

В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
СТОЯЧИХ И БЕГУЩИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН
В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ЖИДКОСТЬЮ
В УСЛОВИЯХ ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: volna@inmech.kiev.ua*

Abstract. The statement is given and the technique of study is expounded for the problems on nonlinear interaction in conditions of internal resonances of the orthotropic circular cylindrical fluid-filled shells under their natural vibrations. Three variants of the problem is considered: interaction of standing waves; interaction of running in the circumferential direction waves; interaction of standing and running waves. For each of variant, the integral characteristics are built, which link the amplitude and frequency parameters of interacting waves.

Key words: cylindrical shell, ideal incompressible fluid, internal resonance, standing and running waves, interaction, first integral.

Введение.

Заполненные жидкостью тонкостенные цилиндрические оболочки характеризуются обычно достаточно плотным частотным спектром, что при определенных условиях (при свободных колебаниях или при действии внешних периодических нагрузок) может привести к появлению сложных многомодовых или многоволновых форм их динамического деформирования [5, 17, 18 и др.]. В большей степени такая ситуация характерна для оболочек с композитной структурой строения материала [3, 4, 15]. Поэтому актуальными на современном этапе являются задачи о моделировании колебательных и волновых процессов во взаимодействующих с жидкостью композитных оболочечных конструкциях, имеющих близкие собственные частоты. Очевидно, что для адекватного описания этих процессов необходимо использовать многомерные расчетные модели, в которых должны быть одновременно учтены все «резонирующие» между собой формы упругого объекта из-за их сильной энергетической связанности при колебаниях [3, 4, 6, 16, 17]. С другой стороны, эффекты «резонансного» взаимодействия различных форм наиболее существенно проявляются при колебаниях оболочек с большими прогибами. Геометрическая и другие типы нелинейностей (в частности, физическая или инерционная) [3, 15, 20, 21] создают предпосылки для радикального перераспределения энергии между формами не только при наличии близких собственных частот, но и в случае кратных зависимостей между данными частотами. Такого рода резонансы, именуемые обычно «внутренними» [3, 6, 13, 19], неоднократно наблюдались при экспериментальных исследованиях колебаний как изотропных, так и композитных (в частности, стеклопластиковых) цилиндрических оболочек [12, 15 и др.].

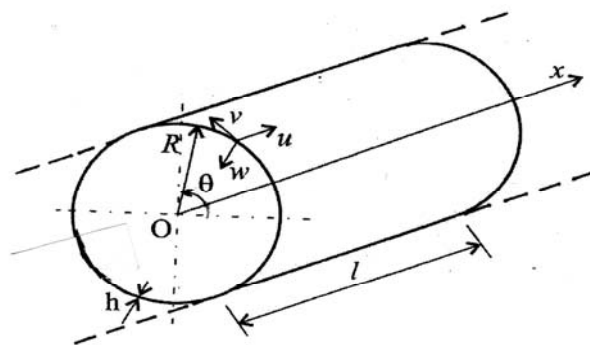
Нелинейные задачи о колебаниях тонких цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, на основе многопараметрических расчетных моделей (в прогибе изначально учитывалось несколько различных осе- и неосесимметричных изгибных форм)

рассматривались ранее многими авторами. Достаточно полный обзор таких исследований представлен, в частности, в работе [9], во вводных частях работ [11, 18] и других публикациях. Схема решения нелинейных задач в большинстве случаев сводилась к построению (с использованием метода Галеркина) некоторой конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дальнейший анализ которых проводился численно. В результате определялись амплитуды колебаний несущей оболочки, соответствующие каждой из учитываемых форм, строились амплитудно-частотные характеристики при действии на оболочку внешних поперечных и осевых периодических сил, устанавливались области устойчивых режимов колебаний, исследовались возможные квазипериодические режимы и т.д. [10, 11, 13, 18, 19 и др.]. Некоторые результаты экспериментальных исследований колебаний с большими прогибами как пустых, так и заполненных жидкостью круговых цилиндрических оболочек приведены в [8, 10, 12].

В данной работе изложены подходы к расчету процессов нелинейного взаимодействия различных волновых форм деформирования заполненных жидкостью круговых ортотропных цилиндрических оболочек, характеризуемых близкими собственными частотами. Процессы взаимодействия рассматриваются, исходя из анализа свободных колебаний совокупной системы. Ранее такого рода задачи применительно к оболочечно-жидкостным объектам не были исследованы. Основное внимание уделено построению и последующему анализу некоторых интегральных характеристик, описывающих специфику взаимодействия и энергообмена в условиях внутреннего резонанса между стоячими изгибными волнами, бегущими (распространяющимися в окружном направлении) волнами, а также между стоячими и бегущими волнами.

§1. Постановка задачи. Исходные динамические уравнения.

Рассмотрим замкнутую, полностью заполненную жидкостью, цилиндрическую оболочку конечной длины, на обоих краях которой реализованы условия «классического» свободного опирания (условия Навье). Соответствующие геометрические размеры оболочки и система отсчета приведены на рисунке. Предполагаем, что материал оболочки соответствует ортотропной модели. Примем также, что обозначенные на рисунке штриховыми линиями участки вне оболочки ($x < 0$, $x > l$), не оказывают через граничные условия никакого влияния на процесс деформирования рассматриваемой модели (когда $0 \leq x \leq l$) [10, 11, 17].



