

К. В. Аврамов, Е. А. Стрельникова

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК ПРИ ИХ ДВУСТОРОННЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПОТОКОМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Дм. Пожарского 2/10, 61046, Харьков, Украина, e-mail: kvavr@kharkov.ua*

Abstract. A mathematical model of interaction of a thin plate and a flux of moving fluid is proposed. In the vibrations of the plate, the geometrical nonlinear deformation is taken into account. An interaction of the plate with the flux of fluid is described by the hyper-singular integral equation. The chaotic vibrations of this system is studied by use of the Poincare sections and the Lyapunov exponent spectrum.

Key words: geometrically nonlinear vibrations of plates, potential flow of incompressible inviscous fluid, Lyapunov characteristic exponents, Poincare sections.

Введение.

Взаимодействие тонкостенных конструкций с движущейся жидкостью или газом наблюдается в элементах морской техники, энергетике, аэрокосмической технике. Такое взаимодействие может привести к возникновению флаттера и, как следствие, к усталостному разрушению конструкции. Поэтому понятен постоянный интерес ученых и инженеров к таким задачам. Большинство публикаций в этой области связано с односторонним обтеканием пластинки газовым потоком при сверхзвуковых скоростях [6, 7, 11]. В [8] рассмотрена пластинка, нагруженная постоянной нагрузкой в плоскости и взаимодействующая с потоком. Показано, что, в основном, шести собственных форм достаточно для адекватного описания поведения системы. Однако, в случае переходных движений число мод, необходимых для адекватного описания поведения системы, равняется тридцати.

В статье [4] исследована динамика пластинки при ее двухстороннем взаимодействии с безвихревым потоком. Для описания потока, обтекающего пластинку, использован метод дискретных вихрей. В [5] исследовано геометрически нелинейное деформирование пологих оболочек в покоящейся жидкости. Для моделирования жидкости применяется метод дискретных вихрей. Пластинка в потоке малых дозвуковых скоростей рассмотрена в [14]. Принято, что поток несжимаемый, невязкий и потенциальный. Метод дискретных вихрей применен для описания взаимодействия потока с колеблющейся пластинкой. В [9] рассмотрены колебания пластинки, погруженной в жидкость. Модель колебаний пластинки с конечным числом степеней свободы получена с помощью метода конечных элементов. Потенциал скоростей жидкости представлен в виде сингулярного интеграла. Бифуркации и хаотические колебания пластин и оболочек подробно обсуждаются в монографии [2].

В данной статье рассмотрена гибкая пластинка при ее двухстороннем взаимодействии с потоком невязкой, несжимаемой, потенциальной жидкости. Взаимодействие жидкости с пластинкой описано гиперсингулярным интегральным уравнением, для решения которого применен метод Бубнова – Галеркина. Автоколебания пластины описаны нелинейной динамической системой с конечным числом степеней свободы. Исследованы хаотические колебания в полученной системе на основе расчета спектра характеристических показателей Ляпунова и сечений Пуанкаре.

1. Математическая модель системы.

Рассмотрим динамику шарнирно-опертой пластины в потоке невязкой, несжимаемой, безвихревой жидкости, которая на некотором расстоянии от пластинки имеет постоянную скорость V (рис. 1). Динамика жидкости описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z, t)$. Поперечные перемещения пластины обозначим через $w(x, y, t)$. Тогда условие непроницаемости жидкости через поверхность пластины представим так:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=w \pm \frac{h}{2}} = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1)$$

где h – толщина пластинки. Используя интеграл Коши – Лагранжа, получим перепад давлений, действующий на пластинку, в следующем виде:

$$\frac{p_+ - p_-}{\rho_w} = \frac{\partial(\varphi_- - \varphi_+)}{\partial t} + V \frac{\partial(\varphi_- - \varphi_+)}{\partial x}, \quad (2)$$

где p_+ , p_- – давления жидкости на верхнюю и нижнюю стороны пластины; φ_+ ; φ_- – значения потенциала скоростей на верхней и нижней сторонах пластины; ρ_w – плотность жидкости. На краях пластинки выполняется следующее соотношение: $p_+ = p_-$. Функцию $\varphi(x, y, z, t)$ представим в виде потенциала двойного слоя так [13]:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \gamma(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} dS, \quad (3)$$

