

А. Е. Закржевский<sup>1</sup>, В. С. Хорошилов<sup>2</sup>

**ДИНАМИКА НЕСТАБИЛИЗИРОВАННОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
ПРИ РАСКРЫТИИ УПРУГОЙ ПАНТОГРАФНОЙ КОНСТРУКЦИИ**

<sup>1</sup>*Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,*

*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: alex.zakr@mail.ru*

<sup>2</sup>*Государственное предприятие*

*“Конструкторское бюро “Южное” им. М. К. Янгеля”,*

*ул. Криворожская, 3, 49008, Днепропетровск, Украина, e-mail: skh@ukr.net*

**Abstract.** An unsteady-state spacecraft with a transformed in orbit pantograph construction as carrier of the solar batteries is considered. A mathematical model of this construction is built with allowance the elastic properties of structural members of pantograph both in longitudinal direction, and in transverse one. This model is constructed basing on the Lagrange formalism as applied to mechanical system with non-stationary constraints. The expressions for coefficients of equations are obtained by use of the scientific package Mathematica 5<sup>®</sup>. To model numerically the dynamical processes, the Fortran package of applied programs is built up. It can be of necessity adapted to a study of systems with constructions of other types. A numerical analysis of behavior of the object in hand is carried out for the deployment mode under different values both object parameters, and the parameters of deployment process in the field of gravitational forces.

**Key words:** flexible spacecraft, pantograph deployment, mathematical model, numerical simulation.

**Введение.**

Изучение динамики систем изменяемой конфигурации является одним из перспективных и актуальных направлений механики [9, 11 – 13, 23]. Современные космические аппараты имеют в своем составе разнообразные элементы конструкции, которые трансформируются на орбите (солнечные батареи (СБ), гравитационные стабилизаторы, антенны и др.). Такие механические системы доставляются на орбиту в компактном (транспортном) состоянии и в условиях орбитального полета разворачиваются и принимают свою рабочую конфигурацию. Есть большое количество исследований в литературе, посвященных разворачиванию упругих элементов как с неподвижного основания, так и с вращающегося космического аппарата (КА) [9, 11 – 13, 23], включая разворачивание гравитационного стабилизатора [15, 19]. В этих работах оценены максимальные изгибающие моменты и отклонения стержней при различных упрощающих предположениях, а также оптимальное время разворачивания. В работе [14] Cherchas исследует динамику КА, стабилизированного вращением, в процессе разворачивания длинного гибкого стержня. Он определил максимальные углы нутации и прецессии после разворачивания и максимальные изгибающие моменты и отклонения стержня. Уравнения движения были получены методом Лагранжа и упругие степени свободы были дискретизированы на основе модального анализа. В [20, 21, 24] динамика разворачиваемых упругих элементов также описана в терминах модального анализа с формами собственных колебаний, зависящими от времени.

В несколько ином подходе к рассматриваемой задаче Banerjee и Kane в [7] представили новую методику для описания динамики балки, которая разворачивается из или втягивается в твердое вращающееся тело. Суть метода состояла в моделировании балки как цепочки упруго соединенных твердых тел. Метод работал с уравнениями движения, линеаризованными в модальных координатах для элементов балки, расположенных вне несущего тела. В [6, 8] анализ был расширен для случая больших отклонений с формулировкой порядка-n (order-n) для переменного числа тел. Результаты моделирования показали, что отклонения конца балки были очень чувствительны к скорости разворачивания/свертывания и что процесс втягивания менее устойчив, чем процесс разворачивания. Показано, что значение угловой скорости несущего тела существенно влияет на поведение балки.

Разворачивание описанных элементов вносит значительные возмущения в динамику движения КА вокруг его центра масс. Описать эти возмущения простыми математическими моделями в рамках динамики систем тел невозможно. Работа [2] демонстрирует построение общей математической модели КА в процессе разворачивания жесткого гравитационного стабилизатора по заданной программе. Динамика КА при разворачивании упругого гравитационного стабилизатора изучена в [16]. В работе [18] изучена динамика космического аппарата, с которого разворачивается упругий пантограф, но поперечные смещения оси пантографа не учитывались. Близкие по содержанию задачи рассмотрены в работах [5, 17, 22].

На данный момент исследование таких трансформируемых систем актуально с точки зрения минимизации времени разворачивания, проблемы минимизации энергозатрат, изучения взаимного влияния механических систем изменяемой конфигурации на движение и ориентацию самого КА. Постоянно актуальной является проблема снижения массы таких систем. При этом элементы таких систем приходится рассматривать как упругие тела.

### 1. Механическая модель.

Объект исследования – КА, несущий разворачиваемую на орбите пантографную конструкцию, которая состоит из двух параллельных, соединенных между собой плоских систем стержней (рис. 1). Механическая модель такого КА может быть пред-

ставлена в виде твердого несущего тела, на котором установлена пантографная конструкция, и самой конструкции изменяемой конфигурации. Изменение конфигурации конструкции происходит за счет синхронного принудительного сближения точек  $H_0^{(R)}, F_0^{(R)}$  и  $H_0^{(L)}, F_0^{(L)}$ , в которых она соединяется с механизмом разворачивания, установленным на несущем теле. Для случая разворачивания такой упругой конструкции