Для описания динамического деформирования оболочки в случае их свободных колебаний выберем геометрически нелинейные уравнения классической теории, представленные в смешанной форме. Для ортотропной модели эти уравнения имеют вид [1 – 3]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = hL(w, \Phi) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_z;$$

$$A_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

Здесь $w = w(x, y, t)$ – радиальный прогиб (положителен к центру кривизны); Φ – функция напряжений в срединной поверхности оболочки; D_{jk} – жесткостные параметры оболочки, причем $D_{ii} = E_i h^3 / [12(1 - \mu_1 \mu_2)]$ ($i = 1, 2$); $D_{12} = D_1 \mu_2$; $D_{66} = Gh^3 / 12$; A_{jk} – компоненты матрицы податливости ортотропного материала, которые выражаются так: $A_{11} = 1/E_1$; $A_{22} = 1/E_2$; $A_{12} = -\mu_1/E_1$; $A_{66} = 1/G$, где E_1, E_2 – модули упругости в направлении осей x и y (y – окружная координата), соответственно; G – модуль сдвига в плоскости армирования; μ_1, μ_2 – соответствующие коэффициенты Пуассона (при этом в силу упругой симметрии выполняется соотношение $E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$); L – дифференциальный оператор вида

$$L(K_1, K_2) = \frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 K_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 K_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 K_2}{\partial x \partial y}; \quad (1.2)$$

P_z – гидродинамическое давление жидкости, для определения которого используется приближенная формула [2]

$$P_z = -\rho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{r=R}, \quad (1.3)$$

где ρ_0 – плотность жидкости (жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, ее движение потенциальное); $\varphi = \varphi(x, y, \Theta)$ – потенциал скоростей, который определяем, решая краевую задачу [2, 11, 17]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\partial w}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} < \infty; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ при } x=0, \quad x=l$$

(x, r, Θ – цилиндрические координаты: $0 \leq x \leq l$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$).

Учитывая принятые краевые условия, аппроксимируем искомый динамический прогиб оболочки w выражением

$$w = \sum_{j=1}^3 (f_{2j-1} \cos s_j y + f_{2j} \sin s_j y) \sin \lambda x + f_7 \sin^4 \lambda x, \quad (1.4)$$

в котором учтены три пары сопряженных форм [3, 6, 15, 16] с параметрами волнообразования $s_j = n_j / R$ ($j = 1, 2, 3$), $\lambda = m\pi / l$ в окружном и продольном направлениях, соответственно. «Корректирующее» слагаемое $f_7 \sin^4 \lambda x$ в разложении (1.4) описывает эффект «несимметричности» деформирования оболочки относительно срединной поверхности, характерный для колебаний с большими прогибами. Таким образом, структура прогиба (1.4) позволяет исследовать процессы энергообмена и взаимодействия между различными изгибными формами оболочки, которым, в общем случае, могут соответствовать близкие по величине собственные частоты. При этом, учитывая специфику сопряженных форм (им отвечают одни и те же собственные частоты) прогиб w (1.4) целесообразно представить в «волновом» виде, более удобном для исследования волновых форм деформирования оболочки различной структуры (стоячих волн, бегущих волн) при наличии внутренних резонансов. С этой целью введем замену переменных $f_{2j-1} = a_k \cos \alpha_k$; $f_{2j} = a_k \sin \alpha_k$, в которой $k = 1$, если $j = 1$; $k = 2$ при $j = 2$; $k = 3$ при $j = 3$. В результате вместо (1.4) получим

$$w = \sum_{k=1}^3 a_k \cos(s_k y - \alpha_k) \sin \lambda x + c \sin^4 \lambda x \quad (c = f_7). \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что, если в процессе колебаний оболочки выполняются условия $\dot{\alpha}_k \equiv 0$ ($k=1, 2, 3$), то её деформирование из-за $\alpha_k = C_k = \text{const}$ будет представлять собой наложение стоячих волн (с добавлением «корректирующего» члена $c \sin^4 \lambda x$). В свою очередь, при $\dot{\alpha}_k \neq 0$ каждый из первых трех слагаемых в прогибе w описывает бегущую волну, амплитуда и фазовая скорость которой a_k и $v_k = \dot{\alpha}_k / s_k$ могут принимать в одних случаях (в зависимости от задаваемых начальных условий) постоянные значения, в других – изменяться с течением времени по некоторым законам. И, наконец, при $\dot{\alpha}_k \equiv 0$, $\dot{\alpha}_j \neq 0$ ($k, j=1, \dots, 3, k \neq j$) прогиб оболочки характеризуется наложением и взаимодействием стоячих и бегущих волн.

Для определения амплитудных a_k , c и фазовых α_k переменных использован метод Бубнова – Галеркина (БГ) с одновременным требованием выполнения известного условия периодичности [1]. В качестве весовых функций ζ_1, \dots, ζ_7 приняты такие функции:

$$\zeta_1 = \cos(s_1 y - \alpha_1) \sin \lambda x; \quad \zeta_2 = \cos(s_2 y - \alpha_2) \sin \lambda x; \quad \zeta_3 = \cos(s_3 y - \alpha_3) \sin \lambda x;$$

$$\zeta_4 = a_1 \sin(s_1 y - \alpha_1) \sin \lambda x; \quad \zeta_5 = a_2 \sin(s_2 y - \alpha_2) \sin \lambda x; \quad \zeta_6 = a_3 \sin(s_3 y - \alpha_3) \sin \lambda x;$$

$$\zeta_7 = \sin^4 \lambda x.$$

Подставляя (1.3) (значение функции P_2 приведено в работе [17]) в первое уравнение (1.1) и реализуя процедуру метода БГ, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + (\omega_1^2 - \dot{\alpha}_1^2) a_1 + k_{11} a_1^3 + k_{12} a_1 a_2^2 + k_{13} a_1 a_3^2 + k_{14} a_1 c + k_{15} a_1 c^2 &= 0; \\ \ddot{a}_2 + (\omega_2^2 - \dot{\alpha}_2^2) a_2 + k_{22} a_2^3 + k_{21} a_2 a_1^2 + k_{23} a_2 a_3^2 + k_{24} a_2 c + k_{25} a_2 c^2 &= 0; \\ \ddot{a}_3 + (\omega_3^2 - \dot{\alpha}_3^2) a_3 + k_{33} a_3^3 + k_{31} a_3 a_1^2 + k_{32} a_3 a_2^2 + k_{34} a_3 c + k_{35} a_3 c^2 &= 0; \\ \ddot{c} + \omega_4^2 c + k_{41} a_1^2 + k_{42} a_2^2 + k_{43} a_3^2 + k_{44} a_1 c + k_{45} a_2 c + k_{46} a_3 c^2 &= 0; \\ a_1 \ddot{\alpha}_1 + 2 \dot{a}_1 \dot{\alpha}_1 &= 0; \quad a_2 \ddot{\alpha}_2 + 2 \dot{a}_2 \dot{\alpha}_2 = 0; \quad a_3 \ddot{\alpha}_3 + 2 \dot{a}_3 \dot{\alpha}_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\omega_1, \dots, \omega_4$ – собственные частоты оболочки, вычисляемые по формулам

