

Н. А. Ярецкая

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ  
И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*Хмельницкий национальный университет,  
ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина;  
e-mail: massacrane2@ukr.net*

**Abstract.** Basing on the linearized theory of elasticity, a solution is obtained for an axisymmetric mixed problem on pressure of elastic stamp on a layer with initial (residual) stresses. The study is carried out in the general form for the theory of large (finite) deformations and different variants of the theory of small initial deformations in the case of arbitrary elastic potential.

**Key words:** linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, Fredholm equation, method of successive approximations.

**Введение.**

Современный анализ подходов к построению теорий и основных результатов применительно к трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел и трехмерной линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными (остаточными) напряжениями изложен в публикациях [2, 8]. С применением подходов [2, 8] современный анализ результатов выполнен для ряда проблем линеаризованной механики деформируемых тел: для задач контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [2, 6]; для теории устойчивости локального состояния равновесия черных пород возле их выработок [2] (это задача исключительно для неоднородных докритических состояний). Существует также ряд других обобщающих публикаций по линеаризованной механике деформируемых тел [4, 5, 7, 9 – 15]; выше отмечены публикации, полностью или частично связанные с тематикой настоящей статьи, которая посвящена исследованию контактного взаимодействия упругих штампов и упругих тел, когда в них действуют также и начальные (остаточные) напряжения.

Контактное действие конечного цилиндрического штампа на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями рассмотрено в [3]. Задача о давлении без сил трения жесткого кругового штампа на слой с начальными напряжениями представлена в [1], где решение пространственной линеаризованной осесимметричной задачи рассмотрено в общем виде.

Ниже в рамках линеаризованной теории упругости [2, 6] приведено решение смешанной осесимметричной задачи о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Рассмотрены случаи, когда слой лежит на жестком основании без трения и слой скреплен с жестким основанием. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Исследования проведены в координатах начального деформированного состояния  $Oy_b$ , которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) соот-

ношениями  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), где  $\lambda_i$  – коэффициенты удлинения, определяющие перемещения начального состояния. Принято, что начальные состояния в слое и цилиндре – однородны и равны, а упругие потенциалы – дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина [2]. Кроме того, действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

Величины, относящиеся к упругому штампу, записываем в принятых обозначениях [2] с верхним индексом (1), а величины, относящиеся к предварительно напряженному слою, с начальными (остаточными) напряжениями – с верхним индексом (2).

### §1. Постановка задачи и основные соотношения.

Пусть упругий цилиндрический штамп (рис. 1) радиуса  $R$  и высотой  $H$  с начальными (остаточными) напряжениями вдавливается в упругий слой под действием силы  $P$  после возникновения там начальных напряжений (возникают до контакта);  $h_1$  – толщина слоя в начальном деформированном состоянии (она связана с толщиной  $h_2$  в недеформированном состоянии соотношением  $h_1 = \lambda_3 h_2$ ). Сила приложена к упругому штампу так, что его свободный торец деформируется в направлении оси  $Oy_3$  на одинаковую величину  $\varepsilon$ , а поверхности вне области контакта остаются свободными от напряжений.

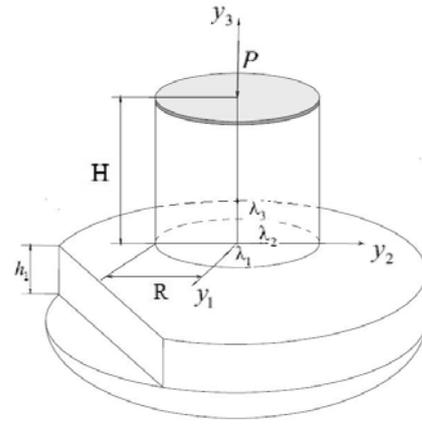


Рис. 1

В системе круговых цилиндрических координат  $(r, \theta, z_i)$  ( $i = \overline{1, 2}$ ), такой постановке задачи соответствуют граничные условия:

1) на торце упругого штампа  $z_i = Hv_i^{-1}$ , где  $v_i = \sqrt{n_i}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1.1)$$

2) на границе упругого слоя в области контакта  $z_i = 0$ :

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1.2)$$

3) на границе упругого слоя вне области контакта  $z_i = 0$ :

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (1.3)$$

4) на боковой поверхности упругого штампа  $r = R$ :

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq Hv_i^{-1}). \quad (1.4)$$

На нижней поверхности слоя, лежащего на жестком основании и скрепленного с основанием,  $z_i = -\lambda_3 h_2 / v_i = -h_i / v_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ), имеем

$$u_3^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty); \quad (1.5)$$

$$u_3^{(2)} = 0; \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (1.6)$$

где  $n_i$  корни разрешающего уравнения [2, ф-ла (2.19)].