где n_ξ – орт нормали к поверхности пластинки; $\gamma(\xi, t) = \varphi_+ - \varphi_-$ – плотность циркуляции скорости; $S = \{(x, y) \in R^2 | 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ – область, занимаемая срединной плоскостью пластинки. Подставив соотношение (3) в (1), в результате получим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_S \gamma(\xi, t) \frac{\partial^2}{\partial z \partial n_\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) dS. \quad (4)$$

После тождественных преобразований это уравнение можно представить так:

$$V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\gamma(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}}. \quad (5)$$

Пластинка, взаимодействующая с потоком, может совершать автоколебания. Для адекватного описания колебаний пластинки учитывается геометрическая нелинейность. Вследствие этой нелинейности, амплитуды колебаний пластинки в области флаттера конечны. В этой работе рассматриваются тонкие пластинки. Поэтому сдвиговыми деформациями и инерцией вращения пренебрегаем; колебания пластинки опишем уравнениями Кармана. Тогда автоколебания пластинки в потоке жидкости описываются гиперсингулярным интегральным уравнением (5) и двумя нелинейными уравнениями в частных производных [13]:

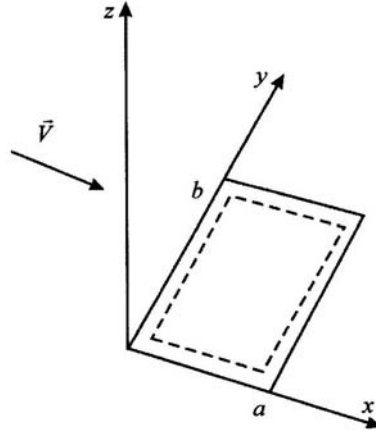


Рис. 1

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \frac{(1-\mu^2)\rho_p}{E} \ddot{w} + \zeta \dot{w} + \frac{(1-\mu^2)\rho_w}{Eh} (\dot{\gamma} + V\gamma'_x) = \\ = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} (F''_{yy} w''_{xx} - 2F''_{xy} w''_{xy} + F''_{xx} w''_{yy}); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 F = (w''_{xy})^2 - w''_{xx} w''_{yy}, \quad (7)$$

где ρ_p – плотность материала пластинки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ζ – коэффициент линейного демпфирования; F – функция напряжений.

Циркуляцию скорости разложим по собственным формам колебаний шарнирно опертой пластинки:

$$\gamma(\xi_1, \xi_2, t) = \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} C_{lm}(t) \sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right). \quad (8)$$

Прогиб пластины w разложим по собственным формам ее линейных колебаний так:

$$w(x, y, t) = \sum_{r_1=1}^{N_x} \sum_{r_2=1}^{N_y} \theta_{r_1 r_2}(t) \sin\left(\frac{r_1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{r_2\pi y}{b}\right). \quad (9)$$

Соотношения (8, 9) введем в сингулярное интегральное уравнение (5) и воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_{lm}(t)$:

$$\sum_{l=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} a_{n_1 n_2 lm} C_{lm}(t) = b_{n_1 n_2} \quad (n_1 = 1, \dots, N_1; \quad n_2 = 1, \dots, N_1), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{n_1 n_2 lm} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right) dx dy \int_S \frac{\sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2\right]^{3/2}}; \\ b_{n_1 n_2} &= \int_S \left(V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right) dx dy = 0,25bV \sum_{r_1=1}^{N_x} \sum_{r_2=1}^{N_y} \theta_{r_1 r_2}(t) r_1 \delta_{r_2 n_2} \mathcal{G}_{n_1 n_2 r_1} + \\ &+ 0,25ab \sum_{r_1=1}^{N_x} \sum_{r_2=1}^{N_y} \dot{\theta}_{r_1 r_2}(t) \delta_{r_1 n_1} \delta_{r_2 n_2}; \\ \delta_{r_2 n_2} &- \text{символ Кронекера; } \mathcal{G}_{n_1 n_2 r_1} = \frac{1-\delta_{n_1 r_1}}{n_1 - r_1} \left[1 - (-1)^{n_1 - r_1} \right] + \frac{1 - (-1)^{n_1 + r_1}}{n_1 + r_1}. \end{aligned}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (10) представим так:

$$C_{lm} = \sum_{r_1=1}^{N_x} \sum_{r_2=1}^{N_y} C_{lm}^{(r_1 r_2)}(t) \quad (l = 1, \dots, N_1; \quad m = 1, \dots, N_1). \quad (11)$$