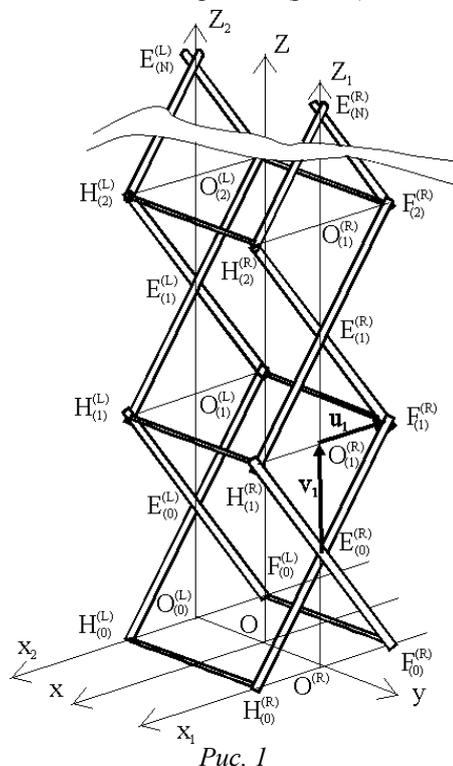


Рис. 1

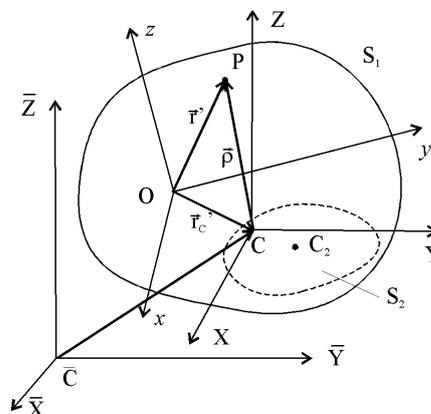


Рис. 2

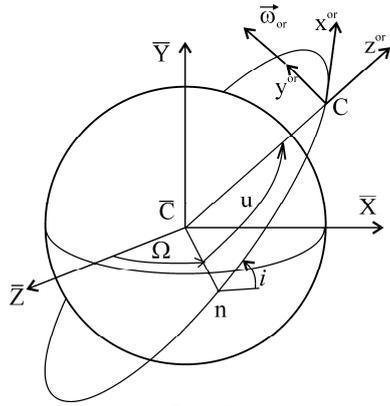


Рис. 3

на орбите ее обобщенная механическая модель может быть представлена как главное твердое тело  $S_1$  и тело  $S_2$  переменной конфигурации, присоединенное к нему (рис. 2).

Здесь  $\overline{CXYZ}$  – связанная с Землей инерциальная система координат с  $\overline{CY}$  вдоль оси вращения Земли;  $\overline{CZ}$  направлена в точку весеннего равноденствия;  $\overline{CX}$  дополняет ортогональную триаду;  $Oxyz$  – связанная с главным телом система координат с началом в центре основания пантографа  $O$ , с  $Oz$  вдоль направления оси гравитационного стабилизатора. Тело  $S_1$  – гиросtatическая часть системы. Тело  $S_2$  – развертываемая

часть системы с центром масс в точке  $C_2$ . Оно не включает гиросtatических компонентов. Движение тела  $S_1$  определяется вектором скорости  $\vec{v}_{C_1}$  точки  $C_1$  и вектором абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}$  тела  $S_1$ .

При постановке задачи могут быть полезными две системы отсчета (рис. 3). Система  $C_1xyz$ , как и выше, является системой отсчета, связанной с гиросtatической частью КА. Система  $Cx^{or}y^{or}z^{or}$  связана с центром масс всего КА. Эта система координат определяется традиционным способом [10] с  $Cx^{or}$  вдоль вектора скорости КА,  $Cy^{or}$  вдоль бинормали орбиты и  $Cz^{or}$  вдоль местной вертикали. На рис. 3  $\Omega$  – долгота восходящего узла от точки весеннего равноденствия;  $i$  – наклон орбиты;  $u$  – аргумент долготы и  $\vec{\omega}^{or}$  – вектор орбитальной угловой скорости.

Пренебрегая прецессией орбиты, можно считать, что абсолютная угловая скорость орбитального базиса равна  $\vec{\omega}^{or}$ .

Для каждого пантографа упругие стержни длиной  $2a$  и массой  $m_a(i)$ , где  $i$  – номер яруса, образуемого полным ромбом, соединены в шарнирах  $E_{(i)}^{(R)}, E_{(i)}^{(L)}$  ( $i = \overline{0, N}$ ), где  $N$  – количество ярусов, и в точках  $H_{(i)}^{(R)}, H_{(i)}^{(L)}, F_{(i)}^{(R)}, F_{(i)}^{(L)}$  ( $i = \overline{1, N}$ ), где верхний индекс идентифицирует пантограф в соответствии с рис. 1, а нижний  $i$  указывает на номер яруса соответствующего пантографа. Эти два пантографа обозначим  $L$  и  $R$ , соответственно. Таким образом, каждый пантограф состоит из нулевого полуромба и последующих  $N$  ромбов со сторонами длиной  $a$ . Пантографы соединены между собой также жесткими стержнями длиной  $b$  и массой  $m_b$  в точках  $H_{(i)}^{(R)}, H_{(i)}^{(L)}$  и  $F_{(i)}^{(R)}, F_{(i)}^{(L)}$  ( $i = \overline{1, N}$ ), на которые монтируются солнечные батареи. Стержни длиной  $H_{(i)}^{(R)} H_{(i)}^{(L)} = F_{(i)}^{(R)} F_{(i)}^{(L)} = b$  ( $i = \overline{1, N}$ ) рассмотрим как третью систему, обозначаемую в дальнейшем индексом  $M$ .

Нижние точки первых ярусов (точки  $H_{(0)}^{(R)}, H_{(0)}^{(L)}, F_{(0)}^{(R)}, F_{(0)}^{(L)}$ ) закреплены на теле КА. В начальном положении пантографная система сложена, т.е. расстояние между точками  $E_{(i)}^{(L)}, E_{(i-1)}^{(L)}$ , а также  $E_{(i)}^{(R)}, E_{(i-1)}^{(R)}$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – минимальны (транспортное состояние). При этом углы, которые составляют стержни нулевого и всех остальных ярусов с осью  $Ox$ , равны  $5^\circ$  и пантограф симметричен относительно оси  $Oz$ . При полном раскрытии конструкции проектные значения указанных углов составляют  $75^\circ$ ). Здесь  $Oxyz$  – базис, связанный с несущим телом с началом в точке  $O$ , распо-

ложенный в плоскости  $H_{(0)}^{(R)}H_{(0)}^{(L)}F_{(0)}^{(R)}F_{(0)}^{(L)}$  на пересечении диагоналей данного прямоугольника. Оси  $O^{(R)}x_1, Ox, O^{(L)}x_2$  и  $O^{(R)}z_1, Oz, O^{(L)}z_2$  – параллельны.

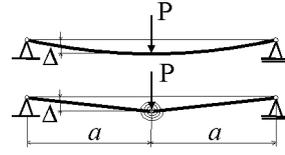


Рис. 4

Под несущим телом понимаем неизменяемую часть космического аппарата, а под несомыми телами – стержни, которые составляют пантографную конструкцию. Положение точек стержней относительно инерциальной системы координат  $\overline{CXYZ}$  определяем радиусом-вектором  $\vec{r}_i$ , а относительно системы  $Oxyz$  – радиусом-вектором  $\vec{r}'_i$ . В отличие от задачи динамики относительного движения носимых тел, описанных Лурье [3], здесь рассматривается более общий случай. Выражение для  $\vec{r}'_i$  зависит от времени  $t$  явно, а не только через обобщенные координаты:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i(q_1, \dots, q_N, t). \quad (1)$$

Упругость стержней длиной  $2a$  учитывается введением коэффициента эквивалентной жесткости в шарнирах  $E_{(i)}^{(R)}, E_{(i)}^{(L)}$  ( $i = \overline{0, N}$ ). Для определения коэффициента эквивалентной жесткости сравним прогибы однородной балки постоянного сечения на двух опорах, нагруженной перпендикулярной силой посередине [4], и балки, составленной из двух жестких стержней, соединенных упругим шарниром с таким же нагружением (рис. 4). Такая замена полностью оправдана, поскольку конфигурация всей пантографной конструкции определяется взаимным положением средней и крайних точек всех стержней. Прогиб упругой балки в таком случае равен  $Pa^3 / (6EJ)$ . Такой же прогиб посередине пролета эквивалентной конструкции (на рис. 4, внизу) получаем, когда упругость шарнирного соединения  $C_i$  равна  $3EJ / (2a)$ .