$$\omega_k^2 = \frac{1}{\rho m_{0k}} \left[\frac{\Delta_D(\lambda, s_k)}{h} + \frac{\lambda^4}{\Delta_A(\lambda, s_k) R^2} \right] \quad (k=1, 2, 3);$$

$$\omega_4^2 = \frac{64}{35 \rho m_{04}} \left[\frac{8 D_{11} \lambda^4}{h} + \frac{35}{64 A_{22} R^2} \right],$$

причем Δ_D, Δ_A – операторы такого вида:

$$\Delta_D(\lambda, s_k) = D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 s_k^2 + D_{22} s_k^4; \quad \Delta_A(\lambda, s_k) = A_{22} \lambda^4 + (2A_{12} + A_{66}) \lambda^2 s_k^2 + A_{11} s_k^4;$$

m_{01}, \dots, m_{04} – параметры присоединенных масс жидкости:

$$m_{0k} = 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{2I_{n_k}(\lambda R)}{\lambda h (I_{n_k-1}(\lambda R) + I_{n_k+1}(\lambda R))} \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$m_{04} = 1 + \frac{16}{35} \frac{\rho_0}{\rho h l^2} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_j R) M_j^2}{\lambda_j I_0'(\lambda_j R)};$$

$$M_j = \frac{192\lambda^4}{\lambda_j(\lambda_j^2 - 4\lambda^2)(\lambda_j^2 - 16\lambda^2)}, \quad \lambda_j = \frac{j\pi}{l} \quad (j = 1, 3, 5, \dots);$$

k_{pq} – постоянные коэффициенты, характеризующие геометрическую нелинейность оболочки, зависящие определенным образом от физических и геометрических параметров оболочки [16, 17]

$$k_{11} = \frac{1}{16\rho m_{01}} \left(\frac{\lambda^4}{A_{22}} + \frac{3s_1^4}{A_{11}} \right); \quad k_{12} = \frac{1}{8\rho m_{01}} \left(\frac{s_1^2 s_2^2}{A_{22}} + M_0 \right);$$

$$M_0 = \frac{\lambda^4}{2} (s_1 - s_2)^4 \left[\frac{1}{\Delta_A(2\lambda, s_1 + s_2)} + \frac{1}{\Delta_A(0, s_1 - s_2)} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda^4}{2} (s_1 + s_2)^4 \left[\frac{1}{\Delta_A(2\lambda, s_1 + s_2)} + \frac{1}{\Delta_A(0, s_1 - s_2)} \right] \text{ и т.д.}$$

По аналогии с [1, 3, 16, 17] упростим систему (1.6). Определим функцию $c = c(t)$ из «квазистатического» варианта задачи, полагая $\ddot{c} = 0$ (обоснованность такого подхода изложена в [2]). Тогда получим

$$c = - \frac{k_{41}a_1^2 + k_{42}a_2^2 + k_{43}a_3^2}{\omega_4^2 + k_{44}a_1^2 + k_{45}a_2^2 + k_{46}a_3^2}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в первые три уравнения (1.6) и удерживая нелинейные члены до третьей степени включительно, получим следующую систему для определения неизвестных амплитудных a_k и фазовых α_k параметров волн ($k = 1, 2, 3$):

$$\ddot{a}_1 + (\omega_1^2 - \dot{\alpha}_1^2)a_1 + \gamma_1 a_1^3 + \delta_1 a_1 a_2^2 + \delta_4 a_1 a_3^2 = 0;$$

$$\ddot{a}_2 + (\omega_2^2 - \dot{\alpha}_2^2)a_2 + \gamma_2 a_2^3 + \delta_2 a_2 a_1^2 + \delta_5 a_2 a_3^2 = 0; \quad (1.8)$$

$$\ddot{a}_3 + (\omega_3^2 - \dot{\alpha}_3^2)a_3 + \gamma_3 a_3^3 + \delta_3 a_3 a_1^2 + \delta_6 a_3 a_2^2 = 0; \quad \alpha_k \ddot{a}_k + 2\dot{\alpha}_k \dot{a}_k = 0$$

$$\left(\gamma_1 = k_{11} - \frac{k_{14}k_{41}}{\omega_4^2}; \gamma_2 = k_{22} - \frac{k_{24}k_{42}}{\omega_4^2}; \gamma_3 = k_{33} - \frac{k_{34}k_{43}}{\omega_4^2}; \right.$$

$$\delta_1 = k_{12} - \frac{k_{14}k_{42}}{\omega_4^2}; \delta_2 = k_{21} - \frac{k_{24}k_{41}}{\omega_4^2}; \delta_3 = k_{31} - \frac{k_{34}k_{41}}{\omega_4^2};$$

$$\left. \delta_4 = k_{13} - \frac{k_{14}k_{43}}{\omega_4^2}; \delta_5 = k_{23} - \frac{k_{24}k_{43}}{\omega_4^2}; \delta_6 = k_{32} - \frac{k_{34}k_{42}}{\omega_4^2} \right).$$

Последние три уравнения (1.8) можно проинтегрировать и получить такие соотношения:

$$\dot{\alpha}_k = \frac{C_{0k}}{a_k^2} \quad (k=1,2,3). \quad (1.9)$$

Здесь C_{0k} – постоянные интегрирования, имеющие вид $C_{0k} = \dot{\alpha}_k(0) a_k^2(0)$, где $\dot{\alpha}_k(0)$, $a_k(0)$ – начальные значения соответствующих функций $\dot{\alpha}_k(t), a_k(t)$. С учетом (1.9) на основании системы (1.8) можно определить величины a_1, a_2, a_3 , позволяющие восстановить в замкнутом виде искомый динамический прогиб (1.5) рассматриваемой оболочки при ее свободных колебаниях.

