется испытываемое изделие), отслеживая при этом эффективность проведенных доработок. С этой целью будем использовать байесовский подход, поскольку объем испытаний в сериях между доработками чаще всего незначительный. Таким образом, основными данными для расчета надежности системы в i-ой серии является опытная информация n_i, d_i. В качестве априорной информации будем использовать данные об эффективности устранения зафиксированных в предыдущих сериях отказов. Для каждого типа отказов (зафиксированные в испытаниях отказы предварительно классифицируются по типам) указанная информация будет включать количество испытаний и количество отказов до проведения доработки, а также количество испытаний, проведенных после доработки $\left\{n_1^{(j)}, d_1^{(j)}; n_2^{(j)}\right\}$ $j = \overline{1, k}$. При этом, если отказы одного и того же типа повторяются после проведенной доработки, такая доработка полагается неэффективной (или малоэффективной) и серия до проведения доработки объединяет все предшествующие серии, в которых зафиксированы отказы данного типа. Такое предположение идет в запас надежности. Поскольку полагается, что в серии испытаний n_2 после доработки отказов не было ($d_2 = 0$), вероятность того, что доработка не привела к повышению надежности, будет определяться исходя из (4) следующим образом:

$$R = \frac{C_{n_1}^{d_1}}{C_n^{d_1}},$$

где $n = n_1 + n_2$.

После каждой проведенной серии испытаний значение суммарного количества зафиксированных типов отказов в общем случае изменяется. Представим количество зафиксированных типов отказов по сериям в виде вектора $K = \{k_0, \ldots, k_\nu\}$, где $k_i \le k_{i+1}$, $k_\nu = k$ – общее количество зафиксированных в ν+1 сериях отказов. Соответственно после каждой серии испытаний можно определить вероятности отсутствия эффективности проводимых мероприятий по зафиксированным типам отказов. Результат определения указанных вероятностей по всем сериям также целесообразно представить в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} R_1^{(0)} & \ldots & R_{k_0}^{(0)} & & & \\ R_1^{(1)} & \ldots & R_{k_0}^{(1)} & \ldots & R_{k_1}^{(1)} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ R_1^{(\nu)} & \ldots & R_{k_0}^{(\nu)} & \ldots & \ldots & R_{k_\nu}^{(\nu)} \end{bmatrix},$$

где в строках записаны вероятности отсутствия эффекта проводимых доработок по сериям, в столбцах – вероятности отсутствия эффекта проводимых мероприятий по зафиксированным типам отказов. Для нулевой серии все значения $R_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, k_0}$) равны 1, поскольку никаких мероприятий по устранению отказов еще не проводилось.

Теперь покажем, каким образом проводится оценка надежности для i-ой серии испытаний с использованием байесовского подхода [8]. Для данных, полученных в (i–1)-ой серии испытаний, с использованием формул (5) или (6) оценивается точечное значение показателя безотказности. Полученное таким образом значение показателя $\hat{P}$ трактуется как априорное значение ВБР. Поскольку для полученной априорной оценки надежности, как было отмечено выше, не удается указать среднее квадратическое отклонение, поступим следующим образом. Несложно увидеть, что среднее квадратическое отклонение оценки надежности $\hat{P}$, получаемой согласно (5) или (6), находится в интервале $\left[\sigma_{\hat{P}_k}, \sigma_{\hat{P}_0}\right]$, где $\sigma_{\hat{P}_0}$ – среднее квадратическое отклонение для случая, когда проводимые доработки не дали эффекта и в расчете ВБР учитываются все k_{i-1} типов отказов; $\sigma_{\hat{P}_k}$ – среднее квадратическое отклонение для случая, когда k_{i-1} типов отказов, вследствие проведения эффективных доработок, переведены в разряд незачетных. Указанное вероятностное предположение будем выражать в виде некоторой априорной плотности распределения $h(\sigma_P)$. В качестве последней выберем равномерный закон