Равнодействующая внешних сил определяется согласно равенству

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \cdot Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho.$$

Для определения напряженно-деформированного состояния в упругом цилиндре с начальными напряжениями используем линеаризованные уравнения [2, с. 78], из которых следуют выражения для компонентов вектора перемещения и тензора напряжения для сжимаемых и несжимаемых тел. Тогда общее решение  $\chi = \chi_1 + \chi_2$  для случая неравных корней  $n_1 \neq n_2$  разрешающего уравнения [2, ф-лы (2.19)] примем в виде

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{1}{\theta_8} (r^2 - z_1^2 - z_2^2) - \chi_0 \left[ r^2 \left( \frac{1}{\theta_8} + \frac{1}{2H\theta_6} (z_1 + z_2) \right) - \frac{1}{\theta_8} (z_1^2 + z_2^2) - \frac{1}{3H\theta_6} (z_1^3 + z_2^3) \right] \right\} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) + I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \right. \\ & \left. - J_0(\alpha_k r) [\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)] \right\} \chi_k \\ & \left( \chi_1 = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ \frac{1}{\theta_8} (r^2 - 2z_1^2) - \chi_0 \left[ \frac{1}{\theta_8} (r^2 - 2z_1^2) + \frac{z_1}{3H\theta_6} (3r^2 - 2z_1^2) \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} b_3^{(k)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) \right] \chi_k ; \right. \\ & \left. \chi_2 = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ \frac{1}{\theta_8} (r^2 - 2z_2^2) - \chi_0 \left[ \frac{1}{\theta_8} (r^2 - 2z_2^2) + \frac{z_2}{3H\theta_6} (3r^2 - 2z_2^2) \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} b_3^{(k)} I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) - J_0(\alpha_k r) \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \chi_k \right). \end{aligned}$$

Тогда получим формулы для перемещений и усилий

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} = & \frac{\varepsilon \theta_+ r}{2H\theta_6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k ; \\ U_3^{(1)} = & -\varepsilon \left\{ 1 + \chi_0 \left[ \frac{1}{H\theta_6} \left( \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right) - 1 \right] \right\} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} m_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)}{n_2} \right) \left. \right\} \chi_k; \\
Q_{33}^{(1)} &= C_{44} (1+m_1) l_1 \left\langle -\frac{\varepsilon}{H\theta_6} \chi_0 \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] - \right. \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right. \left. \right\} \chi_k \left. \right\rangle; \\
Q_{3r}^{(1)} &= C_{44} (1+m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_0 \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) - v_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r) \left[ \frac{1}{n_1} \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \frac{s_0}{n_2} \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right. \left. \right\} \chi_k; \quad (1.8) \\
Q_{rr}^{(1)} &= D_{44} \left\langle \frac{\varepsilon \theta_7}{2H\theta_6} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left( n_1 s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} \cos(\gamma_k z_1 v_1) F_k(1; r) - n_2 \cos(\gamma_k z_2 v_2) F_k(2; r) \right) + \right. \right. \\
& \left. + \alpha_k^2 \left( \frac{\tilde{c}_0 - 1}{r} J_1(\alpha_k r) \left[ \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) \right] \right) \right. \left. \right\} \chi_k \left. \right\rangle
\end{aligned}$$