§2. Взаимодействие двух изгибных волн.

Для выяснения характерных особенностей процесса взаимодействия волн рассмотрим частный случай, когда в функции прогиба (1.5) учитываются первые две пары сопряженных форм, т.е. когда $a_3(t) \equiv 0$. При этом последовательно исследуем энергообмен между двумя стоячими волнами, между двумя бегущими волнами и между стоячей и бегущей волной. В каждом из трех перечисленных случаев предполагаем выполненным резонансное соотношение $\omega_1 \approx \omega_2$. Условие для его реализации, устанавливающее связь между геометрическими и физическими параметрами оболочки, а также параметрами волнообразования и гидродинамическими параметрами, приведено в работе [4, формула (10)].

2.1. Взаимодействие двух стоячих волн. Полагая в (1.8) $\dot{\alpha}_k = 0$, приближенное периодическое решение для функций a_1, a_2 в соответствии с методом Боголюбова – Митропольского в случае $\omega_1 \approx \omega_2$ представим в форме

$$a_1 = b_1 \cos(\omega t + \vartheta_1); \quad a_2 = b_2 \cos(\omega t + \vartheta_2), \quad (2.1)$$

где амплитудные b_1, b_2 и фазовые ϑ_1, ϑ_2 параметры должны быть получены из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \frac{\delta_1}{8\omega} b_1 b_2^2 \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\delta_2}{8\omega} b_2 b_1^2 \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{8\omega} \{ 3\gamma_1 b_1^2 + \delta_1 b_2^2 [2 + \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2)] \}; \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \frac{1}{8\omega} \{ 3\gamma_2 b_2^2 + \delta_2 b_1^2 [2 + \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2)] + 4\Delta_1 \}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\Delta_1 = \omega_2^2 - \omega_1^2$, причем в соотношениях (2.1) принято $\omega = \omega_1$.

Из первых двух уравнений (2.2) выводим первый интеграл

$$\frac{b_1^2}{\delta_1} + \frac{b_2^2}{\delta_2} = C_0, \quad (2.3)$$

где C_0 – постоянная интегрирования принимает вид

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{\delta_1} [\dot{a}_1^2(0) + \omega^2 a_1^2(0)] + \frac{1}{\delta_2} [\dot{a}_2^2(0) + \omega^2 a_2^2(0)] \right\}. \quad (2.4)$$

Система (2.2) может быть тогда сведена к анализу двух уравнений

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\delta_2 b_1}{8\omega} (C_0 \delta_1 - b_1^2) \sin 2\theta_1; \quad \frac{d\theta_1}{dt} = M + N b_1^2 + \frac{\delta_2}{8\omega} (C_0 \delta_1 - 2b_1^2) \cos 2\theta_1 \quad (2.5)$$

$$\left(M = \frac{1}{4\omega} \left[C_0 \delta_2 \left(\delta_1 - \frac{3}{2} \gamma_2 \right) - 2\Delta_1 \right]; \quad N = \frac{1}{4\omega} \left[\frac{3}{2} (\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\delta_2}{\delta_1}) - 2\delta_2 \right], \quad \theta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2 \right).$$

В результате из уравнений (2.5) получаем еще один первый интеграл, устанавливающий зависимость при колебаниях оболочки амплитуды b_1 и «расстройки» фаз $\theta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2$

$$b_1^2 [4\omega(2M + N b_1^2) + \delta_2 (C_0 \delta_1 - b_1^2) \cos 2\theta_1] = C_2. \quad (2.6)$$

Здесь C_2 – постоянная интегрирования, выражающаяся определенным образом через начальные значения $b_1(0)$, $\theta_1(0)$.

Таким образом, задача о взаимодействии двух стоячих волн, отвечающих близким собственным частотам, сведена в итоге к рассмотрению двух интегралов (2.3) и (2.6), которые позволяют проследить, как приданная оболочке в начальный момент времени $t=0$ энергия будет впоследствии (при свободных колебаниях оболочки) перераспределяться во времени между каждой из волн. Динамический прогиб w в рассматриваемом случае соответствует такому представлению:

$$w = [b_1 \cos(\omega t + \vartheta_1) \cos(s_1 y - \alpha_{10}) + \sqrt{\left(C_0 - \frac{b_1^2}{\delta_1} \right)} \delta_2 \cos(\omega t + \vartheta_2) \cos(s_2 y - \alpha_{20})] \sin \lambda x - \frac{1}{2\omega_4^2} \left\{ \left(k_{41} - \frac{\delta_2}{\delta_1} k_{42} \right) b_1^2 + k_{41} b_1^2 \cos 2(\omega t + \vartheta_1) + k_{42} \delta_2 \left[C_0 + \left(C_0 - \frac{b_1^2}{\delta_1} \right) \cos 2\vartheta_2 \right] \right\} \sin^4 \lambda x, \quad (2.7)$$

причем $\alpha_{10}, \alpha_{20} = \text{const}$.