$$h(\sigma_P) = \frac{1}{\sigma_{\hat{P}_0} - \sigma_{\hat{P}_k}}.$$

В соответствии со стандартной байесовской процедурой определим апостериорную плотность распределения среднего квадратического отклонения с учетом полученной в результате эксперимента информации n и d (данные по i-ой серии испытаний). Функция правдоподобия для биномиальной схемы испытаний имеет вид

$$l(P,n,d) = C_n^d P^{n-d}(1-P)^d.$$

Проведем перепараметризацию функции правдоподобия относительно σ_P, которая связана с оценкой надежности следующим образом

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}.$$

Из последнего соотношения путем решения квадратного уравнения

$$P^2 - P + n\sigma_P^2 = 0$$

получаем два корня

$$P_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4n\sigma_P^2}}{2}, \tag{8}$$

для которых знак «+» соответствует вероятности P, а знак «–» соответственно $1 - P$.

С учетом (8) функцию правдоподобия можно переписать так:

$$l(\sigma_P,n,d) = 2^{-n} C_n^d \left(1+\sqrt{1-4n\sigma_P^2}\right)^{n-d} \left(1-\sqrt{1-4n\sigma_P^2}\right)^d.$$

В итоге апостериорная функция плотности $\hbar(\sigma_P)$ получается следующим образом:

$$\hbar(\sigma_P) = \frac{h(\sigma_P)\cdot l(\sigma_P,n,d)}{\int\limits_{\sigma_{\hat{P}_k}}^{\sigma_{\hat{P}_0}} h(\sigma_P)\cdot l(\sigma_P,n,d)d\sigma_P}, \quad \sigma_{\hat{P}_k} < \sigma_P \le \sigma_{\hat{P}_0}.$$

Интеграл в знаменателе не выражается в квадратурах, поэтому для его вычисления необходимо использовать численные процедуры. В качестве апостериорной оценки надежности будем использовать математическое ожидание

$$P_* = \int_{\sigma_{\hat{P}_k}}^{\sigma_{\hat{P}_0}} P(\sigma_P)\cdot\hbar(\sigma_P)d\sigma_P \,,$$

где $P(\sigma_P) = P_0 - \dfrac{d - n(1-P_0)}{n + \dfrac{P_0(1-P_0)}{\sigma_P^2} - 1}$ – выражение для оценки ВБР, соответствующее полной априорной определенности, когда априорной информации в виде (P_0, σ_{P_0}) в соответствие ставится априорное бета-распределение

$$f(p) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}.$$

Точность полученной апостериорной оценки надежности характеризуется средним квадратическим отклонением, которое определяется следующим образом

$$\sigma_* = \int_{\sigma_{\hat{P}_k}}^{\sigma_{\hat{P}_0}} \sigma(\sigma_P)\cdot\hbar(\sigma_P)d\sigma_P \,,$$

где $\sigma(\sigma_P) = \sigma_p \sqrt{\dfrac{P(\sigma_P)(1-P(\sigma_P))}{P_0(1-P_0)+n\sigma_P^2}}$.

В качестве примера расчета надежности системы по результатам испытаний с доработками возьмем исходные данные работы [10], включающие 5 серий по 10 испытаний, в которых проведено 4 доработки, и этап зачетных испытаний (ЗИ) из 10 испытаний, подтверждающих качество системы (таблица 1). Перед зачетной серией испытаний доработка изделия не проводилась.

Расчеты показателя безотказности проводились с использованием традиционных статистических методов, а также с использованием модели роста надежности (1), параметры которой определялись по методу максимума правдоподобия. Результаты расчетов приведены в таблице 1. Там же приведены значения показателя безотказности, непосредственно заимствованные из [10].