## 2. Математическая модель системы.

Для построения математической модели используем формализм построения уравнений движения Лагранжа второго рода [3]. Если в качестве полюса выбрать мгновенное положение центра масс системы  $C$ , уравнения движения несущего тела вокруг центра масс и уравнения относительного движения носимых тел примут наиболее компактный вид:

$$\Theta^C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \left( \Theta^C \cdot \vec{\omega} \right) + \vec{K}_r^C + \vec{\omega} \times \vec{K}_r^C = \vec{m}^C; \quad (2)$$

$$E_s(T_r^O) - M \vec{r}_C^{**} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C'}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \Theta^C}{\partial q_s} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial \dot{q}_s} + \vec{\omega} \cdot E_s^*(\vec{K}_r^C) = Q_s. \quad (3)$$

Здесь  $\Theta^C$  – тензор инерции системы в ее центре инерции  $C$ ;  $\vec{K}_r^C$  – относительный кинетический момент развертываемой части относительно точки  $C$ ;  $\vec{\omega}$  – вектор абсолютной угловой скорости несущего тела;  $\vec{m}^C$  – главный момент внешних сил относительно центра инерции;  $E_j(\cdot) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j}$  – оператор Эйлера,  $E_j^*(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j}$  – также оператор Эйлера, но дифференцирование по времени проводится здесь в связанном базисе;  $T_r^O$  – кинетическая энергия относительного движения системы;  $q_s$  –

обобщенные координаты;  $Q_s$  – обобщенные силы;  $\dot{f}$  – абсолютная производная по времени, а  $f^*$  – производная в системе координат, неизменно связанной с несущим телом. Здесь следует заметить, что хотя кинетическая энергия относительного движения – скаляр, для ее правильного вычисления необходимо указывать полюс, выбранный для определения относительных скоростей точек носимых тел.

Здесь важно отметить также, что член  $E_s^*(\vec{K}_r^C)$  не приводится к  $-2\frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial q_s}$  как это показано в [3], так как случай, который рассматривается здесь, является более общим случаем нестационарных связей (см. выражение (1)).

Для построения уравнений движения необходимо выбрать подходящие обобщенные координаты  $q_s$  и определить значения выражений  $\vec{r}_c^i(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$ ,  $\Theta^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$ ,  $T_r^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$ ,  $K_r^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$ ,  $\vec{Q}_s(q_1, q_2, \dots, q_N)$  и всех их производных по времени и обобщенным координатам, которые входят в выражения для коэффициентов уравнений (2), (3).

Выбор обобщенных координат играет чрезвычайно важную роль при исследовании динамики сложных механических систем. Удачный выбор разрешает записать уравнения движения в компактной и прозрачной форме и проводить эффективное интегрирование. И наоборот, нерациональный выбор приводит к слишком громоздким выражениям для коэффициентов уравнений движения, которые обуславливают неэффективное интегрирование (большое время интегрирования, потребность в значительных объемах оперативной памяти, накопление погрешностей при вычислениях, «жесткость» системы).

При исследовании динамических процессов, связанных с трансформированием пантографной конструкции, в качестве начального состояния КА выберем его положение после начального успокоения, при котором оси связанного базиса параллельны одноименным осям орбитального базиса, а начальные значения компонент вектора угловой скорости КА в орбитальном базисе не превышают 0,01 град/с. В этом случае нельзя считать, что продольная ось конструкции остается прямолинейной, поскольку при разворачивании конструкции, переносное движение которой является вращательным, на ее точки начнут действовать силы Кориолиса, способные деформировать упругую конструкцию в поперечном направлении. В то же время в направлении бинормали орбиты поперечные силы отсутствуют; следовательно, перемещениями точек конструкции в направлении оси  $Oy$  можно пренебречь.

В качестве обобщенных координат для такой механической системы можно выбрать, например, такие их наборы:

- 1) координаты центров масс ярусов сдвоенного пантографа по осям  $Ox$  и  $Oz$ ;
- 2) проекции перемещений концов верхних точек ярусов пантографа по отношению к их положению при отсутствии деформаций на оси  $Ox$  и  $Oz$ ;
- 3) такие же перемещения центра масс любого яруса относительно его текущего номинального состояния;
- 4) избыточную систему координат, которая объединяет некоторые пункты, например, пункты 2 и 3.

Все эти системы обобщенных координат однозначно определяют конкретную конфигурацию пантографа. Тем не менее, попытки использовать любую из указанных систем обобщенных координат приводили к тому, что полученные коэффициенты при производных и выражения правых частей системы дифференциальных уравнений в форме Коши оказывались настолько громоздкими, что реально можно было исследовать динамику пантографа лишь для трех ярусов.

После детального анализа в качестве обобщенных координат были выбраны значения координат  $x_i, z_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) верхних точек ярусов  $E_i$ , лежащих на оси  $Oz$  на прямых, соединяющих точки  $E_{(i)}^{(L)}, E_{(i)}^{(R)}$ . При этом  $b(t) = H_0O = OF_0$  является известной функцией времени, которая задает закон раскрытия или свертывания пантографной конструкции.

Используя рис. 5, несложно показать, что проекции радиуса-вектора центра масс пантографа  $MS_1$  на ось  $Oz$  –

$$\bar{r}_O'(i) = \{x(-1 + i) + x(i)/2, 0, (z(-1 + i) + z(i))/2\}. \quad (4)$$

В результате для всей пантографной конструкции имеем

$$\bar{r}_O' = (\{a_x, a_y, a_z\}m_{KA} + \{0, 0, \tilde{z}_0\}(m_0 + m_1) + \sum_{i=1}^N \{x_i, 0, z_i\}\tilde{m}_i) / M. \quad (5)$$

Здесь  $\{a_x, a_y, a_z\}$  – радиус-вектор центра масс несущего тела в связанном базисе;  $m_{KA}$  – масса несущего тела;  $m_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ) – массы  $i$ -го яруса;  $\{x_i, 0, z_i\}$  – радиус-векторы точек  $E_i$ ;  $\tilde{m}_i = (m_i + m_{i+1})/2$ ;  $\tilde{m}_N = m_N/2$ ;  $\tilde{z}_0 = z_0k_0$ ;  $k_0$  – коэффициент, определяющий положение центра масс нулевого яруса на оси  $Oz$ .

