

Г.Б.Филимонихин, И.И.Филимонихина, В.В.Пирогов
УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИЗОЛИРОВАННОЙ
СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА
И ДВУХ МАЯТНИКОВ

*Кировоградский национальный технический университет,
пр-т Университетский, 8, 25006, Кировоград, Украина; e-mail: fgb@online.ua*

Abstract. An isolated mechanical system consisting of the rotated bearing body and two pendulums implanted on its longitudinal axis is studied. This system models of decrease or increase by pendulum-, ball-, or fluid-type dampers of the angle of nutation of the space satellite, position of which is stabilized by the rotation. The conditions of origin, existence and collapse of steady-state motions of the system in dependence on its parameters. The conditions of stability of the basic motion (when the bearing body rotates around the longitudinal axis and pendulums are placed on the same line) and secondary motions (when the bearing body does not rotate around the longitudinal axis) are established. The residual angle of nutation is estimated.

Key words: rotated bearing body, two pendulums, conditions of stability, basic motion, secondary motions, residual angle of nutation.

Введение.

В ряде задач искусственные спутники Земли, положение которых в пространстве стабилизируется вращением, моделируются изолированными механическими системами (ИС) с вязким внутренним рассеиванием энергии [1 – 15, 20]. Со временем движение таких ИС устанавливается, после чего они вращаются как одно жесткое целое вокруг неизменного в пространстве вектора кинетического момента системы. В идеальном случае спутник должен вращаться вокруг своей продольной оси, являющейся главной центральной осью инерции. Такое движение будем называть основным, а другие установившиеся движения – побочными. Из-за неточного придания начального вращения спутнику возникает угол нутации. Для его устранения используют пассивные демпферы – маятниковые, шаровые, жидкостные (кольцевые) и т.д. [1 – 15, 20]. Однако, добавление в конструкцию спутника подвижных масс изменяет его поведение. Так, в работах [1, 2, 5, 12, 13] показано, что у спутника появляются дополнительные побочные движения, в том числе и вблизи основного движения, изменяется область устойчивости основного движения.

В данной работе впервые аналитически определяются условия зарождения, существования, исчезновения и устойчивости различных установившихся движений ИС, состоящей из вращающегося тела и двух одинаковых математических маятников, насаженных на его продольную ось, оценивается остаточный угол нутации. С учетом аналогии в работе маятниковых, шаровых и жидкостных (кольцевых) демпферов угла нутации, установленной в работе [5], такая ИС моделирует устранение или увеличение угла нутации спутника этими демпферами при правильной или неправильной их установке на спутник.

Близкие к исследуемой проблеме вопросы рассмотрены также в работах [16 – 19].

§1. Описание изолированной системы, ее осевой момент инерции.

ИС состоит из тела и двух маятников, образующих маятниковый демпфер угла нутации (рис. 1). Тело имеет центр масс в точке O , массу M и осевые моменты инерции A, B, C относительно собственных главных центральных осей инерции $O\xi\eta\zeta$. На продольную ось ζ тела насажены два математических маятника длиной l и массой $m/2$ каждый (рис. 1, б). Маятники движутся в плоскости $O_1\xi_1\eta_1$, параллельной плоскости $O\xi\eta$, расположенной на расстоянии b от нее. При повороте маятников относительно тела на них действуют силы вязкого сопротивления, величина и природа которых, как показано в работе [4], несущественна для данной задачи.

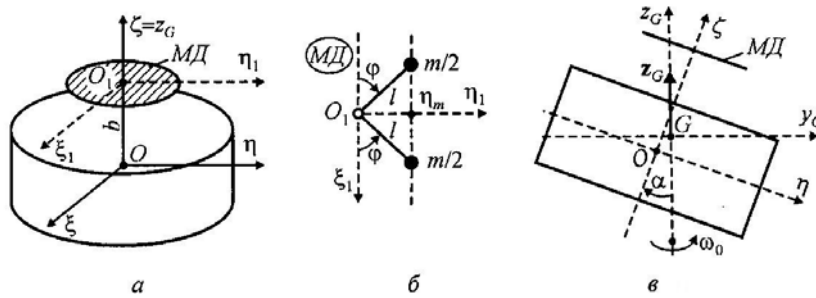


Рис. 1

На установившихся движениях ИС вращается вокруг оси z_G , на которой лежит ее вектор кинетического момента и центр масс – точка G . На основном движении маятники лежат на прямой ξ_1 и ИС вращается вокруг продольной оси тела, $\zeta = z_G$ (рис. 1, а). На побочном движении, в силу симметрии системы, маятники отклонены от прямой ξ_1 на угол φ (рис. 1, б) и ось ζ образует с осью z_G угол α (рис. 1, в).