( $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функции Бесселя действительного и мнимого аргументов);

$$b_3^{(k)} = \frac{4\varepsilon R^2 J_0(\mu_k) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_2 R)^2} \right]}{v_1 H \gamma_k^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_k(2) - v_1 s_0 W_k(1)]};$$

$$W_k(m) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_m) \frac{I_0(\gamma_k v_m R)}{I_1(\gamma_k v_m R)} + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_m R} \quad (m = 1, 2);$$

$$F_k(i; x) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_i) I_0(\gamma_k v_i x) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{x \gamma_k v_i} I_1(\gamma_k v_i x) \quad (i = 1, 2); \theta_8 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}; \theta_6 = \frac{m_1}{v_2^3} + \frac{m_2}{v_1^3};$$

$$\theta_+ = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}; \theta_7 = \frac{(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1)}{v_1} + \frac{(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2)}{v_2}; s_0 = \frac{1 + m_2}{1 + m_1}; s = s_0 \frac{l_2}{l_1};$$

$$\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) = \frac{R^2 \varepsilon}{\mu_k^2} \left[ \text{ch}(\alpha_k z_1) - \text{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \text{sh}(\alpha_k z_1) \right];$$

$$\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) = \frac{R^2 \varepsilon}{\mu_k^2} \left[ \text{sh}(\alpha_k z_1) - \text{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \text{ch}(\alpha_k z_1) \right];$$

$$\tilde{S}_3(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) \text{sh}(\alpha_k z_2) - \text{ch}(\alpha_k z_2) \right];$$

$$\tilde{S}_5(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} \left[ \text{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) \text{ch}(\alpha_k z_2) - \text{sh}(\alpha_k z_2) \right].$$

Напряженно-деформированное состояние в упругом слое с начальными (остаточными) напряжениями для неравных корней ( $n_1 \neq n_2$ ) определим [2] через гармонические функции в виде интегралов Ханкеля. Удовлетворив третьему условию (1.2), второму – (1.3) и условиям (1.5), (1.6), после ряда преобразований имеем

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left( \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right); \quad (1.9)$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0$$

$$\left( \theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) \kappa; \quad s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}; \quad s_2 = \frac{m_2 v_1}{m_1 v_2}; \quad s_3 = s_0 \frac{v_1}{v_2}; \right.$$

$$G(\eta h) = 1 - q_i^{-1}(\eta h); \quad h = h_1 / R; \quad \varphi_i = 2\eta \frac{h}{\sqrt{n_i}}; \quad \theta_3 = \frac{m_1 (s_1 - s_3)}{v_1}; \quad l = \frac{H}{R};$$

$$q_i = \left\{ \frac{s(\text{cth} \varphi_2 - s_3 \text{ch} \varphi_2);}{(s_2 + s s_3) - (s + s_2 s_3) \text{sh} \varphi_2 \text{ch} \varphi_1 + (s_3 + s s_2) \text{ch} \varphi_2 \text{sh} \varphi_1} \right\}. \quad (1.10)$$

В (1.10) значения коэффициентов  $n_i$ ,  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$ ,  $\kappa$  приведены в [2].

## 2. Метод решения.

Используя решение для цилиндра (1.8) и удовлетворяя третьему условию (1.2), второму условию (1.4), находим собственные значения задачи (1.1) – (1.6) (для случая неравных корней  $n_1 \neq n_2$ )

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H}; \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R} \quad (J_1(\mu_k) = 0). \quad (2.1)$$

Удовлетворив первым условиям (1.2) и (1.3), определим неизвестную функцию  $F(\eta)$  для (1.9) из парных интегральных уравнений (для неравных корней)

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta = q(\rho) \quad (\rho < 1); \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1) \quad (2.2)$$

$$\left[ q(\rho) = \frac{\varepsilon}{\theta_3} \left( \chi_0 - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho)}{\eta} d\eta \right); \quad \theta_4 = \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2 s_0} \right].$$

Применение формулы обращения к (2.2) приводит ее к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода относительно функции  $F(\eta)$ , т.е.

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \left( (\chi_0 - 1)\psi_0(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u)}{u} du \right) \quad (2.3)$$

$$\left( \psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt; \quad \psi_0(x, y) = \frac{x \sin x \cos y - y \sin y \cos x}{x^2 - y^2}; \quad \psi_0(x, 0) = \frac{\sin x}{x} \right).$$