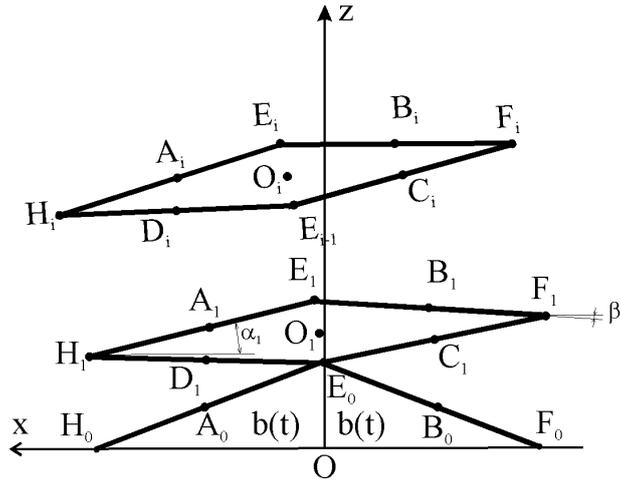


Рис. 5

Тензор инерции всей пантографной конструкции можно записать в виде суммы собственных тензоров инерции стержней конструкции в осях, параллельных осям связанного базиса с началом в центре масс соответствующего стержня, и тензора инерции всех точечных масс, расположенных в центрах масс стержней и равных массам этих стержней. Для  $i$ -го яруса это дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Theta_{1,1,i}^O = & 2J_i^M + (a^2 m_i \sin^2 \alpha_i)/3 + (a^2 m_i \sin^2 \beta_i)/3 + (m_i^M dz_i^2)/2 + \\ & +(2 m_i^M dx_i^2 u_i^2)/L_i^2 - 2 m_i^M dz_i z_i + 2 m_i^M z_i^2 + m_i (5dz_i^2/2 + 2 dx_i^2 u_i^2 / eL_i^2 - \\ & - 8 dz_i z_i + 8 (bb^2 + z_i^2)); \end{aligned}$$

$$\Theta_{1,3,i}^O = (a^2 m_i (\sin(2 \alpha_i) + \sin(2 \beta_i))) / 6 + m_i^M (x_i (dz_i - 2 z_i) + dx_i (dz_i (-0,5 +$$

$$\begin{aligned}
& +2 u_i^2 / L_i^2 + z_i)) + m_i(4 x_i(dz_i - 2 z_i) + dx_i(dz_i(-2, 5 + 2 u_i^2 / L_i^2) + 4 z_i)); \\
\Theta_{2,2,i}^O &= (16 J_i L_i^2 + m_i^M(dx_i^2(L_i^2 + 4 u_i^2) + dz_i^2(L_i^2 + 4 u_i^2) - 4 dx_i L_i^2 x_i - \\
& -4 dz_i L_i^2 z_i + 4 L_i^2(x_i^2 + z_i^2)) + m_i(dx_i^2(5 L_i^2 + 4 u_i^2) + dz_i^2(5 L_i^2 + 4 u_i^2) - \\
& -16 dx_i L_i^2 x_i - 16 dz_i L_i^2 z_i + 16 L_i^2(x_i^2 + z_i^2))) / (2 L_i^2); \\
\Theta_{3,3,i}^O &= 2 J_i^M + (a^2 m_i \cos^2 \alpha_i) / 3 + a^2 m_i \cos^2 \beta_i / 3 + m_i^M dx_i^2 / 2 + 2 m_i^M dz_i^2 u_i^2 / L_i^2 - \\
& -2 m_i^M dx_i x_i + 2 m_i^M x_i^2 + m_i(5 dx_i^2 / 2 + 2 dz_i^2 u_i^2 / L_i^2 - 8 dx_i x_i + 8(bb^2 + x_i^2)); \\
\Theta_{1,1,0}^O &= 2 J_0^M + 4 m_0 bb^2 - m_0 b^2 + m_0 a^2 + 2 m_0^M z_0^2 + m_0 a^2 \sin^2 \alpha_0 / 6 + m_0 a^2 \sin^2 \beta_0 / 6; \\
\Theta_{1,3,0}^O &= (m_0 a^2 (\sin(2\alpha_0) + \sin(2\beta_0))) / 12; \\
\Theta_{2,2,0}^O &= 4 J_0 + 2 m_0^M b^2 + m_0 a^2 + 2 m_0^M z_0^2; \\
\Theta_{3,3,0}^O &= (m_0 + 2 m_0^M) b^2 + (12 J_0^M + 24 m_0 bb^2 + m_0 a^2 \cos^2 \alpha_0 + m_0 a^2 \cos^2 \beta_0) / 6, \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $\Theta_{k,j,i}^O - (k, j)$ -компонента тензора инерции  $i$ -го яруса;  $m_i$  – масса одного стержня в ромбах;  $m_i^M$  – масса одного соединительного стержня;  $J_i$  – собственный момент инерции стержня относительно его главной центральной оси, параллельной оси  $Oy$ ;  $J_i^M$  – собственный момент инерции соединительного стержня относительно его главной центральной оси, параллельной оси  $Ox$ ;  $dx_i = x_i - x_{i-1}$ ;  $dz_i = z_i - z_{i-1}$ ;  $u_i$  – длина отрезка  $H_i O_i$ ;  $L_i$  – длина отрезка  $E_i E_{i-1}$ ; углы наклона стержней к оси  $Ox$   $\alpha_i$  и  $\beta_i$  показаны на рис. 5 для первого яруса, где величина  $\alpha_1$  положительна, а  $\beta_1$  – отрицательна (индекс  $i$  показывает, что данная величина относится к  $i$ -му ярусу).