Поскольку у ИС нет элементов, способных накапливать потенциальную энергию, то устойчивость установившихся движений можно оценивать по осевому моменту инерции ИС J_{z_G} относительно оси z_G [1, 4]. На устойчивых установившихся движениях он должен принимать максимальное или локальное максимальное значение. Заметим, что в общем случае J_{z_G} является функцией четырех обобщенных координат, две из которых (α, β) задают положение оси z_G относительно осей $O\xi\eta\zeta$, а две φ_1, φ_2 – положение маятников относительно тела. В последующих исследованиях используем симметрию системы для уменьшения количества ее степеней свободы. При этом учитываем, что на основном движении маятники не отклонены, а на побочном – отклонены на одинаковые углы $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Для исследования такого механизма потери устойчивости достаточно оставить две обобщенные координаты φ, α , определяющие положение системы на установившихся движениях. Заметим также, что описанный механизм потери устойчивости включает в себя не все возможные установившиеся движения. Однако, можно проверить, что на неохваченных движениях осевой момент инерции J_{z_G} меньше, чем наибольший момент J_{z_G} на движениях, рассматриваемых ниже.

Осевой момент инерции системы J_{z_G} определяем как функцию координат φ, α .

Координаты масс маятников относительно осей $O\xi\eta\zeta$ (рис. 1, а):

$$\xi_m = \pm l \cos \varphi; \quad \eta_m = l \sin \varphi; \quad \zeta_m = b. \quad (1.1)$$

Координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\xi_G = 0; \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma} = \frac{ml \sin \varphi}{M_\Sigma}; \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma} \quad (M_\Sigma = M + m). \quad (1.2)$$

Тензор инерции, осевые и центробежные моменты инерции системы:
относительно осей $O\xi\eta\zeta$ –

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ 0 & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} J_\xi &= A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2) = A + m(l^2 \sin^2 \varphi + b^2); \\ J_\eta &= B + m(\xi_m^2 + \zeta_m^2) = B + m(l^2 \cos^2 \varphi + b^2); \\ J_\zeta &= C + m(\xi_m^2 + \eta_m^2) = C + ml^2; \\ J_{\xi\eta} &= J_{\xi\zeta} = 0; \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m = mlb \sin \varphi; \end{aligned} \quad (1.3)$$

относительно центральных осей $G\xi_G\eta_G\zeta_G$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$, –

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix};$$

$$J_{\xi_G} = A_G + \frac{mMl^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi; \quad J_{\eta_G} = B_G - ml^2 \sin^2 \varphi; \quad J_{\zeta_G} = C_G - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi; \quad (1.4)$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0; \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMlb}{M_\Sigma} \sin \varphi.$$

В формулах (1.4) принято:

$$A_G = A + mMb^2 / M_\Sigma; \quad B_G = B + ml^2 + mMb^2 / M_\Sigma; \quad C_G = C + ml^2 \quad (1.5)$$

– главные центральные осевые моменты инерции системы на основном движении. Единичный вектор \mathbf{z}_G , направленный по оси z_G , имеет в проекциях на оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ составляющие $\mathbf{z}_G = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ (рис. 1, в). Тогда осевой момент инерции системы относительно оси z_G имеет вид

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = C_G - (C_G - B_G + ml^2 u^2) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{mlMb}{M_\Sigma} u \sin 2\alpha - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} u^2 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} =$$

$$= C_G - (C_G - B_G + ml^2 u^2) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + mlb' u \sin 2\alpha - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} u^2 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (1.6)$$

$$(u = \sin \varphi, u \in [-1, 1]; \quad b' = b - \zeta_G = b - mb / M_\Sigma = Mb / M_\Sigma). \quad (1.7)$$

Заметим, что b' – расстояние от центра масс системы до плоскости маятников.

В безразмерном виде имеем равенство

$$\tilde{J}_{z_G} = \frac{J_{z_G}}{C_G} = 1 - (1 - \tilde{B}_G + \tilde{m}u^2) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \tilde{m}\tilde{b}u \sin 2\alpha - \tilde{m}^2 \tilde{J} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} u^2 \quad (1.8)$$

$$(\tilde{m} = ml^2 / C_G, \quad \tilde{J} = C_G / (M_\Sigma l^2), \quad \tilde{B}_G = B_G / C_G, \quad \tilde{b} = b' / l). \quad (1.9)$$

В дальнейшем примем, что $B_G > A_G$. Только в этом случае при потере устойчивости основным движением система начнет поворачиваться вокруг оси ξ_G , что соответствует построенной схеме. Такое соотношение имеет место и в случае осесимметричного тела ($A = B$). В дальнейшем для краткости будем называть составное тело: сплюснутым, если $C_G > B_G$; сферическим, если $C_G = B_G$; вытянутым, если $C_G < B_G$ (вместо термина «устойчивый спутник» [2 – 4, 13], для которого $C > A, B$).

Вместе с описанной ИС рассмотрим вторую ИС, в которой маятники неподвижны относительно несущего тела и занимают положение, соответствующее основному движению. Полагаем, что, пока движение этой ИС не установилось, происходит внутреннее вязкое рассеяние энергии (например, из-за бесконечно малых деформаций несущего тела или маятников, как это описано в работе [4]).

§2. Условия устойчивости основного движения изолированной системы.