Удовлетворив второму граничному условию (1.2), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta) d\eta &= -\frac{\varepsilon E \theta_5}{\kappa H} \chi_0; \quad \chi_k = \frac{\mu_k F_k}{\varepsilon R^2}; \\ &\int_0^{\infty} F(\eta) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho = \\ &= \frac{\varepsilon \theta_3}{\kappa} \left\langle \frac{4s_0 v_1 R}{l} \sum_{m,n=1}^{\infty} \tau_{mn} \iota_{kn} \chi_n - \frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{2Rv_1} \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 v_1} \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) - \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \right] \chi_k \right\rangle \\ &\left( \tau_{mn} = \frac{J_0(\mu_n) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_2 R)^2} \right]}{\gamma_m^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_m(2) - v_1 s_0 W_m(1)]} \right); \\ \iota_{kn} &= I_1(\gamma_k v_2 R) \gamma_k^4 J_0(\mu_n) \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 (\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_2^2 R^2)} - \frac{v_1}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_1^2 R^2} \right]; \quad \theta_5 = \frac{(v_2 + v_1 s) n_1 n_2}{(m_1 v_2^3 + m_2 v_1^3) E}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.3) определим используя метод последовательных приближений для  $\lambda_1 > \lambda_{kr}$ , приняв за нулевое приближение функцию

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} p(\eta) \quad \left( p(\eta) = (\chi_0 - 1)\psi_0(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\mu_k \eta) \right).$$

Последующие приближения определим по формуле

$$\frac{F^{(j)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^{(j-1)}(u)}{u} G(uh) J_0(\eta u) du.$$

Тогда решение (2.3) запишем в таком виде:

$$F(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} F^{(j)}(\eta). \quad (2.4)$$

Отметим, что процесс последовательных приближений (2.4) сходится при  $h > 1$  (ввиду громоздкости доказательства оно здесь не приводится).

Удовлетворив первым двум граничным условиям (1.2), с учетом ортогональности бesselевых функций  $J_0(\mu_k \rho)$  и значений интегралов

$$\int_0^{\infty} \eta \psi_n(\eta, \mu_k) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho = \psi_n(\mu_n, \mu_k); \quad \int_0^{\infty} \psi_0(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta = \psi_0(0, \mu_k);$$

$$\frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos \eta t d\eta \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_n)}{u} G(uh) \cos ut du = \psi_j(\eta, \mu_n),$$

для определения постоянных  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), которые входят в (1.8) и (2.4), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{G}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_{kn} \chi_n = \tilde{\omega}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Коэффициенты системы представим в виде

$$\mathcal{G}_0 = \tilde{\omega}_0 = \frac{2}{\pi} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} - \left( \frac{D_2}{3} - \frac{2D_0^2}{\pi} \right) \left( \frac{1}{h^2} + \frac{2D_0}{\pi h^3} \right) - \frac{D_0 D_2}{3\pi^2 h^4} (\pi + 4D_0) + \frac{2}{3h^5} \left( \frac{D_4}{5} + \frac{D_2^2}{6\pi} - \frac{D_2 D_0^2}{\pi^2} \right) + \frac{D_0}{18\pi h^6} \left( 11D_4 + \frac{4D_2^2}{\pi} \right) - \frac{1}{15h^7} \left( \frac{D_6}{21} + \frac{D_2 D_4}{12\pi} - \frac{19D_4 D_0^2}{6\pi^2} \right) + \dots \right];$$

$$\mathcal{G}_{0n} = \frac{2}{\pi} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_n) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(\mu_n) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1^2(\mu_n) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^3(\mu_n) - \frac{D_2}{3\mu_n^3} r_2(\mu_n) \right) + \frac{2D_0 D_2}{3\pi \mu_n^3 h^4} r_1(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - 2r_2(\mu_n)) + \frac{1}{3h^5 \mu_n^3} \left( \frac{D_4}{\mu_n^2} r_3(\mu_n) + \frac{2D_2 D_0^2}{\pi} r_1^2(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - r_2(\mu_n)) \right) + \frac{2}{3\pi \mu_n^5 h^6} \left( \frac{D_0 D_4}{8} r_1(\mu_n) (16r_3(\mu_n) + 3r_6(\mu_n)) - \frac{D_2^2}{\mu_n} r_2(\mu_n) r_5(\mu_n) \right) + \frac{1}{3\mu_n^5 h^7} \left( \frac{D_0}{\pi^2} r_1(\mu_n) \left( \frac{4D_0 D_4}{3} r_1(\mu_n) (3r_3(\mu_n) + r_6(\mu_n)) + \frac{D_2^2}{\mu_n} r_5(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - 4r_2(\mu_n)) \right) - \frac{D_6}{5\mu_n^2} r_4(\mu_n) \right) + \dots \right]; \quad (2.6)$$