На основании уравнений (2.5) можно определить возможные стационарные решения для амплитуды и фазы и исследовать их устойчивость. Полагая правые части этих уравнений равными нулю, находим такие значения стационарных амплитуд и фаз b_1 и θ_1 :

$$\theta_1 = k\pi/2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad b_1^2 = \frac{8M\omega + \delta_1 \delta_2 C_0 (-1)^k}{2(\delta_2 (-1)^k - 4\omega N)} > 0; \quad (2.8)$$

$$b_1^2 = C_0 \delta_1; \quad \cos 2\theta_1 = \frac{8\omega(M + N C_0 \delta_1)}{\delta_1 \delta_2 C_0}. \quad (2.9)$$

Критерии устойчивости полученных решений имеют вид

$$\delta_2 (b_1^2 - C_0 \delta_1) \sin 2\theta_1 < 0; \quad (C_0 \delta_1 - 3b_1^2)(C_0 \delta_1 - 2b_1^2) \sin^2 2\theta_1 + 4b_1^2 (C_0 \delta_1 - b_1^2) \left(\frac{4\omega}{\delta_2} N - \cos 2\theta_1 \right) \cos 2\theta_1 < 0. \quad (2.10)$$

Первый из этих критериев не дает ответа на вопрос об устойчивости обоих решений (2.8), (2.9). На основании второго критерия устанавливаем, что решение (2.8) всегда неустойчиво. Выяснение вопроса об устойчивости стационарных решений (2.10) целесообразно провести путем исследования на фазовой плоскости характера особых точек уравнения

$$\frac{db_1}{d\theta_1} = \frac{\delta_2 b_1 (C_0 \delta_1 - b_1^2) \sin 2\theta_1}{8\omega(M + N b_1^2) + \delta_2 (C_0 \delta_1 - 2b_1^2) \cos 2\theta_1},$$

полученного из системы (2.5).

2.2. Взаимодействие двух бегущих волн. Пусть теперь $\dot{\alpha}_k \neq 0$ ($k=1,2$), так что система (1.8) с учетом (1.9) примет (в случае $a_3 \equiv 0$) вид

$$\ddot{a}_1 + \left(\omega_1^2 - \frac{C_{01}}{a_1^4}\right)a_1 + \gamma_1 a_1^3 + \delta_1 a_1 a_2^2 = 0; \quad \ddot{a}_2 + \left(\omega_2^2 - \frac{C_{02}}{a_2^4}\right)a_2 + \gamma_2 a_2^3 + \delta_2 a_2 a_1^2 = 0. \quad (2.11)$$

Методика построения приближенных периодических решений таких уравнений приведена в работах [14, 16]. Эти решения при $\omega_1 \approx \omega_2$ следует представить в форме

$$a_1 = \sqrt{u_1 + v_1 \sin \varphi_1}; \quad a_2 = \sqrt{u_2 + v_2 \sin \varphi_2},$$

где $\varphi_k = 2(\omega t + \vartheta_k)$ ($\omega = \omega_1$); u_k, v_k, ϑ_k ($k=1, 2$) – некоторые медленно изменяющиеся функции времени, подлежащие определению. Полагая в соответствии с методом усреднения [5, 14] $\dot{a}_1 = (\omega v_1 \cos \varphi_1) / a_1$; $\dot{a}_2 = (\omega v_2 \cos \varphi_2) / a_2$ на основании (2.11) получим такую систему уравнений, составленных относительно медленно изменяющихся функций u_k, v_k, ϑ_k :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \delta_1 \frac{v_1 v_2}{2\omega} \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); & \frac{du_2}{dt} &= -\delta_2 \frac{v_1 v_2}{2\omega} \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \\ \frac{dv_1}{dt} &= \delta_1 \frac{u_1 v_2}{2\omega} \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); & \frac{dv_2}{dt} &= -\delta_2 \frac{v_1 u_2}{2\omega} \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{4\omega} \left[3\gamma_1 u_1 + 2\delta_1 u_2 + \delta_1 \frac{v_2 u_1}{v_1} \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right]; \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \frac{1}{4\omega} \left[3\gamma_2 u_2 + 2\delta_2 u_1 + 2\Delta_1 + \delta_2 \frac{u_2 v_1}{v_2} \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] \quad (\Delta_1 = \omega_2^2 - \omega_1^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из этой системы (точнее, из первых 4-х уравнений) можно получить три первых интеграла

$$\frac{u_1}{\delta_1} + \frac{u_2}{\delta_2} = C_{00}; \quad u_1^2 - v_1^2 = C_{10}; \quad u_2^2 - v_2^2 = C_{20}, \quad (2.13)$$

где C_{j0} – постоянные интегрирования ($j=0, 1, 2$), причем

$$\begin{aligned} C_{00} &= \frac{1}{2\omega} \left\{ \frac{1}{\delta_1} [\dot{a}_1^2(0) + a_1^2(0)(\omega^2 + \dot{\alpha}_1^2(0))] + \frac{1}{\delta_2} [\dot{a}_2^2 + a_2^2(0)(\omega^2 + \dot{\alpha}_2^2(0))] \right\}; \\ C_{10} &= \frac{\dot{\alpha}_1^2(0) a_1^4(0)}{\omega^2}; \quad C_{20} = \frac{\dot{\alpha}_2^2(0) a_2^4(0)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Учитывая (2.13), можно понизить порядок системы (2.12), преобразовав ее к виду [15, 16]

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\delta_1}{2\omega} S(u_1) \sin 2\theta_1; \quad \frac{d\theta_1}{dt} = M_1 + N_1 u_1 + \frac{\delta_1}{4\omega} \frac{dS}{du_1} \cos 2\theta_1 \quad (2.14)$$

$$\left[S(u_1) = \sqrt{u_1^2 - C_{10}} \sqrt{(C_{00} - u_1 / \delta_1)^2 \delta_2^2 - C_{20}}; \quad \theta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2; \right.$$

$$M_1 = \frac{1}{4\omega} [C_{00}(2\delta_1 - 3\gamma_2)\delta_2 - 2\Delta_1]; \quad N_1 = \frac{1}{4\omega} (3(\gamma_1 + \gamma_2 \delta_2/\delta_1) - 4\delta_2) \Big].$$

Анализируя (2.14), выводим аналогичный (2.6) первый интеграл

$$2\omega u_1(2M_1 + N_1 u_1) + \delta_1 S(u_1) \cos 2\theta_1 = C_{30} = \text{const},$$

устанавливающий аналитическую связь между амплитудным и фазовым параметрами u_1 и θ_1 при колебаниях оболочки.