Введем в рассмотрение коэффициенты

$$a_{11} = \tilde{m}^2 \tilde{J}; \quad a_{22} = 1 - \tilde{B}_G; \quad a_{12} = -\tilde{m} \tilde{b}. \quad (2.1)$$

Тогда в окрестности основного движения ($\varphi = 0, \alpha = 0$) с точностью до величин второго порядка малости, включительно, имеем

$$\tilde{J}_{z_g} \approx 1 - (a_{11} \varphi^2 + 2a_{12} \varphi \alpha + a_{22} \alpha^2). \quad (2.2)$$

Для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $a_{11} \varphi^2 + 2a_{12} \varphi \alpha + a_{22} \alpha^2$ имела минимум. Критерий Сильвестра дает такие условия устойчивости: $a_{11} > 0, a_{22} > 0, \Delta_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Из этих условий получаем

$$1 - \tilde{B}_G > 0; \quad \Delta_2 = \tilde{m}^2 [\tilde{J}(1 - \tilde{B}_G) - \tilde{b}^2] > 0.$$

Эти два условия будут выполняться, если будет выполнено условие $\tilde{J}(1 - \tilde{B}_G) - \tilde{b}^2 > 0$. В размерном виде имеем такое условие:

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0 \quad (2.3)$$

или

$$C - B - Mb^2 > 0. \quad (2.4)$$

Заметим, что маятники образуют автобалансир, способный устранять статическую неуравновешенность тела, расположенную в плоскости маятников. Условие (2.3) совпадает с условием устойчивости основных движений, полученным для автобаланси́ров любого типа [12]. Условие (2.4) – конкретизация условия (2.3) для рассматриваемой ИС.

Из (2.4) находим критическое значение b , при превышении которого основное движение теряет устойчивость

$$b_c = \sqrt{(C - B) / M}. \quad (2.5)$$

Заметим, что это значение не зависит от массы маятников. Это значит, что даже маятники бесконечно малой массы, установленные на расстоянии, большем, чем b_c , приведут к потере устойчивости (по Ляпунову) основным движением.

В случае второй ИС, в соответствии с работой [4], при сплюснутом составном теле ($C_G > B_G$) устойчиво основное движение, а при вытянутом ($C_G < B_G$) – побочное движение, на котором $\alpha = \pi/2$ (несущее тело вращается вокруг поперечной оси). Составное тело на основном движении становится почти сферическим при условии, что

$$C_G - B_G = C - B - \frac{mMb^2}{M_\Sigma} = 0,$$

откуда получаем

$$b^* = \sqrt{\frac{M_\Sigma(C - B)}{mM}} = b_c \sqrt{\frac{M_\Sigma}{m}}. \quad (2.6)$$

Если $b < b^*$, то устойчиво основное движение, а если $b > b^*$ – побочное.

Для искусственных спутников Земли имеем $M_{\Sigma} / m \gg 1$. Из (2.5), (2.6) следует, что предоставление маятникам возможности свободно вращаться значительно уменьшает расстояние b , при котором устойчиво основное движение.

§3. Условия зарождения, существования и исчезновения установившихся движений.

Необходимые условия существования экстремума \tilde{J}_{z_g} имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}_{z_g}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{J}_{z_g}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\tilde{m}[u(1 - \cos 2\alpha) - \tilde{b} \sin 2\alpha + \tilde{m}\tilde{J}u(1 + \cos 2\alpha)] \cos \varphi = 0; \\ \frac{\partial \tilde{J}_{z_g}}{\partial \alpha} &= -(1 - \tilde{B}_G + \tilde{m}u^2) \sin 2\alpha + 2\tilde{m}\tilde{b}u \cos 2\alpha + \tilde{m}^2 \tilde{J}u^2 \sin 2\alpha = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение системы (3.1), соответствующее основному движению:

$$\alpha = 0; \quad \varphi = 0 \quad (u = 0). \quad (3.2)$$

Это движение существует при любых значениях параметров системы.

Определим побочные движения.

1-е побочное движение – случай $\varphi = 0$ ($u = 0$), $\alpha \neq 0$. Из (3.1) получим, что

$$\frac{\partial \tilde{J}_{z_g}}{\partial \varphi} = \tilde{m}\tilde{b} \sin 2\alpha = 0, \quad (3.3)$$

откуда получаем 1-е побочное движение в виде

$$\alpha = \pi / 2; \quad \varphi = 0 \quad (u = 0). \quad (3.4)$$

Заметим, что это решение существует при любых значениях параметров ИС.

2-е побочное движение – случай $\varphi = \pi / 2$. При этом имеем: $\cos \varphi = 0$, производная $\partial \tilde{J}_{z_g} / \partial \varphi = 0$ и $u = 1$. Тогда $\partial \tilde{J}_{z_g} / \partial \alpha = -(1 - \tilde{B}_G + \tilde{m}) \sin 2\alpha + 2\tilde{m}\tilde{b} \cos 2\alpha + \tilde{m}^2 \tilde{J} \sin 2\alpha = 0$, откуда получаем равенство

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tilde{m}\tilde{b}}{1 - \tilde{B}_G + \tilde{m} - \tilde{m}^2 \tilde{J}}. \quad (3.5)$$

Окончательно, в размерном виде имеем 2-е побочное движение:

$$\varphi = \pi / 2; \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{2mMbl}{(C - B)M_{\Sigma} - mM(b^2 - l^2)} \right]. \quad (3.6)$$

Оно существует при любых значениях параметров ИС.