$$\mathcal{G}_k = \frac{\theta_3 \mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\kappa R v_1} \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 v_1} \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) - \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \right]; \quad \mathcal{G}_{00} = \frac{\theta_5 \theta_3 RE}{\kappa l};$$

$$\tilde{\omega}_k = \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(\mu_k) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1^2(\mu_k) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^3(\mu_k) - \frac{D_2}{3\mu_k^3} r_2(\mu_k) \right) + \dots \right\} \right];$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2D_0D_2}{3\pi\mu_k^3h^4}r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + \frac{1}{3h^5\mu_k^3}\left(\frac{D_4}{\mu_k^2}r_3(\mu_k) + \frac{2D_2D_0^2}{\pi}r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k))\right) + \\
& \quad + \frac{2}{3\pi\mu_k^5h^6}\left(\frac{D_0D_4}{8}r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - \frac{D_2^2}{\mu_k}r_2(\mu_k)r_5(\mu_k)\right) + \\
& \quad + \frac{1}{3\mu_k^5h^7}\left(\frac{D_0}{\pi^2}r_1(\mu_k)\left(\frac{4D_0D_4}{3}r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + \frac{D_2^2}{\mu_k}r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k))\right) - \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{D_6}{5\mu_k^2}r_4(\mu_k)\right) + \dots \Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{k0} &= \frac{2}{\pi}\left[-\theta_4\psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{D_0}{h}r_1(\mu_k) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2}r_1^2(\mu_k) + \frac{1}{h^3}\left(\frac{4D_0^3}{\pi^2}r_1^3(\mu_k) - \frac{D_2}{3\mu_k^3}r_2(\mu_k)\right)\right\} + \right. \\
& + \frac{2D_0D_2}{3\pi\mu_k^3h^4}r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + \frac{1}{3h^5\mu_k^3}\left(\frac{D_4}{\mu_k^2}r_3(\mu_k) + \frac{2D_2D_0^2}{\pi}r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k))\right) + \\
& \quad + \frac{2}{3\pi\mu_k^5h^6}\left(\frac{D_0D_4}{8}r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - \frac{D_2^2}{\mu_k}r_2(\mu_k)r_5(\mu_k)\right) + \\
& \quad + \frac{1}{3\mu_k^5h^7}\left(\frac{D_0}{\pi^2}r_1(\mu_k)\left(\frac{4D_0D_4}{3}r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + \frac{D_2^2}{\mu_k}r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k))\right) - \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{D_6}{5\mu_k^2}r_4(\mu_k)\right) + \dots \Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{kn} &= \frac{2}{\pi}\left[-\theta_4\psi_0(\mu_n, \mu_k) - \frac{2\theta_3s_0v_1R\pi}{\kappa l}\sum_{m=1}^{\infty}\tau_{mn}t_{km} + \right. \\
& + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{D_0}{h}r_1(\mu_k)r_1(\mu_n) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2}r_1(\mu_n)r_1^2(\mu_k) + \frac{1}{h^3}\left(\frac{4D_0^3}{\pi^2}r_1(\mu_n)r_1^2(\mu_k) + \frac{D_2}{2}r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n)\right)\right\} + \\
& \quad + \frac{2D_0D_2}{\pi h^4}r_1(\mu_k)r_8^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + \frac{1}{h^5}\left(\frac{D_4}{24}r_9^{(1)}(\mu_k, \mu_n) + \frac{2D_2D_0^2}{\pi^2}r_1^2(\mu_k)r_8^{(3)}(\mu_k, \mu_n)\right) + \\
& \quad + \frac{1}{6\pi h^6}\left(D_0D_4r_1(\mu_k)r_9^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + \frac{6D_2^2}{\mu_k^3}r_5(\mu_k)r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n)\right) + \\
& \quad + \frac{1}{h^7}\left(\frac{2D_2^2D_0}{\pi^2\mu_k^3}r_1(\mu_k)r_5(\mu_k)r_8^{(1.5)}(\mu_k, \mu_n) + \frac{D_0^2D_4}{6\pi^2\mu_k^5}r_9^{(3)}(\mu_k, \mu_n)r_1^2(\mu_k) - \frac{D_6}{720}r_{10}(\mu_k, \mu_n)\right) + \dots \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\left( D_n = \int_0^{\infty} t^n G(t) dt; \quad r_1(\mu_k) = \frac{\sin \mu_k}{\mu_k}; \quad r_2(\mu_k) = 3\mu_k \cos \mu_k + (2\mu_k^2 - 3) \sin \mu_k; \right.$$