Таблица 1 – Результаты расчета ВБР традиционными методами

Номер серии i	0	1	2	3	4	ЗИ
Результаты испытаний						
n_i, d_i	10, 1	10, 1	10, 1	10, 0	10, 0	10, 0
Статистические оценки надежности по сериям						
$\hat{P}_i$ $\sigma_{\hat{P}_i}$	0,9 0,0949	0,9 0,0949	0,9 0,0949	0,9167 0,0767	0,9545 0,0434	
Оценка надежности системы без учета доработок						
N_i, D_i $\hat{P}_i'$ $\sigma_{\hat{P}_i'}$	10, 1 0,9 0,0949	20, 2 0,9 0,0671	30, 3 0,9 0,0548	40, 3 0,925 0,0416	60, 3 0,95 0,0281	
Экспоненциальная модель роста надежности (1)						
P_i	0,8597	0,9256	0,9605	0,9791	0,9889	
Методика раздела 2						
P_i	0,9	0,9237	0,9325	0,96	0,9826	
Значения показателя безотказности, заимствованные из работы [10]						
$\hat{P}_i''$ $\sigma_{\hat{P}_i''}$	0,9507 0,0256	0,9634 0,0214	0,9752 0,0203	0,9895 0,0198	0,9913 0,0187	0,9925 0,0176

Примечания:

1. В таблице обозначено $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$; $D_i = \sum_{j=1}^{i} d_j$.

2. Четвертый этап и этап ЗИ объединены в одну серию, поскольку между ними доработку системы не проводили.

В работе [10] для указанных исходных данных получены значения ВБР, которые превышают уровень 0,99. Это явилось следствием того, что начальный уровень надежности системы принимался на уровне 0,9. Слишком оптимистичными также представляются значения средних квадратических отклонений оценок ВБР, особенно для первых серий.

Значения показателя безотказности, полученные с использованием модели роста надежности (1), в последних сериях представляются несколько завышенными.

С использованием предложенной в статье методики расчет показателя безотказности системы проводился для двух случаев: случая A, когда все зафиксированные отказы относились к разным типам, и случая B, когда в первой и третьей серии были зафиксированы отказы одного типа. Матрицы вероятностей, определяющих отсутствие эффекта проведенных доработок по сериям, выглядят для указанных рассматриваемых случаев следующим образом:

$$\text{случай } A - R = \begin{bmatrix} 1 & - & - \\ 0{,}526 & 1 & - \\ 0{,}345 & 0{,}690 & 1 \\ 0{,}263 & 0{,}526 & 0{,}769 \\ 0{,}172 & 0{,}345 & 0{,}508 \end{bmatrix}; \text{ случай } B - R = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 0{,}526 & 1 \\ 1 & 0{,}690 \\ 0{,}558 & 0{,}513 \\ 0{,}246 & 0{,}339 \end{bmatrix}.$$

Результаты расчетов ВБР, полученные с использованием разработанной методики, приведены в таблице 2. Там же для каждой серии приведены значения показателя безотказности, определенные с использованием формул (5), (6) (априорные точечные оценки), а также промежутки неопределенности для среднего квадратического отклонения точечной оценки надежности.

Таблица 2 – Результаты расчета ВБР с использованием предлагаемой байесовской модели

Номер серии i	0	1	2	3	4	ЗИ
n_i, d_i	10, 1	10, 1	10, 1	10, 0	10, 0	10, 0
Случай А. Все зафиксированные отказы разного типа						
$\hat{P}_{*i}$ σ_{*i}	0,9 0,0949	0,9 0,0649	0,9150 0,0498	0,9467 0,0336	0,9727 0,0212	
$\hat{P}_i$ $\lfloor \sigma_{\hat{P}_k}, \sigma_{\hat{P}_0} \rfloor$	-	0,9224 [0,0476; 0,0671]	0,9304 [0,0333; 0,0548]	0,9579 [0,0250; 0,0416]	0,9780 [0,0167; 0,0281]	
Случай В. В первой и третьей сериях произошли отказы одного типа						
$\hat{P}_{*i}$ σ_{*i}	0,9 0,0949	0,9 0,0649	0,9150 0,0498	0,9271 0,0354	0,9685 0,0219	
$\hat{P}_i$ $\lfloor \sigma_{\hat{P}_k}, \sigma_{\hat{P}_0} \rfloor$	-	0,9224 [0,0476; 0,0671]	0,9096 [0,0333; 0,0548]	0,9531 [0,0250; 0,0416]	0,9775 [0,0167; 0,0281]	