Для кинетической энергии относительного движения выражение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Tr_i^O &= (128 J_i (\alpha_i + \beta_i)^2) L_i^6 u_i^2 + m_i^M (16 a^2 dx_i^2 dxz_i^2 + 16 a^2 dxz_i^2 dz_i^2 - \\
& -64 a^2 dx_i dxz_i dxz_i L_i^2 u_i^2 - 64 a^2 dxz_i dz_i dz_i L_i^2 u_i^2 + \\
& +16 L_i^4 u_i^2 (4 a^2 dx_i^2 + 4 a^2 dz_i^2 - 4 dx_i L_i^2 x_i - 4 dz_i L_i^2 z_i + \\
& +4 L_i^2 (x_i^2 + z_i^2))) + m_i (16 a^2 dx_i^2 dxz_i^2 + 16 a^2 dxz_i^2 dz_i^2 - \\
& -64 a^2 dx_i dxz_i dxz_i L_i^2 u_i^2 - 64 a^2 dxz_i dz_i dz_i L_i^2 u_i^2 + \\
& +16 L_i^4 u_i^2 (dx_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) + dz_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) - 16 dx_i L_i^2 x_i - \\
& -16 dz_i L_i^2 z_i + 16 L_i^2 (x_i^2 + z_i^2))) / (64 L_i^6 u_i^2). \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь дополнительно использованы следующие обозначения:  $Tr_i^O$  – кинетическая энергия относительного движения  $i$ -го яруса при вычислении относительных скоростей в связанном базисе;  $x1t_i = \partial x_i / \partial t$ ,  $z1t_i = \partial z_i / \partial t$ ,  $dx1t_i = \partial(dx_i) / \partial t$ ,  $dz1t_i = \partial(dz_i) / \partial t$ ,  $dxz1t_i = 2(dx_i dx1t_i + dz_i dz1t_i)$ .

Чтобы применить оператор Эйлера к такому выражению, следует подставить в (7) все использованные обозначения и применять оператор по конкретной обобщенной координате, принимая во внимание тот факт, что обобщенные координата и скорость с индексом  $i$  входят в полное выражение для  $Tr^O$  на ярусах  $i$  и  $i-1$  (кроме первого яруса, поскольку движение элементов нулевого яруса определяется не обобщенными координатами, а явно зависит от времени).

Выражение для проекции кинетического момента элементов  $i$ -го яруса на ось  $Oy$  было приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned}
Kr_i^O = & (8 J_i(dx1t_i dz_i - dx_i dz1t_i)) / L_i^2 + (m_i(x1t_i(-dz_i^3 + (-4 a^2 + 4 dx_i^2 + \\
& + 3 dz_i^2) z_{i-1} + 4 (a^2 + dx_i^2 - 5 dz_i^2) zi) + x1t_{i-1}(dz_i^3 + (4 a^2 + 4 dx_i^2 + \\
& + 5 dz_i^2) z_{i-1} + (-4 a^2 + 4 dx_i^2 + 3 dz_i^2) zi) - (dx_i^3 + (4 a^2 + 5 dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_{i-1} + \\
& + (-4 a^2 + 3 dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_i) z1t_{i-1} + (dx_i^3 + (4 a^2 - 3 dx_i^2 - 4 dz_i^2) x_{i-1} - \\
& - (4 a^2 + 5 dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_i) z1t_i)) / (2 L_i^2) + (m_i^M(x1t_i(-dz_i^3 + (-4 a^2 + dx_i^2 + \\
& + L_i^2) z_{i-1} + (4 a^2 - dx_i^2 + L_i^2) z_i) + x1t_{i-1}(dz_i^3 + (4 a^2 - dx_i^2 + L_i^2) z_{i-1} + \\
& + (-4 a^2 + dx_i^2 + L_i^2) z_i) - (dx_i^3 + (4 a^2 - dz_i^2 + L_i^2) x_{i-1} + (-4 a^2 + dz_i^2 + L_i^2) \times \\
& \times x_i) z1t_{i-1} + (dx_i^3 + (4 a^2 - dz_i^2 - L_i^2) x_{i-1} + (-4 a^2 + dz_i^2 - L_i^2) x_i) z1t_i)) / (2 L_i^2). \quad (8)
\end{aligned}$$

Его две остальные компоненты в рассматриваемой задаче равны нулю, поскольку все относительные движения происходят в плоскостях, параллельных плоскости  $Oxz$ .

Для определения коэффициентов уравнений движения (2), (3) полученные выражения и все необходимые производные от них должны быть преобразованы в систему координат, связанную с мгновенным положением центра масс, оси которой параллельны одноименным осям связанного базиса.

В соответствии с [3] можно записать

$$\begin{aligned}
\Theta^C = & \Theta^O - M \cdot (E r_c' - r_c' r_c'), \quad \bar{K}_r^C = \bar{K}_r^O - M \cdot r_c' \times r_c'^*; \\
\Theta^C = & \Theta^O - M(2E \vec{r}_c' \vec{r}_c'^* - \vec{r}_c' \vec{r}' - \vec{r}' \vec{r}_c'^*); \quad \frac{\partial \Theta^C}{\partial q_s} = \frac{\partial \Theta^O}{\partial q_s} - 2ME \vec{r}_c' \cdot \frac{\partial \vec{r}_c'}{\partial q_s} + 2M \vec{r}_c' \cdot \frac{\partial \vec{r}_c'}{\partial q_s}; \\
\bar{K}_r^C = & \bar{K}_r^O - M \vec{r}_c' \times \vec{r}_c'^*. \quad (9)
\end{aligned}$$

В этих выражениях  $M$  – масса системы;  $E$  – единичная матрица, выражения  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  и  $\vec{a} \times \vec{b}$  обозначают скалярное и векторное произведения векторов, соответственно; выражение  $\vec{a} \vec{b}$  обозначает диадное произведение.

Подставив полученные выражения в уравнения (2), (3) и дополнив их подходящими кинематическими уравнениями, можно сформулировать задачу Коши для изучения поведения рассматриваемого объекта в процессе развертывания пантографной конструкции. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, выберем в качестве параметров ориентации, определяющих угловое положение связанного базиса в орбитальном, параметры Родрига – Гамильтона. Подробности можно увидеть в работе [25], где обсуждается также возможность взаимного перехода между кватернионами и традиционными углами Крылова.

### 3. Численное моделирование.

Для численного интегрирования систему записываем в неявной форме

$$\sum_{j=1}^{N_{eq}} A_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_{N_{eq}}, t) \dot{y}_j = f_i(y_1, y_2, \dots, y_{N_{eq}}, t) \quad (i = \overline{1, N_{eq}}). \quad (10)$$

В данном случае  $y_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Если задача записывается в кватернионах, то  $y_i$  ( $i = 4, 7$ ) определяют элементы кватерниона. Если же задача записывается в углах Крылова, то эти же величины определяют углы (при этом  $y_7 \equiv 0$ ). Остальными неизвестными являются обобщенные координаты и их первые производные по времени, т.е.  $y_{4+4i} = x_i$ ,  $y_{5+4i} = x \dot{t}_i$ ,  $y_{6+4i} = z_i$ ,  $y_{7+4i} = z \dot{t}_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Таким образом, общее количество переменных интегрирования –  $N_{eq} = 7 + 4N$ . Для интегрирования системы дифференциальных уравнений в рамках задачи Коши разработан оригинальный пакет прикладных программ. Большинство операторов программы получено в форме Fortran-выражений в среде Mathematica 5<sup>©</sup> в результате выполнения ряда пакетов, написанных специально для исследуемой системы, и после проведения серии замен полученных громоздких выражений достаточно простыми переменными.