Из (3.6) видно, что угол $\alpha = \pi / 4$ тогда, когда $(C - B)M_{\Sigma} - mM(b^2 - l^2) = 0$, откуда следует равенство

$$b_{\alpha=\pi/4} = \sqrt{\frac{M_{\Sigma}(C - B)}{mM} + l^2}.$$

Угол $\alpha \rightarrow \pi / 2$ тогда, когда $b \rightarrow +\infty$.

3-е побочное движение – случай $0 < \varphi < \pi / 2$ ($u \neq 0$). Из первого уравнения в (3.1) находим

$$u = \frac{\tilde{b} \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha + \tilde{m}\tilde{J}(1 + \cos 2\alpha)}. \quad (3.7)$$

В размерном виде имеем формулу

$$u = \frac{Mb \sin 2\alpha}{l[(M+m)(1-\cos 2\alpha) + m(1+\cos 2\alpha)]}. \quad (3.8)$$

Подставив (3.7) во второе уравнение системы (3.1), получим

$$\frac{\partial \tilde{J}_{z_g}}{\partial \alpha} = -\frac{(pv^2 - qv + r) \sin 2\alpha}{[1 - v + \tilde{m}\tilde{J}(1+v)]^2} \quad (3.9)$$

$$(p = (1 - \tilde{m}\tilde{J})[(1 - \tilde{B}_G)(1 - \tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{b}^2]; \quad q = (1 + \tilde{m}\tilde{J})[(1 - \tilde{B}_G)(1 - \tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{b}^2]; \\ r = p + 4\tilde{m}\tilde{J}(1 - \tilde{B}_G); \quad v = \cos 2\alpha, \quad |v| \leq 1). \quad (3.10)$$

Новые побочные установившиеся движения будут определяться решениями уравнения

$$pv^2 - qv + r = 0; \quad v = \cos 2\alpha. \quad (3.11)$$

Единственный корень этого уравнения, который может удовлетворять условию $|v| \leq 1 -$

$$v = 1 + 2\tilde{m}\tilde{J} \left[1 - \tilde{b} / \sqrt{\tilde{J}(1 - \tilde{B}_G)(1 - \tilde{m}\tilde{J}) + \tilde{m}\tilde{J}\tilde{b}^2} \right] / (1 - \tilde{m}\tilde{J}). \quad (3.12)$$

В размерном виде имеем формулы:

$$v = \cos 2\alpha = \frac{1}{M} \left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1}{M} \left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Заметим, что функция $v(b)$ монотонно убывает с увеличением b и $v(0) = (M + 2m) / M > 1$. Поэтому для малых b это движение не существует. В критических случаях $v = \pm 1$. Исследуем их подробнее.

Когда $v = 1$, то $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ и из (3.13) получим

$$b_{v=1} = b_c = \sqrt{(C-B)/M}. \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что это побочное движение зарождается из основного в точке $b_{v=1} = b_c$ (на оси b), в которой теряет устойчивость основное движение.

Когда $v = -1$, то $\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/2$. Из (3.7) следует, что при этом $u = \sin \varphi = 0$, откуда получаем, что $\varphi = 0$. Из (3.13) имеем равенство

$$b_{v=-1} = \frac{M_\Sigma}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M}} = \frac{M_\Sigma b_c}{m} = b^* \sqrt{\frac{M_\Sigma}{m}}. \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что это побочное движение перестает существовать в точке $b_{v=-1}$ (на оси b), где оно сливается с первым побочным движением (3.4). Заметим, что для реальных спутников имеем: $b_c \ll b^* \ll b_{v=-1}$.

Таким образом, необходимое условие существования 3-го побочного движения –

$$b_c \leq b \leq b_{v=-1}. \quad (3.16)$$

Поскольку $0 < \varphi < \pi/2$, то $u = \sin \varphi$ из (3.8) можно представить в таком виде:

$$u = \frac{Mb \sqrt{1-v^2}}{l[(M+m)(1-v) + m(1+v)]}. \quad (3.17)$$

Подставив в это уравнение v из (3.13), получим формулы

$$u = \sin \varphi = \frac{1}{l} \sqrt{b \frac{M+2m}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M} - \frac{M+m}{m} \cdot \frac{C-B}{M}} - b^2};$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{1}{l} \sqrt{b \frac{M+2m}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M} - \frac{M+m}{m} \cdot \frac{C-B}{M}} - b^2} \right). \quad (3.18)$$

В критических случаях $-u = 0$ и $u = 1$. При $b = b_c$ или $b = b_{v=-1}$ $-u = \sin \varphi = 0$, что соответствует полученным выше результатам.

В случае, когда $u = 1$, из (3.18) получаем, что

$$b_{1/2,u=1} = [(M+2m)\sqrt{(C-B)/M} \mp \sqrt{M(C-B)-4l^2m^2}]/(2m), \quad (3.19)$$

где индексу 1 при b соответствует знак « \leftarrow » в правой части, а индексу 2 – « \rightarrow ».

Введем в рассмотрение параметр $l^* = \sqrt{M(C-B)}/(2m)$.