$$r_3(\mu_k) = \frac{2}{5} \mu_k^4 \sin \mu_k + \mu_k^3 \cos \mu_k - r_2(\mu_k);$$

$$r_4(\mu_k) = \frac{2}{3} \mu_k^5 \left( \frac{2}{5} \mu_k \sin \mu_k + \cos \mu_k \right) - 5\mu_k (\mu_k^2 - 3) \cos \mu_k - (2\mu_k^4 - 10\mu_k^2 + 15) \sin \mu_k;$$

$$r_5(\mu_k) = (2 - \mu_k^2) \sin \mu_k - 2\mu_k \cos \mu_k; \quad r_6(\mu_k) = (\mu_k^4 - 12\mu_k^2 + 1) \sin \mu_k + (4\mu_k^2 - 1) \mu_k \cos \mu_k;$$

$$r_7(\mu_k) = (\mu_k^6 - 30\mu_k^4 + 360\mu_k^2 - 720) \sin \mu_k + 6\mu_k (\mu_k^4 - 20\mu_k^2 + 120) \cos \mu_k;$$

$$r_8^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{mr_5(\mu_k)r_1(\mu_n)}{\mu_k^3} + \frac{r_5(\mu_n)r_1(\mu_k)}{\mu_n^3};$$

$$r_9^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{r_1(\mu_k)r_6(\mu_n)}{\mu_k^5} + \frac{6r_5(\mu_n)r_5(\mu_k)}{\mu_n^3\mu_k^3} + \frac{mr_6(\mu_k)r_1(\mu_n)}{\mu_n^5};$$

$$r_{10}(\mu_k, \mu_n) = \left. \frac{r_1(\mu_k)r_7(\mu_n)}{\mu_n^7} - \frac{15r_6(\mu_n)r_5(\mu_k)}{\mu_n^5\mu_k^3} - \frac{15r_5(\mu_n)r_6(\mu_k)}{\mu_n^3\mu_k^5} + \frac{r_7(\mu_k)r_1(\mu_n)}{\mu_k^5} \right).$$

Таким образом, задача сводится к вычислению квадратур  $D_n$ , которые (из-за сложности  $q_1^{-1}(x)$  в элементарных функциях вычислить не представляется возможным) для потенциалов конкретной структуры допускают числовую реализацию на ЭВМ. Причем, для слоя, который лежит на жесткой основе без трения (1.5), при  $n_1 \neq n_2$ , можно использовать приближенное выражение

$$q_1^{-1}(x) \cong 1 - \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} \frac{\theta_-}{\theta_+} + 1} \frac{\text{sh}(x\theta_-)}{\text{sh}(x\theta_+)} - \frac{0,28\tilde{\kappa}^2}{1 + \tilde{\kappa}^2} \frac{\text{sh}(x\theta_-)}{\frac{\theta_-}{\theta_+} \text{sh}(x\theta_+)} \left( \tilde{\kappa} = s - s_0; \quad \theta_- = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right). \quad (2.7)$$

Используя условие равновесия (1.7), установим связь между осадкой и равнодействующей нагрузкой  $P$  в таком виде:  $P = 2\pi\varepsilon E\theta_5\theta_1(\kappa H)^{-1} \chi_0$

Определив неизвестные постоянные  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) из системы (2.5), вычислим перемещения и напряжения как в упругом штампе, так и в слое по формулам (1.8) и (1.9). В результате этого решение представим в виде рядов через бесконечную систему констант, которые определяются из системы регулярных линейных алгебраических уравнений (2.5). Причем в системе (2.5) коэффициенты  $\mathcal{G}_k$  и  $\mathcal{G}_{kn}$  зависят от величин, определяющих структуру упругого потенциала, высоту упругого штампа  $H$  и толщину предварительно напряженного слоя, а свободные члены зависят только от корней характеристического уравнения  $n_1, n_2$ .