Рассмотрена пантографная конструкция из 10 ярусов. Шаг интегрирования задачи Коши был подобран из условия устойчивости вычислительного процесса на рассматриваемом интервале времени. В данном случае его величина менялась в интервале 0,01 – 0,001. Рассмотрен режим раскрытия. Его продолжительность составляла 100 – 400 сек. Величина изгибной жесткости стержней  $EJ$  принята в диапазоне 200 – 500 Н м<sup>2</sup>. Начальные значения компонент вектора абсолютной угловой скорости приняты в пределах 0,0001 рад/с.

В процессе численного моделирования динамики раскрытия пантографа проведена серия вычислений при разных значениях параметров системы. Исследовано изменение ориентации несущего тела КА под действием раскрытия пантографной конструкции, а также динамика изменения формы самой конструкции в зависимости от принятых параметров.

На рис. 6 показано поведение обобщенных координат  $z_i$  ( $i = 2, 4, \dots, 10$ ) при раскрытии конструкции, имеющей изгибную жесткость стержней 50 Н м<sup>2</sup>, в течение 200 с. Здесь видно, что все эти координаты, геометрический смысл которых –  $z$ -компонента радиус-вектора точек  $E_i$ , возрастая в процессе развертывания, имеют колебательные составляющие, вызванные возбуждением упругих колебаний стержней конструкции. При этом амплитуды этих колебаний возрастают с увеличением номера обобщенной координаты. Это объясняется тем фактом, что возмущения от нижележащих ярусов суммируются. В рассмотренном случае максимальная амплитуда коле-

баний  $z_{10}$  (т.е. полной длины конструкции) составляет 1,25 м. Здесь и далее не учитываем возможное конструкционное демпфирование и другие диссипативные факторы ввиду ненадежности сведений об их величине, следовательно, исследуем максимально возможные возмущения конструкции.

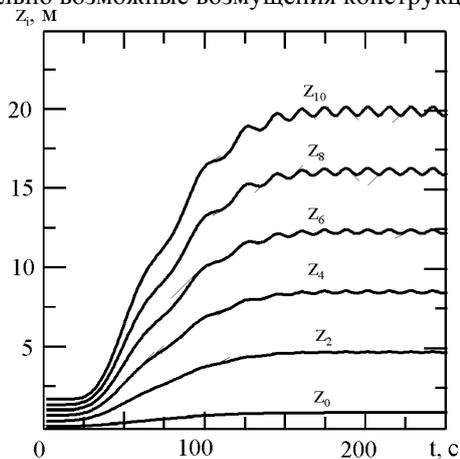


Рис. 6

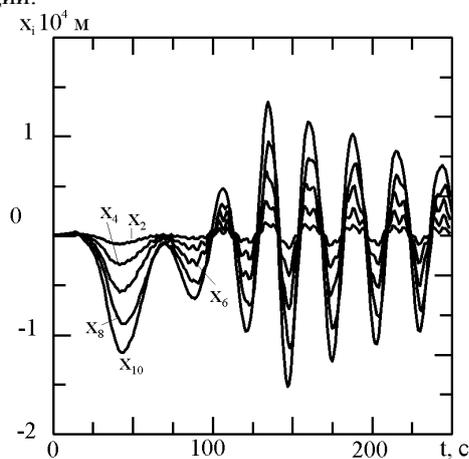


Рис. 7

На рис. 7 показано поведение обобщенных координат  $x_i$  ( $i = 2, 4, \dots, 10$ ), которые определяют отклонение средних шарниров пантографа от плоскости  $Oyz$ . Здесь видно, что по мере развертывания конструкция вначале отклоняется в сторону, обратную движению КА, а затем по мере приближения к концу развертывания колебания становятся симметричными относительно нуля. Эти отклонения вызваны силами Кориолиса, поскольку точки пантографа движутся в системе, вращающейся в абсолютной системе координат, так как вначале КА был практически неподвижен в орбитальном базисе.

При выбранной жесткости стержней эти отклонения невелики, но даже при очень гладком законе раскрытия, показанном на рис. 8, характер отклонения достаточно сложен. Особенно это заметно для нижних ярусов, для которых силы Кориолиса заметно меньше, чем для верхнего яруса, скорость движения которого выше других.

На рис. 9 показано изменение во времени диагональных компонент тензора инерции всего КА в процессе развертывания конструкции. Здесь видно, что  $\Theta_{1,1}$  и  $\Theta_{2,2}$ , которые вначале различаются, затем ведут себя практически синхронно, отражая колебания длины пантографа. Компонента  $\Theta_{3,3}$ , естественно, уменьшается, поскольку по мере развертывания пантографа расстояния его точек до оси  $Oz$  в целом заметно уменьшаются. При наличии

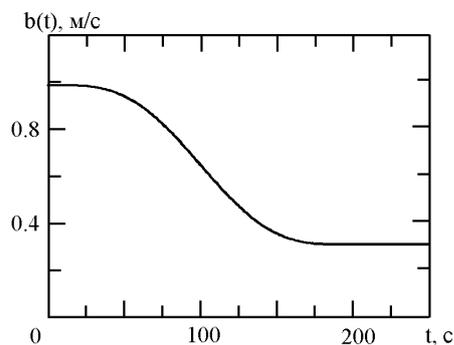


Рис. 8

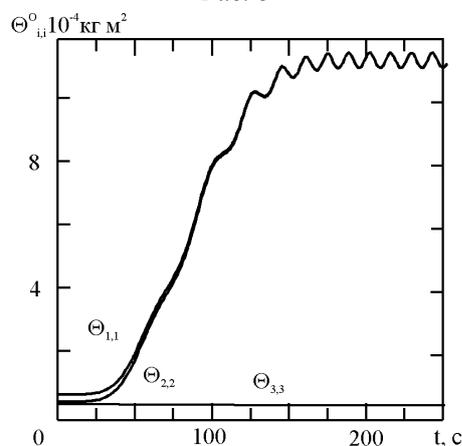


Рис. 9

поперечных отклонений конструкции вдоль оси  $Ox$  тензор инерции перестает быть диагональным. У него появляется отличная от нуля компонента  $\Theta_{1,3}$ , но в силу малости смещений в направлении оси  $Ox$  она мала и существенного влияния на динамику КА не оказывает. Рис. 10 и 11 показывают поведение углов ориентации (кватернионы были пересчитаны в традиционные углы Крылова, где  $\varphi$  – угол крена;  $\vartheta$  – угол тангажа и  $\psi$  – угол курса). Очевидно, что после развертывания КА теряет ориентацию. Его угловая скорость по тангажу становится существенно меньше угловой скорости орбитального движения и после развертывания сохраняет постоянную величину. Заметим, что здесь умышленно не учтено действие на КА гравитационного момента, чтобы далее определить, насколько его влияние меняет картину.