Стационарные решения в рассматриваемом случае надлежит определить из таких соотношений:

$$\theta_1 = k\pi/2 \quad (k = 0, 1, 2 \dots); \quad 4\omega L_1 L_2 (M_1 + N_1 u_1) + \delta_1 \left[u_1 L_2^2 - (C_{00} - \frac{u_1}{\delta_1}) \frac{\delta_2^2}{\delta_1} L_1^2 \right] (-1)^k = 0;$$

$$S(u_1) = 0; \quad \cos 2\theta_1 = \left[4\omega (M_1 + N_1 u_1) L_1 L_2 \right] \left(\delta_2^2 (C_{00} - u_1/\delta_1) L_1^2 - \delta_1 u_1 L_2^2 \right)^{-1} \quad (2.15)$$

$$\left(L_1 = \sqrt{u_1^2 - C_{10}}; \quad L_2 = \sqrt{(C_{00} - u_1/\delta_1)^2 \delta_2^2 - C_{20}} \right).$$

При этом решения второго уравнения (2.15) имеют, очевидно, вид $u_1 = u_{11} = \sqrt{C_{10}}$; $u_1 = u_{12} = (C_{00} \pm \sqrt{C_{20}}/\delta_2) \delta_1$; соответствующие решения для фазы θ_1 могут быть получены путем предельного перехода в формуле для $\cos 2\theta_1$ при $u_1 \rightarrow u_{11}$ или $u_1 \rightarrow u_{12}$. Как и в п. 2.1, исследование стационарных решений u_1 , θ_1 и определение их устойчивости удобно проводить, анализируя интегральные кривые уравнения

$$\frac{du_1}{d\theta_1} = \frac{2\delta_1 S(u_1) \sin 2\theta_1}{4\omega (M_1 + N_1 u_1) + \delta_1 \frac{dS}{du_1} \cos 2\theta_1}.$$

Отметим при этом, что стационарное решение $u_1 = u_{11}$ соответствует «классической» бегущей волне с параметрами волнообразования (s_1, λ) , характеризуемой постоянными значениями амплитуды a_1 и фазовой скорости $v_\phi = \dot{\alpha}_1 / s_1$. Аналогичное заключение справедливо и по отношению к решению $u_1 = u_{12}$, которому соответствуют волновые параметры (s_2, λ) .

2.3. Взаимодействие стоячей и бегущей волн. Для расчета процессов взаимодействия волн в этом случае примем в уравнениях (1.8) $\dot{\alpha}_1 \neq 0$; $\dot{\alpha}_2 \equiv 0$ и, как и прежде, полагаем $a_3 = 0$. Система (1.8) примет, таким образом, вид

$$\ddot{a}_1 + \left(\omega_1^2 - \frac{C_{01}}{a_1^4} \right) a_1 + \gamma_1 a_1^3 + \delta_1 a_1 a_2^2 = 0; \quad \ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 + \gamma_2 a_2^3 + \delta_2 a_2 a_1^2 = 0.$$

Решение данной системы при резонансе $\omega \approx \omega_2$ представим, учитывая структуру порождающих уравнений, в «комбинированном» виде

$$a_1 = \sqrt{u_1 + v_1 \sin \varphi_1}; \quad a_2 = b_2 \cos \varphi_2,$$

где обозначено $\varphi_1 = 2(\omega t + \mathcal{G}_1)$, $\varphi_2 = \omega t + \mathcal{G}_2$; u_1 , v_1 , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 – медленно изменяющиеся функции времени, которые следует определить из усредненных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\delta_1 \frac{v_1 b_2^2}{4\omega} \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \quad \frac{dv_1}{dt} = -\delta_1 \frac{u_1 b_2^2}{4\omega} \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \\ \frac{db_2}{dt} &= \delta_2 \frac{b_2 v_1}{4\omega} \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_2); \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{1}{4\omega} \left[3\gamma_1 u_1 + \frac{\delta_1 b_2^2}{2} \left(2 + \frac{u_1}{v_1} \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right) \right]; \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \frac{1}{4\omega} \left[\frac{3\gamma_2}{2} b_2^2 + \delta_2 (2u_1 + v_1 \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_2)) + 2\Delta \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Первые интегралы, полученные исходя из анализа «амплитудных» уравнений (2.16), имеют, в данном случае, вид

$$u_1^2 - v_1^2 = C_{10}; \quad u_1 + \frac{\delta_1}{2\delta_2} b_2^2 = C_{30},$$

где постоянные интегрирования равны, соответственно:

$$C_{10} = \frac{\dot{\alpha}_1^2(0) a_1^4(0)}{\omega^2}; \quad C_{30} = \frac{1}{2\omega^2} \left[\dot{a}_1^2(0) + a^2(0) (\omega^2 + \dot{\alpha}_1^2(0)) \right] + \frac{\delta_1}{2\delta_2 \omega^2} \left[\dot{a}_2^2(0) + \omega^2 a_2^2(0) \right].$$

С учетом этих интегралов система (2.16) может быть сведена к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\frac{\delta_2}{2\omega} (C_{30} - u_1) \sqrt{u_1^2 - C_{10}} \cos 2\theta_1; \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= M_2 + N_2 u_1 + \frac{\delta_2}{4\omega} \frac{1}{\sqrt{u_1^2 - C_{10}}} \left[(C_{30} - u_1) u_1 + (C_{10} - u_1^2) \right] \sin 2\theta_1 \\ &\left(M_2 = \frac{C_{30} \delta_2}{4\omega} (2 - 3\gamma_2 / \delta_1) - \frac{\Delta}{2\omega}; \quad N_2 = N_1 \right). \end{aligned}$$