Рассмотрим возможные случаи: 1) $l < l^*$. Тогда $M(C-B) - 4l^2m^2 > 0$, существуют неравные между собой b из (3.19), при которых $u = 1$, и 3-е побочное движение существует на таких интервалах: $b \in [b_c, b_{1,u=1}]$; $b \in [b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$. Можно проверить, что при этом $b_c < b_{1,u=1}$ и $b_{2,u=1} < b_{v=-1}$.

В точках $b = b_{1,u=1}$ и $b = b_{2,u=1}$ имеем: $u = 1$ и угол $\varphi = \pi/2$. Следовательно, в этих точках 3-е побочное движение сливается со 2-м. Таким образом, с ростом параметра b в точке $b = b_c$ из основного движения зарождается 3-е побочное движение, которое затем исчезает в точке $b = b_{1,u=1}$, сливаясь со 2-м. Затем, в точке $b = b_{2,u=1}$ 3-е побочное движение зарождается из 2-го, а в точке $b = b_{v=-1}$ ($u = 0$, $\varphi = 0$) – исчезает, сливаясь с 1-м.

2) $l \geq l^*$. Тогда $M(C-B) - 4l^2m^2 \leq 0$, не существуют неравные между собой b из (3.19), при которых $u = 1$, и 3-е побочное движение существует для любого b из (3.16).

С увеличением параметра b в точке $b = b_c$ из основного движения зарождается 3-е побочное, которое затем в точке $b = b_{v=-1}$ сливается с 1-м, в связи с чем – исчезает.

§4. Осевые моменты инерции на различных установившихся движениях.

На основном движении осевой момент инерции системы имеет вид

$$J_{z_G}^{(0)} = C_G = C + ml^2. \quad (4.1)$$

На 1-м побочном движении –

$$J_{z_G}^{(1)} = B_G = B + ml^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma} = J_{z_G}^{(0)} + \frac{mM}{M_\Sigma} \left[b^2 - \frac{M_\Sigma(C-B)}{mM} \right]. \quad (4.2)$$

На 2-м побочном движении –

$$J_{z_G}^{(2)} = [J_{\zeta_G} + J_{\eta_G} + \sqrt{(J_{\zeta_G} - J_{\eta_G})^2 + 4J_{\eta_G \zeta_G}^2}] / 2 \quad (4.3)$$

$$\left(J_{\eta_G} = B_G - ml^2 = B + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, J_{\zeta_G} = C_G - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} = C + \frac{mM l^2}{M_\Sigma}, J_{\eta_G \zeta_G} = \frac{mM l b}{M_\Sigma} \right). \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) осевой момент инерции на 2-м побочном движении имеет вид

$$J_{z_G}^{(2)} = \{(C+B)M_\Sigma + mM(l^2 + b^2) + \sqrt{[(C-B)M_\Sigma + mM(l^2 - b^2)]^2 + 4(mMlb)^2}\} / (2M_\Sigma). \quad (4.5)$$

Чтобы определить J_{z_G} на 3-м побочном движении, используем (1.6). Запишем это уравнение в виде

$$J_{z_G} = C_G - (C_G - B_G + ml^2u^2) \frac{1-v}{2} + \frac{mM_b}{M_\Sigma} u \sqrt{1-v^2} - \frac{m^2l^2}{M_\Sigma} u^2 \frac{1+v}{2}. \quad (4.6)$$

Подставив в него v из (3.13) и u из (3.18), после преобразований получим

$$J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(0)} + m \left(b - \sqrt{\frac{C-B}{M}} \right)^2; \quad b \in \begin{cases} [b_c, b_{v=-1}], & \text{если } l \geq l^*; \\ [b_c, b_{1,u=1}] \cup [b_{2,u=1}, b_{v=-1}], & \text{если } l < l^*. \end{cases} \quad (4.7)$$

Можно показать, что имеет место равенство

$$J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(1)} + \frac{m^2}{M_\Sigma} \left(b - \frac{M_\Sigma}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M}} \right)^2. \quad (4.8)$$

§5. Устойчивость установившихся движений.

Для ответа на вопрос, какое установившееся движение будет устойчивым в зависимости от величин параметров b и l , сравним между собой осевые моменты инерции J_{z_G} на разных движениях.

Соотношения между $J_{z_G}^{(1)}, J_{z_G}^{(0)}$ (B_G, C_G):

$$\exists b^* : J_{z_G}^{(1)}(b^*) = J_{z_G}^{(0)}(b^*) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \forall b \in [0, b^*) \quad J_{z_G}^{(1)} < J_{z_G}^{(0)} \quad (B_G < C_G); \\ \forall b > b^* \quad J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(0)} \quad (B_G > C_G). \end{cases} \quad (5.1)$$

Соотношения между $J_{z_G}^{(2)}, J_{z_G}^{(0)}$:

$$\exists b_{20} = \sqrt{\frac{C-B+ml^2}{M}} : J_{z_G}^{(2)}(b_{20}) = J_{z_G}^{(0)}(b_{20}) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \forall b \in [0, b_{20}) \quad J_{z_G}^{(2)} < J_{z_G}^{(0)}; \\ \forall b > b_{20} \quad J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(0)}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Существенно, что $b_{20} > b_c$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(0)}$: при условии существования $J_{z_G}^{(3)}$ имеет место неравенство $J_{z_G}^{(3)} \geq J_{z_G}^{(0)}$, причем знак равенства стоит только в точке $b = b_c$.