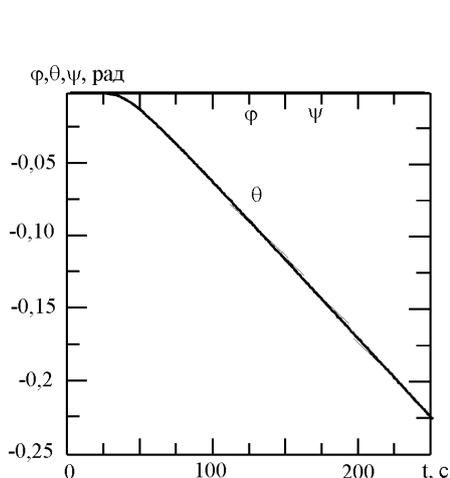


Рис. 10

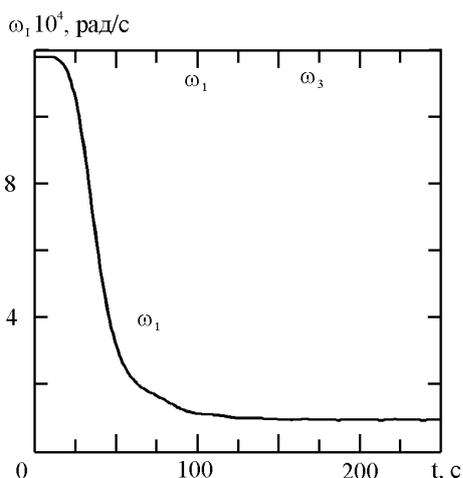


Рис. 11

Уменьшение жесткости стержней до  $200 \text{ Н м}^2$  при той же длительности раскрытия показывает неприемлемое поведение конструкции (рис. 12). После остановки механизма развертывания в нулевом ярусе длина конструкции резко уменьшается, а затем восстанавливается. Этот эффект для каждого яруса проявляется тем заметнее, чем ближе ярус к концу конструкции. Такое поведение ее отражается и на графике изменения  $\omega_2$ , приведенному на рис. 13, где уже учтено действие гравитационного момента.

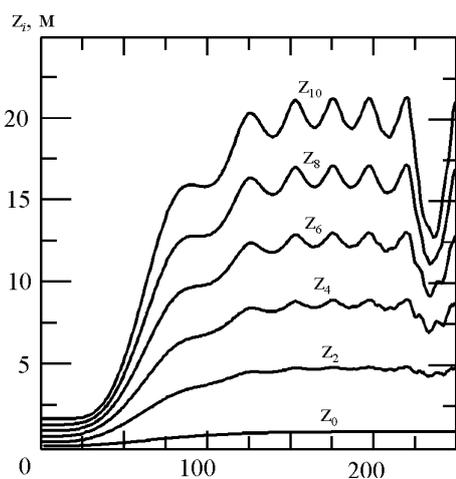


Рис. 12

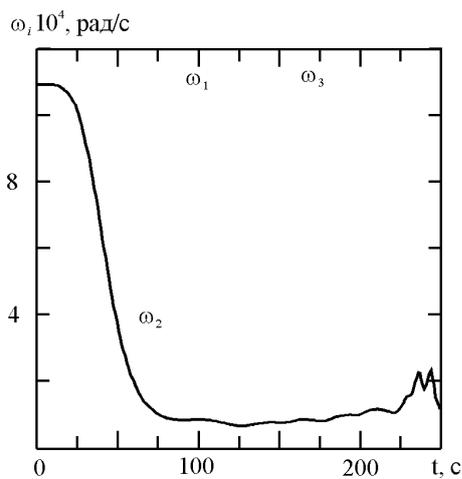


Рис. 13

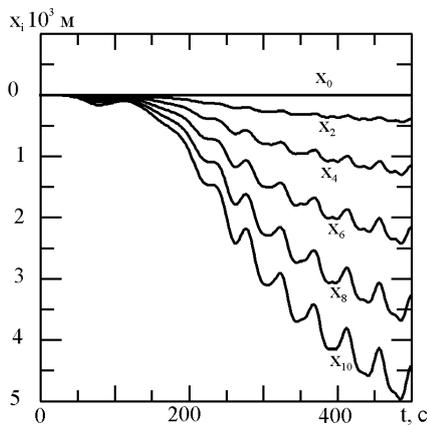


Рис. 14

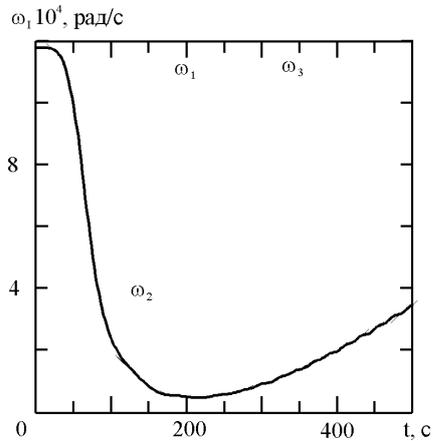


Рис. 15

Видно, как под его действием угловая скорость по тангажу начинает приближаться к орбитальной угловой скорости. Максимальные поперечные отклонения здесь достигают уже 4 мм.

Наконец, последний из рассмотренных вариантов позволил проанализировать динамику системы при той же изгибной жесткости, но при вдвое большей длительности раскрытия, т.е. при  $T_f = 400$  с. Поведение продольных обобщенных координат становится в этом случае достаточно гладким, амплитуды изменения полной длины не превышают 0,15 м. Поперечные отклонения носят характер, показанный на рис. 14. Конструкция отклоняется как консольная балка. На эти отклонения накладываются колебательные составляющие.