Из них получаем третий интеграл

$$M_2 u_1 + \frac{N_1 u_1^2}{2} + \frac{\delta_2}{4\omega} (C_{30} - u_1) \sqrt{u_1^2 - C_{10}} \sin 2\theta_1 = C_{40} = \text{const}.$$

Полагая $du_1/dt = 0$; $d\theta_1/dt = 0$, находим возможные стационарные решения, соответствующие взаимодействию стоячей и бегущей волн в свободно колеблющейся оболочке:

$$2\theta_1 = \frac{\pi}{2} (2k - 1) \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$4\omega \sqrt{u_1^2 - C_{10}} (M_2 + N_2 u_1) + \delta_2 \left[(C_{30} - 2u_1) u_1 + C_{10} \right] = 0; \quad (2.17)$$

$$u_1 = C_{30}; \quad \sin 2\theta_1 = \frac{4\omega (M_2 + N_2 C_{30})}{\delta_2 \sqrt{C_{30}^2 - C_{10}}}. \quad (2.18)$$

Из полученных решений и соотношений (1.5) следует, что в первом случае (2.17) при установлении стационарного режима обе волны, стоячая и бегущая, одновременно принимают «участие» в процессе деформирования оболочки; во втором случае (2.18) приданная оболочке в начальный момент времени энергия полностью израсходуется на реализацию в ней бегущей волны; стоячая волна при этом оказывается «подавленной» бегущей волной, поскольку $b_2 = 0$.

Критерии устойчивости решений (2.17), (2.18), в общем случае, регламентируются выполнением таких неравенств:

$$a_{11} = -\frac{\delta_2}{2\omega} \frac{dS(u_1)}{du_1} \cos 2\theta_1; \quad a_{12} = \frac{\delta_2}{\omega} S(u_1) \sin 2\theta_1;$$

$$a_{21} = N_2 + \frac{\delta_2}{4\omega} \frac{1}{\sqrt{u_1^2 - C_{10}}} \left(C_{30} - 4u_1 - \frac{u_1}{(u_1^2 - C_0)} (C_{30}u_1 + C_{10} - 2u_1^2) \right) \sin 2\theta_1;$$

$$a_{22} = \frac{\delta_2}{2\omega} \frac{1}{\sqrt{u_1^2 - C_{10}}} \left[(C_{30} - u_1)u_1 + (C_{10} - u_1^2) \right] \cos 2\theta_1, \quad S(u_1) = (C_{30} - u_1) \sqrt{u_1^2 - C_{10}}$$

§3. Взаимодействие трех изгибных волн.

В заключение кратко рассмотрим случай, когда в аппроксимации (1.5) учитываются все три изгибные волны. Процедура исследования взаимодействия волн здесь аналогична изложенной в предыдущем параграфе. Для иллюстрации исследуем вариант взаимодействия трех стоячих волн, полагая в (1.8) $\dot{\alpha}_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$). Представим решение системы (1.8) в случае $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_3$ в виде

$$a_k = b_k \cos(\omega t + \vartheta_k) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.1)$$

где амплитуды b_k и фазы ϑ_k должны быть определены из уравнений

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{b_1}{8\omega} (\delta_1 b_2^2 \sin 2\theta_1 + \delta_4 b_3^2 \sin 2\theta_3); \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{b_2}{8\omega} (-\delta_2 b_1^2 \sin 2\theta_1 + \delta_5 b_3^2 \sin 2\theta_2);$$

$$\frac{db_3}{dt} = -\frac{b_3}{8\omega} (\delta_3 b_1^2 \sin 2\theta_3 + \delta_6 b_2^2 \sin 2\theta_2);$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{3}{4} \gamma_1 b_1^2 + \frac{\delta_1 b_2^2}{4} (2 + \cos 2\theta_1) + \frac{\delta_4 b_3^2}{4} (2 + \cos 2\theta_3) \right];$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{3}{4} \gamma_2 b_2^2 + \frac{\delta_2 b_1^2}{4} (2 + \cos 2\theta_1) + \frac{\delta_5 b_3^2}{4} (2 + \cos 2\theta_2) + \Delta_1 \right]; \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vartheta_3}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{3}{4} \gamma_3 b_3^2 + \frac{\delta_3 b_1^2}{4} (2 + \cos 2\theta_3) + \frac{\delta_6 b_2^2}{4} (2 + \cos 2\theta_2) + \Delta_2 \right]$$

$$(\Delta_1 = \omega_2^2 - \omega_1^2; \quad \Delta_2 = \omega_3^2 - \omega_1^2; \quad (\omega_1 = \omega); \quad \theta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2; \quad \theta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_3; \quad \theta_3 = \vartheta_1 - \vartheta_3).$$

Из первых трех уравнений (3.2) можно получить интеграл вида

$$m_{01} b_1^2 + m_{02} b_2^2 + m_{03} b_3^2 = C_{11}$$

$$\left(C_{11} = \frac{1}{\omega^2} [m_{01} (\dot{a}_1^2(0) + \omega^2 a_1^2(0)) + m_{02} (\dot{a}_2^2(0) + \omega^2 a_2^2(0)) + m_{03} (\dot{a}_3^2(0) + \omega^2 a_3^2(0))] = \text{const} \right).$$

Если выполнить замену переменных $\xi_1 = m_{01} b_1^2 / C_{11}$; $\xi_2 = m_{02} b_2^2 / C_{22}$, то систему (3.2) приведем к анализу 4-х уравнений первого порядка с 4-мя неизвестными, т.е.