### §3. Числовые результаты.

С учетом (2.7) система (2.5) решена методом редукции для потенциала Трелоара (тело неогукковского типа) для следующих значений параметров:  $k = n = 16$ ;  $\nu = 0,5$ ;  $H = 10$ ;  $\lambda_1 = (0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2)$ . На рис. 2 – 4 показано распределение контактных напряжений и перемещений под штампом  $(-\pi R^2 \tilde{Q}_{33} / P, -U_3 / \varepsilon, U_r / \varepsilon)$  для  $h = 1,6$ , а на рис. 5, 6 – для  $h = 4$ . Причем, значениям  $\lambda_1$  соответствуют кривые снизу

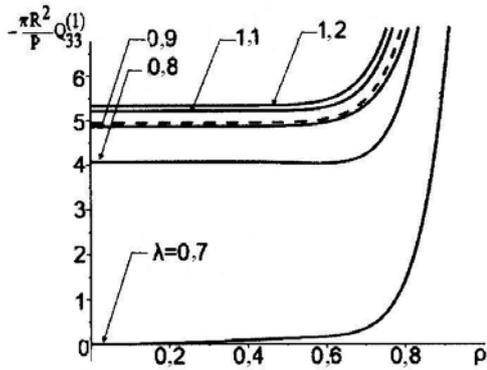


Рис. 2

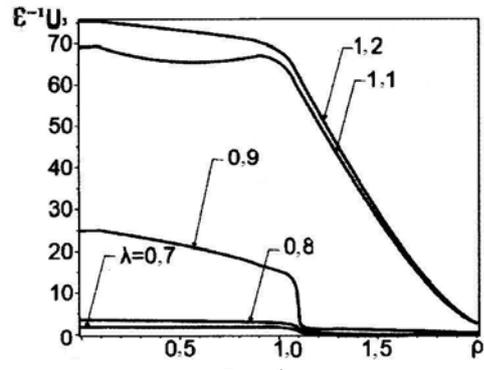


Рис. 3

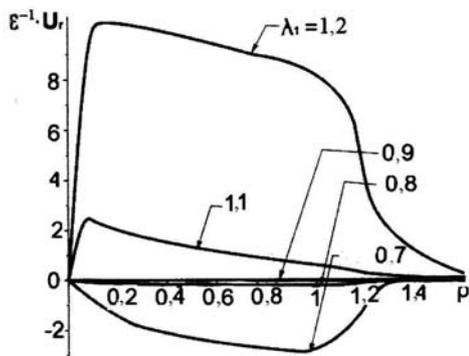


Рис. 4

вверх по возрастанию  $\lambda_1$ . Пунктирные кривые соответствуют слою без начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ), а сплошные – с начальными (остаточными) напряжениями.

#### Заключение.

Анализ аналитического решения и числовые результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1. Для потенциалов, которые соответствуют неравным корням  $n_1 \neq n_2$  (потенциал Трелоара – тело неогукковского типа), при  $\lambda_1 = 1$  представленное в работе решение в рамках линеаризованной теории упругости с учетом начальных напряжений не совпадает с аналогичным решением для линейного трансверсально-изотропного тела (без начальных напряжений) из-за несовпадения соответствующих им общих решений.

2. Влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого цилиндрического штампа состоит в следующем: а) начальные напряжения в слое приводят в случае сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ) к уменьшению напряжений в упругом цилиндре, а в случае растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) – к их увеличению (для перемещений – наоборот); б) наибольшее влияние начальных напряжений отмечено на боковой поверхности цилиндрического штампа.

3. Начальные напряжения в упругом слое приводят к существенному изменению закона распределения контактных напряжений, при этом в случае сжатия контактные напряжения значительно уменьшаются (в случае растяжения – увеличиваются), а перемещения в случае сжатия значительно возрастают (при растяжении – уменьшаются).

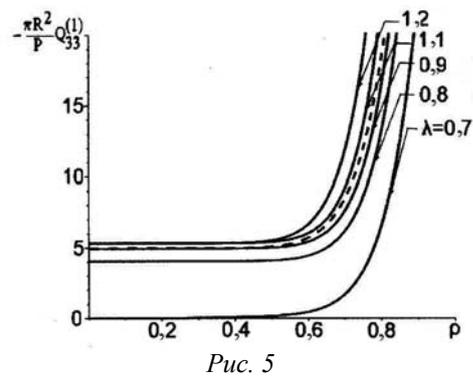


Рис. 5

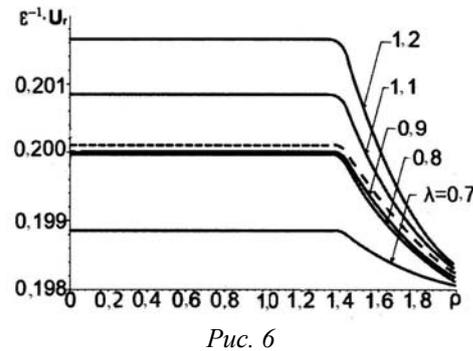


Рис. 6

4. Характер влияния начальных напряжений не зависит от толщины слоя.