Результаты расчета показателя безотказности с использованием предложенной методики показывают, что появление в сериях после доработок отказов одного и того же типа существенно влияет на оценки показателя безотказности. Так, для случая *В*, когда в первой и третьей сериях зафиксированы отказы одного типа, для третьей серии характерно снижение надежности из-за того, что доработка по первому типу отказов, проведенная после первой серии, оказалась малоэффективной. Заметим, что ни модель роста надежности, ни байесовский подход [10], как видно из таблицы 1, не дают возможности отследить появление отказов одного и того же типа в сериях испытаний.

Из результатов расчетов следует, что при увеличении общего количества испытаний оценки ВБР для случаев *А* и *В* сходятся. Схожие с представленными в таблице 2 значениями ВБР результаты дает модель раздела 2.

В заключение заметим, что оценка надежности и ее среднее квадратическое отклонение для всего хода отработки в предположении, что все зафиксированные отказы переведены в разряд незачетных, составляют:

$$\hat{P} = 0{,}9831, \ \sigma_{\hat{P}} = 0{,}0167.$$

Таким образом, байесовская модель наиболее гибко учитывает проводимые доработки по каждому типу отказов в соответствии с накапливающейся информацией в процессе испытаний технической системы.

1. *Волков Л. И.* Надежность летательных аппаратов / *Л. И. Волков, А. М. Шишкевич.* – М. : Высш. Школа, 1975. – 296 с.
2. *Ллойл Л.* Надежность. Организация, исследования, методы, математический апарат / *Л. Ллойл, М. Липов*. – М. : Советское радио, 1964. – 687 с.
3. Методика определения количества испытаний, потребных для подтверждения эффективности доработок. Приложение 16 ОСТ 92-1743-84. 1990. – С. 83 – 93.
4. Методика оценки надежности с использованием модели роста. Приложение 14 ОСТ 92-1743-84. 1990. – С. 71 –78.
5. Методы отработки научных и народнохозяйственных ракетно-космических комплексов / *В. Ф. Грибанов, А. И. Рембеза, А. И. Голиков* и др. ; под общ. ред. *В. Ф. Грибанова*. – М. : Машиностроение, 1995. – 352 с.
6. *Переверзев Е. С.* Надежность и испытания технических систем / *Е. С. Переверзев.* – Киев : Наук. думка. 1990. – 328 с.
7. *Перлик В. И.* Определение надежности ракеты-носителя на этапе эксплуатации с учетом проводимых доработок ее систем / *В. И. Перлик, Э. Г. Гладкий* // Космическая техника. Ракетное вооружение. Сб. науч. тр. – Дн-ск : ГКБ «Южное», 2004. – Вып. 4. – С. 61 – 74.
8. *Савчук В. П.* Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов / *В. П. Савчук.* – М. : Наука, 1989. – 328 с.
9. *Северцев Н. А.* Надежность сложных систем в эксплуатации и отработке / *Н. А. Северцев.* – М. : Высш. шк., 1989. – 432 с.
10. *Чернявский В. Б.* Байесовская оценка Марковского процесса изменения показателя надежности сложных технических систем при испытаниях с доработками / *В. Б. Чернявский* // Проектирование и анализ характеристик летательных аппаратов. Сб. науч. тр. – Днепропетровск : ДГУ, 1992. – С. 38 – 45.

ГП «КБ «Южное»,
Днепропетровск

Получено 17.07. 2015,
в окончательном варианте 25.09.2015