Отклонения имеют тенденцию к уменьшению скорости их нарастания, которую можно связать с действием гравитационного момента более заметного, чем в предыдущем случае, поскольку длительность разворачивания здесь вдвое больше. На рис. 15 видно, насколько здесь возросла угловая скорость КА вокруг оси тангажа.

#### Заключение.

Таким образом, в этой статье проведено построение математической модели сложной пространственной конструкции переменной конфигурации и изучена ее динамика в процессе разворачивания ее на орбите. Полученная математическая модель может рассматриваться как обобщение теории относительного движения тел на случай, когда конфигурация системы определяется не только его обобщенными координатами, но и временем непосредственно. Для изучения поведения системы под действием разнообразных возмущающих факторов создан пакет вычислительных программ, который позволил получить информацию для создания представления о поведении системы и может быть достаточно просто адаптирован для исследования разворачиваемых конструкций других типов.

Полученная в процессе численного моделирования информация позволила сделать вывод, что приемлемое для практики раскрытие исследуемой конструкции может быть достигнуто только при рациональном выборе параметров КА в целом.

**РЕЗЮМЕ.** Об'єкт дослідження – нестабілізований космічний апарат, в якому як носій сонячних батарей використана пантографна конструкція, що трансформується на орбіті. Ціль дослідження – побудова математичної моделі такої системи з урахуванням пружності елементів конструкції пантографа як у поздовжньому напрямку, так і в поперечному. Математична модель побудована на основі формалізму Лагранжа стосовно до механічної системи з нестационарними в'язями. Вирази для коефіцієнтів рівнянь руху отримано в рамках наукового пакета Mathematica 5<sup>0</sup>. Для чисельного моделювання динамічних процесів у системі створено пакет прикладних програм, написаний мовою Fortran, що при необхідності може бути адаптований для дослідження систем з конструкціями інших типів. Проведено чисельне моделювання поведінки об'єкта дослідження в режимі розкриття при різних значеннях як параметрів об'єкта, так і параметрів процесу в полі гравітаційних сил Землі. Проведено аналіз наведеної інформації та наведено графіки, що ілюструють поведінку характерних змінних.

1. Драновский В.И., Закржевский А.Е., Хорошилов В.С. Динамика деформируемой космической системы тел с программно изменяемой конфигурацией // Космічна наука і технологія. – 2004. – **10**, № 1. – С. 45 – 53.
2. Закржевский А.Е., Матараццо Дж., Хорошилов В.С. Динамика системы тел с программно изменяемой конфигурацией // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 130 – 135.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
4. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1932. – 360 с.
5. Anik'ev I.I., Maksimyyuk V.A., Mikhailova M., Sushchenko E. Nonstationary Behaviour of a Cantilever-Rod System under Nearly Critical Loads // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 570 – 575.
6. Banerjee A.K. Order-n formulation of extrusion of a beam with large bending and rotation // J. Guidance, Control, and Dynamics. – 1992. – **15**, N 1. – P. 45 – 51.
7. Banerjee A.K., Kane T.R. Extrusion of a beam from a rotating base // J. Guidance, Control, and Dynamics. – 1989. – **12**, N 2. – P. 140 – 146.
8. Banerjee A.K., Nagarajan S. Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection // Multibody System Dynamics. – 1997. – N 1. – P. 113 – 126.
9. Baraka, R. Transverse vibrations of a moving thin rod // J. Acous. Soc. Amer. – 1968. – **43**, N 3. – P. 533 – 539.
10. Beletsky V.V. Motion of an artificial satellite about its center of mass. – Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1966. – 288 p.
11. Bowers E.J., Williams C.E. Optimization of RAE satellite boom deployment timing // J. Spacecraft and Rockets. – 1970. – **7**, N 9. – P. 1057–1062.
12. Lang W.E., Honeycut, G. N., Simulation of deployment dynamics of spinning spacecraft // TN D-4074 NASA. – 1967. – N 8. – P. 547–552.
13. Cloutier G.J. Dynamics of deployment of extendible booms from spinning space vehicles // J. of Spacecraft and Rockets. – 1968. – **5**, N 5. – P. 547–552.
14. Cherchas D.B. Dynamics of spin-stabilized satellites during extension of long flexible booms // J. Spacecraft and Rockets. – 1971. – **8**, N 7. – P. 802 – 804.
15. Creamer N.G. Deployment of a flexible beam from an oscillating base // J. Guidance, Control, and Dynamics. – 1987. – **15**, N 2. – P. 527–529.
16. Dranovskii, V. I., Khoroshylov, V. S., Zakrzhevskii A. E. Spacecraft dynamics with regard to elastic gravitational stabilizer deployment // Acta Astronautica. – 2009. – **64**, N 5–6. – P. 501–513.
17. Golub V. P., Pelykh V. N., Pogrebnyak A. D. Calculating the Fatigue Life of Prismatic Rods Subject to Repeated Stress Cycling // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 337 – 349.
18. Khoroshilov V., Kovalenko A., Zakrzhevsky A. Deployment of Big Pantograph Designs in an Orbit // Proc. 1st Int. Conf. on Recent Advances in Space Technologies (RAST2007), Istanbul, Turkey. – 2007, June 14–16. – P.182 – 186.
19. Lewis J.A., Zajac E.E. A two-gyro, gravity-gradient satellite attitude control system // Bell Syst. Techn. J. – 1964. – **43**, N 6. – P. 2705 – 2765.
20. Lips K.W., Graham W.B., Vigneron F.R., Hunter D.G. Dynamics and control characteristics for the WISP 300m dipole antenna/shuttle configuration // AAS Paper. – 1985. – N 8. – P. 85 – 365.
21. Lips K.W., Mod V.J. Three-dimensional response characteristics for spacecraft with deploying flexible appendages // J. Guidance and Control. – 1981. – **4**, N 5. – P. 650 – 656.
22. Makeev V. I., Strel'nikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar' A. V. Selecting Design Parameters for Flying Vehicles // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 588 – 596.
23. Tabarrok B., Leech C.M., Kim, Y.I. On the dynamics of an axially moving beam // J. the Franklin Inst. – 1974. – **297**, N 3. – P. 201 – 220.
24. Tsuchiya K. Dynamics of a Spacecraft During Extension of Flexible Appendages // J. Guidance, Control, and Dynamics. – 1983. – **6**, N 2. – P. 100 – 103.
25. Zakrzhevskii A. E., Khoroshilov V. S. Dynamics of the Orbital Deployment of an Elastic Ring-Shaped Antenna // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 6. – P. 718 – 729.

Поступила 24.05.2011

Утверждена в печать 03.12.2013