Соотношения между $J_{z_G}^{(2)}, J_{z_G}^{(1)}$:

если $(C-B)M_\Sigma > m^2l^2$, то

$$\exists b_{21} = \frac{M_\Sigma}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M} - \frac{m^2l^2}{MM_\Sigma}} : J_{z_G}^{(2)}(b_{21}) = J_{z_G}^{(1)}(b_{21}) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \forall b \in [0, b_{21}) \quad J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(1)}; \\ \forall b > b_{21} \quad J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(2)}; \end{cases} \quad (5.3)$$

если $(C-B)M_\Sigma \leq m^2l^2$, то $\forall b > 0 \quad J_{z_G}^{(1)} > J_{z_G}^{(2)}$.

Соотношение между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(1)}$: при условии существования $J_{z_G}^{(3)}$ имеет место неравенство $J_{z_G}^{(3)} \geq J_{z_G}^{(1)}$, причем знак равенства стоит только в точке $b = b_{v=-1}$.

Соотношения между $J_{z_G}^{(3)}, J_{z_G}^{(2)}$:

если $l \leq l^*$, то $J_{z_G}^{(3)} = J_{z_G}^{(2)} \Leftrightarrow b = b_{1/2,u=1}$, и $\forall b \in [b_c, b_{1,u=1}) \cup (b_{2,u=1}, b_{v=-1}] \quad J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(2)}$;

если $l > l^*$, то $\forall b \in [b_c, b_{v=-1}] \quad J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(2)}$.

Заметим, что формально если $l < l^*$, то $\forall b \in (b_{1,u=1}, b_{2,u=1}) \quad J_{z_G}^{(2)} > J_{z_G}^{(3)} > J_{z_G}^{(1)}$.

Следовательно, в зависимости от значений параметров l и b , условно асимптотически устойчивыми являются такие движения (рис. 2).

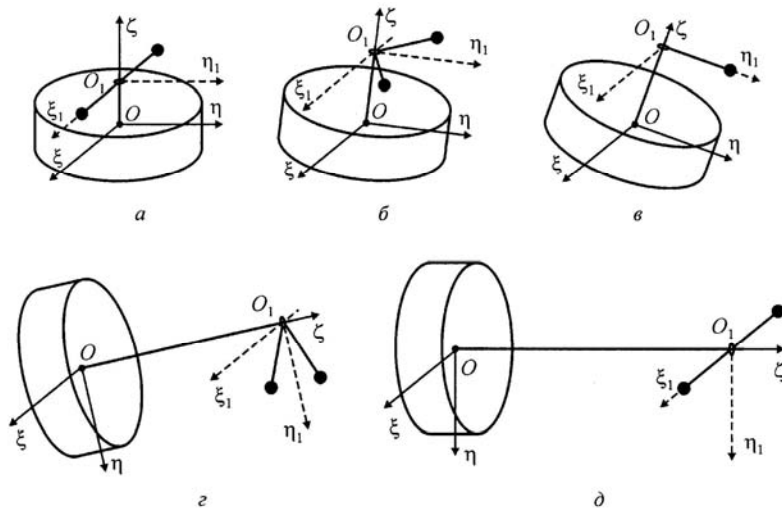


Рис. 2

Случай 1. Если $l < l^*$, то устойчиво: $\forall b \in [0, b_c]$ – основное движение (рис. 2, а); $\forall b \in [b_c, b_{1,u=1}]$ – побочное движение 3 (рис. 2, б); $\forall b \in [b_{1,u=1}, b_{2,u=1}]$ – побочное движение 2 (рис. 2, в); $\forall b \in [b_{2,u=1}, b_{v=-1}]$ – побочное движение 3 (рис. 2, г); $\forall b \in [b_{v=-1}, +\infty)$ – побочное движение 1 (рис. 2, д). Углы α, φ в зависимости от b изменяются по закону

$$\alpha(b) = \begin{cases} 0, & b \in [0, b_c]; \\ \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1}{M} \left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right) \right], & b \in (b_c, b_{1,u=1}) \cup (b_{2,u=1}, b_{v=-1}); \\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{2mMbl}{(C-B)M_\Sigma - mM(b^2 - l^2)} \right], & b \in [b_{1,u=1}, b_{2,u=1}]; \\ \pi/2, & b \in [b_{v=-1}, +\infty); \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0, & b \in [0, b_c] \cup [b_{v=-1}, +\infty); \\ \arcsin \left(\frac{1}{l} \sqrt{b \frac{M+2m}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M} - \frac{M+m}{m} \cdot \frac{C-B}{M} - b^2}} \right), & b \in (b_c, b_{1,u=1}) \cup (b_{2,u=1}, b_{v=-1}); \\ \pi/2, & b \in [b_{1,u=1}, b_{2,u=1}]. \end{cases}$$