5. Более существенное влияние (количественного характера) начальные (остаточные) напряжения оказывают в высокоэластичных материалах по сравнению с более жесткими материалами; качественное влияние – имеет идентичный характер.

6. При стремлении начальных (остаточных) напряжений к значениям соответствующим поверхностной неустойчивости слоя и штампа, появляются эффекты «резонансного» характера, которые заключаются в том, что напряжения и перемещения в контактирующих телах резко изменяются (напряжения стремятся к нулю, а перемещения неограниченно возрастают).

Таким образом, в данной работе получены аналитические и графические зависимости, отражающие влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние системы упругого цилиндра и слоя с начальными (остаточными) напряжениями. Это влияние существенно как для сжимаемых, так и несжимаемых тел, и его следует учитывать при расчетах на прочность деталей машин и конструкций.

РЕЗЮМЕ. На основі лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок осесиметричної змішаної задачі про тиск пружного циліндричного штамп на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу

1. *Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* О контактной задаче для предварительно напряженного слоя // Прикл. механика. – 1987. – **23**, №5. – С. 110 – 112.
2. *Гузь А.Н., Рудницький В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: ПП Мельник, 2006. – 710 с.
3. *Рудницький Т.В.* Контактное взаимодействие конечного цилиндрического штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями // Тез. докл. конф. «Современные проблемы механики», посвященный 100-летию Л.А. Галина. – М., 2012. – С. 90.
4. *Dhalwal R.S., Singh B.M., Rokne J.G.* Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hookean elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, N1. – P. 169 – 179.
5. *Gao X.-L., Mao J.C.L.* Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space // J. Appl. Mech. – 2014. – **81**, N 4. – P. 107 – 119.
6. *Gaskins J., Scott B.N., Matthew R.B.* Comprehensive Solutions for the Response of Freestanding Beams with Tensile Residual Stress Subject to Point-Loading // J. Appl. Mech. – 2014. – **81**, N3. – P. 318 – 324.
7. *Guz A.N., Babich S.Yu., Rudnitsky V.B.* Contact Problems for Elastic Bodies With Initial Stresses: Focus on Ukrainian Research // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N5. – P. 343 – 371.
8. *Kassir M.K., Sih G.C.* Mechanics of fracture. Three-dimensional crack problems // Netherlands Nordhoff Int. Publ. – 1975. – N 2. – P. 452.
9. *Khotenko E.A.* Numerical Analysis of a Nonlinear Elastic Rayleigh Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 719 – 726.
10. *Kurashige M.* Circular Crack Problem for Initially Stressed Neo-Hookean Solid // ZAMM. – 1969. – **49**, N 8. – P. 671 – 678.
11. *Paquet D., Lantaigne J., Bernard M.* A New Experimental Method for the Introduction of a Predetermined Amount of Residual Stresses in Fatigue Test Specimens // J. Appl. Mech. – 2012. – **79**, N 6. – P. 162 – 171.
12. *Rushchitsky J.J., Khotenko E.A.* On the Role of Boundary Conditions in the Nonlinear Analysis of a Rayleigh Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 3. – P. 305 – 318.
13. *Vasilikis D., Karamanos S.* Discussion: Mechanics of Confined Thin-Walled Cylinders Subjected to External Pressure // Appl. Mech. Rev. – 2014. – **66**, N 1. – P. 312 – 321.
14. *Xiaogang X., Ryo K., Motoj Y.* A Contact Force Model With Nonlinear Compliance and Residual Indentation // J. Appl. Mech. – 2013. – **81**, N 2. – P. 213 – 219.
15. *Zak A. R.* Stress in the vicinity of boundary discontinuities in bodies of revolution // J. Appl. Mech. – 1964. – **31**, N 1. – P. 83 – 92.

Поступила 12.04.2013

Утверждена в печать 03.12.2013