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{C_{11} \xi_1}{4\omega} \left\{ \delta_1 \frac{\xi_2}{m_{02}} \sin 2\theta_1 + \delta_4 \frac{1}{m_{03}} [1 - (\xi_1 + \xi_2)] \sin 2(\theta_1 + \theta_2) \right\};$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{C_{22}\xi_2}{4\omega} \left\{ -\delta_2 \frac{\xi_1}{m_{01}} \sin 2\theta_1 + \delta_5 \frac{1}{m_{03}} [1 - (\xi_1 + \xi_2)] \sin 2\theta_2 \right\};$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = M_{01} + M_{11}\xi_1 + M_{12}\xi_2 + M_{13}(\xi_1, \xi_2) \cos 2\theta_1 +$$

$$+ M_{14}(\xi_1, \xi_2) \cos 2\theta_2 + M_{15}(\xi_1, \xi_2) \cos 2(\theta_1 + \theta_2); \quad (3.3)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = N_{01} + N_{11}\xi_1 + N_{12}\xi_2 + N_{13}(\xi_1, \xi_2) \cos 2\theta_1 +$$

$$+ N_{14}(\xi_1, \xi_2) \cos 2\theta_2 + N_{15}(\xi_1, \xi_2) \cos 2(\theta_1 + \theta_2),$$

где M_{jk}, N_{jk} выражаются определенным образом через параметры системы оболочка – жидкость и новые переменные ξ_1, ξ_2

$$M_{01} = \frac{C_{11}}{4\omega} \left(\frac{\delta_4 - \delta_5}{m_{03}} \right); \quad N_{01} = \frac{C_{11}}{4\omega} \frac{\delta_5}{m_{03}}; \quad M_{13} = \frac{\delta_2}{8\omega} \left(\frac{C_{22}\xi_2}{m_{02}} - \frac{C_{11}\xi_1}{m_{01}} \right); \quad N_{13} = \frac{\delta_2}{8\omega} \frac{C_{11}\xi_1}{m_{01}} \quad \text{и т.д.}$$

Интегрируя систему (3.3), определим искомые функции $\xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2$, с использованием которых получим все амплитудные b_k и фазовые \mathcal{A}_k параметры, входящие в (3.1).

Уравнения, аналогичные (3.3), можно получить и для двух других случаев деформирования оболочки, когда взаимодействуют несколько бегущих волн или стоячие и бегущие волны.

Соответствующие результаты численных исследований особенностей нелинейного взаимодействия различных стоячих волн, бегущих волн, стоячих и бегущих волн в заполненных жидкостью композитных оболочках цилиндрической формы при их свободных колебаниях авторы предполагают изложить в последующих публикациях.

Заключение.

Таким образом, в данной работе изложены теоретические подходы к решению задач о нелинейном взаимодействии различных изгибных волн, реализуемых в заполненных жидкостью ортотропных цилиндрических оболочках при их свободных колебаниях. С использованием асимптотических методов нелинейной механики построены усредненные уравнения, описывающие процессы взаимодействия стоячих волн, бегущих волн, стоячих и бегущих волн. На основе анализа этих уравнений получен ряд первых интегралов, устанавливающих энергетическую связь между амплитудами указанных волн, с одной стороны, а также между амплитудами и фазовыми параметрами, с другой. Для частных случаев определены стационарные режимы волновых деформирований оболочки и приведены критерии устойчивости этих режимов.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку і викладено методику розв'язання задач про нелінійну взаємодію в умовах внутрішніх резонансів хвильових форм деформування ортотропних кругових циліндричних оболонок, що заповнені рідиною, при їх вільних коливаннях. Розглянуто три варіанти задач: взаємодія стоячих хвиль, біжучих в колісному напрямку хвиль, а також стоячих та біжучих хвиль. Для кожного з варіантів побудовані інтегральні характеристики, що пов'язують амплітудні та фазові параметри взаємодіючих хвиль.

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. *Динамика элементов конструкций /* Под ред. В.Д.Кубенко. – К.: «АСК», 1999. – 379 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 9).

4. Ковальчук П.С., Крук Л.А. Анализ нелинейного взаимодействия изгибных форм композитных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 65 – 71.
5. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Бояришина Л.Г. и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. – К.: Наук. думка, 1992. – 184 с.
6. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища шк., 1989. – 208 с.
7. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 402 p.
8. Amabili M., Garziera R., Negri A. Experimental study on large-amplitude vibrations of water-filled circular cylindrical shells // J. Fluids Struct. – 2002. – **16**. – P. 213 – 227.
9. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349–381.
10. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part III: Truncation Effect Without Flow and Experiments // J. Sound and Vibr. – 2000. – **237**, N 4. – P. 617 – 640.
11. Amabili M., Pellicano F., Vakakis A. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled circular cylindrical shells. Part 1: Equations of motion and numerical results // J. Vibr. and Acoust. – 2000. – **122**. – P. 346 – 354.
12. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Natural Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Varying Thickness using Method of Holographic Interferometry // Int. Appl. Mech. – January, 2014. – **50**, N 1. – P. 101–109.
13. Goncalves P.B., Batista R.C. Nonlinear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 1988. – **127**. – P. 133 – 143.
14. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Application of the Averaging Method to the Investigations of Nonlinear Wave Processes in Elastic Systems with Circular Symmetry // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, N 10. – P. 1645 – 1656.
15. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Experimental Studies of the Vibrations and Dynamic Stability of Laminated Composite Shells // Int. Appl. Mech. – 2010. – **45**, N 9. – P. 514 – 534.
16. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 2003. – **265**. – P. 245 – 268.
17. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. On Free Non-linear Vibrations of Fluid-Filled Cylindrical Shells with Multiple Natural Frequencies // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P. 1192 – 1202.
18. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.
19. Pellicano F., Amabili M., Vakakis A.F. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled circular cylindrical shells. – P.2: Perturbation analysis // J. Vibr. and Acoust. – 2000. – **122**. – P. 355–364.
20. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 702 – 714.
21. Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Trach V.M., Khoruzhiy M.M. Cubic Nonlinearity in the Equations of the Theory of Anisotropic Shells // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 727 – 735.

Поступила 22.03.2011

Утверждена в печать 03.12.2013