Случай 2. Если $l \geq l^*$, то устойчиво: $\forall b \in [0, b_c]$ – основное движение (рис. 2, а); $\forall b \in [b_c, b_{v=-1}]$ – побочное движение 3 (рис. 2, б, г); $\forall b \in [b_{v=-1}, +\infty)$ – побочное движение 1 (рис. 2, д). Углы α, φ в зависимости от b изменяются по закону:

$$\alpha(b) = \begin{cases} 0, & b \in [0, b_c]; \\ \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1}{M} \left(M + 2m - \frac{2mb}{\sqrt{(C-B)/M}} \right) \right], & b \in (b_c, b_{v=-1}); \\ \pi/2, & b \in [b_{v=-1}, +\infty); \end{cases}$$

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0, & b \in [0, b_c] \cup [b_{v=-1}, +\infty); \\ \arcsin\left(\frac{1}{l} \sqrt{b \frac{M+2m}{m} \sqrt{\frac{C-B}{M}} - \frac{M+m}{m} \cdot \frac{C-B}{M} - b^2}\right), & b \in (b_c, b_{v=-1}). \end{cases} \quad (5.5)$$

Полученные формулы для угла нутации (5.4), (5.5) можно использовать для подбора: параметров маятниковых или шаровых автобалансиоров при их использовании в качестве демпферов угла нутации искусственных спутников Земли; параметров и оценки остаточного угла нутации при использовании жидкостных (кольцевых) демпферов.

Пример: оценка остаточного угла нутации для бразильского спутника SACS-2 с жидкостным демпфером. В первоначальном варианте спутника его расчетные данные следующие [13]: $C = 5,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $B = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $M_{\Sigma} = 85 \text{ кг}$, $m = 0,066 \text{ кг}$, $b = 0,18 \text{ м}$. Кольцевой демпфер – тороидальная трубка с серединным радиусом $l = 0,095 \text{ м}$, диаметром поперечного сечения трубки $d = 0,019 \text{ м}$, частично заполнена спиртом массой $m = 0,066 \text{ кг}$. Соотношение $2l/d = 10 \gg 1$, что, в соответствии с результатами работы [5], свидетельствует о хороших автобалансирующих свойствах этого демпфера и о применимости формул (5.4), (5.5). Высота спутника 0,6 м, центр масс – посередине, что ограничивает сверху параметр b величиной $b_{\max} = 0,6/2 = 0,3 \text{ м}$.

Расчеты дают следующие величины: $l^* = 15,6118 \text{ м}$, $b_c = 0,0243 \text{ м}$, $b_{1,u=1} = 0,0246 \text{ м}$, $b^* = 0,8707 \text{ м}$, $b_{2,u=1} = 31,2475 \text{ м}$, $b_{v=-1} = 31,2478 \text{ м}$.

Поскольку $l < l^*$, то угол α в зависимости от b изменяется по закону (5.4). Графики его изменения приведены на рис. 3, где α – в градусах; b – метрах (на рис. 3, а – увеличения угла нутации α при неправильной установке демпфера нутации; на рис. 3, б – область возникновения остаточного угла нутации α).

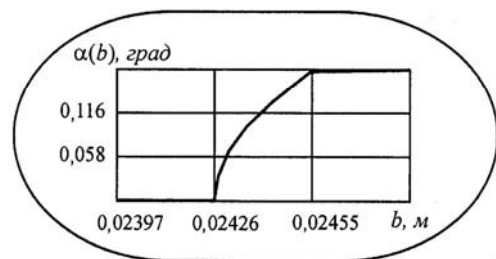
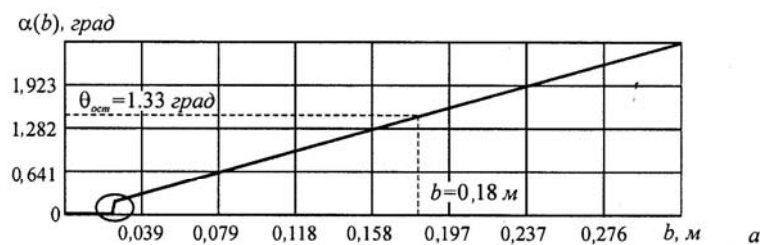


Рис. 3

Неустрашимый остаточный угол нутации $\alpha(0,18) = 1,332 \text{ град}$. При максимальном отдалении демпфера от центра масс спутника $\alpha(0,30) = 2,406 \text{ град}$. При этом спутник будет сплюснутым («устойчивым»), поскольку b с запасом меньше предельного значения $b^* = 0,8707 \text{ м}$, однако основное движение потеряет устойчивость уже при $b > b_c = 0,0243 \text{ м}$.

Поскольку в работе [13] числовым моделированием был обнаружен остаточный угол нутации, то методом проб была обоснована целесообразность изменения величин осевых моментов инерции спутника: $C = 10,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $B = 7,22 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Расчеты показывают, что при этом $b_c = 0,1841 \text{ м}$, что лишь незначительно больше $b = 0,18 \text{ м}$, однако обеспечивает устойчивость основного движения. Заметим, что дальнейшее, даже весьма незначительное отдаление демпфера от центра масс спутника приведет к потере устойчивости основным движением.

Проведенные исследования и числовой пример показывают, каким образом и насколько присоединенные тела в виде маятниковых, шаровых или кольцевых демпферов (автобалансируют) меняют поведение спутника. Необходимо учитывать, что присоединенные тела не только увеличивают число возможных установившихся движений, но и сильно сужают область устойчивости основного движения. Неправильная установка демпфера на спутник ($b > b_c$) может привести к неустраняемому остаточному углу нутации даже в случае «устойчивого» с большим запасом спутника.

Заключение.

Исследована изолированная механическая система, состоящая из вращающегося несущего тела и двух маятников, насаженных на его продольную ось. Она моделирует устранение или увеличение маятниковыми (кольцевыми) демпферами угла нутации искусственного спутника Земли, положение которого в пространстве стабилизируется вращением. Установлены условия зарождения, существования и исчезновения установившихся движений системы в зависимости от параметров системы. Получены условия устойчивости основного движения (в котором несущее тело вращается вокруг продольной оси, а маятники лежат на одной прямой) и побочных движений (в которых несущее тело вращается не вокруг продольной оси).

РЕЗЮМЕ. Досліджено ізольовану механічну систему, що складена із обертового несучого тіла і двох маятників, насаджених на його поздовжню вісь. Така система моделює усунення чи збільшення маятниковими, кульовими чи рідинними (кольцевими) демпферами кута нутації штучного супутника Землі, положення якого у просторі стабілізується обертанням. Виявлено умови зародження, існування і зникнення установившихся рухів системи в залежності від її параметрів. Встановлено умови стійкості основного руху (у якому несуче тіло обертається навколо поздовжньої осі, а маятники лежать на одній прямій) і побічних рухів (у яких несуче тіло обертається не навколо поздовжньої осі). Оцінено залишковий кут нутації.

1. *Горошко О.О., Філімоніхіна І.І.* Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2008. – № 1. – С. 53 – 58.
2. *Докучаев Л. В., Рабинович Б.И.* Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта ИНТЕРБОЛ // Космические исследования. – 1999. – 37, № 6. – С. 589 – 597.
3. *Мирер С.А., Сарычев В.А.* Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – 35, № 6. – С. 651 – 658.
4. *Рейтер Г.С., Томсон У.Т.* Вращательное движение пассивных космических аппаратов / Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1966. – С. 336 – 350.
5. *Філімоніхіна І.І., Горошко О.О.* Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-матем. науки. – 2008. – № 3. – С. 99 – 105.
6. *Biggs J.D., Nadjim H.* Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems & Control Letters. – 2012. – 61, N 4. – P. 609 – 616.
7. *Chinnery A.E., Hall C.D.* The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper // J. of Guidance, Control and Dynamics. – 1995. – 18, N 6. – P. 1404 – 1409.

8. *Cloutier G.J.* Nutation damper instability on spin-stabilized spacecraft // *AIAA Journal*. – 1969. – N 11. – P. 2110 – 2115.
9. *Cloutier G.J.* Optimum Design Parameters for a Spin-Stabilized Spacecraft Nutation Damper // *J. of Spacecraft and Rockets*. – 1972. – **9**, N 6. – P. 466 – 468.
10. *Cloutier G.J.* Resonances of a two-DOF system on a spin-stabilized spacecraft // *AIAA Journal*. – 1976. – **14**, N 1. – P. 107 – 109.
11. *Cochran J.E., Thompson J.A.* Nutation Dampers vs Precession Dampers for Asymmetric Spacecraft // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 1980. – **3**, N 1. – P. 22 – 28.
12. *Filimonikhina I.I., Filimonikhin G.B.* Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 11. – P. 1276 – 1282.
13. *Fonseca I.M., Santos M.C.* SACI-2 Attitude Control Subsystem // *INPE*. – 2002. – **3**. – P. 197 – 209.
14. *Gasbarri P., Teofilatto P.* Fluid ring damper for artificial gravity rotating system used for manned spacecraft // *Acta Astronautica*. – 2009. – **64**, N 11. – P. 1286 – 1292.
15. *Janssens F.L., Van der Ha J.C.* On the stability of spinning satellites // *Acta Astronautica*. – 2011. – **68**, N 7 – 8. – P. 778 – 789.
16. *Luk'yanova T.A., Martynyuk A.A.* Sufficient conditions of connective stability of motion on time scale // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 232 – 244.
17. *Makarov A.L., Khoroshilov V.S., Zakrzhevskii A.E.* Spacecraft dynamics due to elastic ring antenna deployment // *Acta Astronautica*. – 2011. – **69**, N 7 – 8. – P. 691 – 702.
18. *Martynyuk A.A., Mullazhonov P.V.* Revisiting the theory of stability of stationary linear large-scale systems // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 1. – P. 101 – 111.
19. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcation processes in periodically perturbed systems // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 114 – 124.
20. *Taylor R.S.* A passive pendulum wobble damping system for a manned rotating space station. // *J. of Spacecraft and Rockets*. – 1966. – **3**, N 8. – P. 1221 – 1228.

Поступила 13.12.2012

Утверждена в печать 03.12.2013