Если решение (11) ввести в (10), получим системы линейных алгебраических уравнений. Решения этих систем представим так:

$$C_{l,m}^{(r_1 r_2)} = 0.25 V b \theta_{r_1 r_2} (t) \bar{\varphi}_{l,m}^{-(r_1 r_2)} + 0.25 a b \dot{\theta}_{r_1 r_2} (t) \frac{\Delta y^{=(r_1 r_2)}}{\Delta x} \varphi_{l,m}^{=(r_1 r_2)} \quad (12)$$

$$(l = 1, \dots, N_1; m = 1, \dots, N_1; r_1 = 1, \dots, N_s; r_2 = 1, \dots, N_s).$$

Параметры $\bar{\varphi}_{l,m}^{-(r_1 r_2)}$ и $\varphi_{l,m}^{=(r_1 r_2)}$ определяются из следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} a_{n_1 n_2 l m} \bar{\varphi}_{l,m}^{-(r_1 r_2)} = r_1 \delta_{r_2 n_2} \mathcal{G}_{n_1 n_2 r_1}; \quad (13)$$

$$\sum_{l=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} a_{n_1 n_2 l m} \varphi_{l,m}^{=(r_1 r_2)} = \delta_{r_1 n_1} \delta_{r_2 n_2};$$

$$n_1 = 1, \dots, N_1; n_2 = 1, \dots, N_1; r_1 = 1, \dots, N_s; r_2 = 1, \dots, N_s. \quad (14)$$

Рассмотрим метод расчета элементов матрицы систем линейных алгебраических уравнений $a_{n_1 n_2 l m}$. Коэффициенты $a_{n_1 n_2 l m}$ вычисляются из гиперсингулярных интегралов (10). На основании интегрирования по частям коэффициенты $a_{n_1 n_2 l m}$ представим в виде

$$a_{n_1 n_2 l m} = \frac{n_1 \pi l}{4a^2} \int_S \frac{\cos\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{l \pi \xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi \xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 dx dy +$$

$$+ \frac{n_2 \pi m}{4b^2} \int_S \frac{\sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l \pi \xi_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m \pi \xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 dx dy. \quad (15)$$

Используя правила вычисления гиперсингулярных интегралов, представленные в монографии [1], получаем следующее соотношение:

$$\int_S \frac{\cos\left(\frac{l \pi \xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi \xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 = \cos\left(\frac{l \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi y}{b}\right) R(\Delta x, \Delta y) +$$

$$+ \int_{S_F} \frac{\cos\left(\frac{l \pi \xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi \xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (16)$$

$$\left(R(\Delta x, \Delta y) = \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \ln \left[\frac{\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + z^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + z^2} - \Delta x} \right] dz ; \right.$$

$$\left. S_F = S - S_\varepsilon; S_\varepsilon = \left\{ (\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid x - \Delta x < \xi_1 < x + \Delta x; y - \Delta y < \xi_2 < y + \Delta y \right\} \right).$$

Итак, в правой части уравнения (16) нет особенности в знаменателе; поэтому интегралы (16) не относятся к гиперсингулярным. Величины $a_{n_1 n_2 l m}$ вычисляются согласно формулам

$$\begin{aligned}
a_{n_1 n_2 l m} = & \frac{n_1 \pi l}{4a^2} \int_S \cos\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dx dy \int_{S_F} \frac{\cos\left(\frac{l \pi \zeta_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi \zeta_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \zeta_1)^2 + (y - \zeta_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{n_2 \pi m}{4b^2} \int_S \cos\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) dx dy \int_{S_F} \frac{\sin\left(\frac{l \pi \zeta_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m \pi \zeta_2}{b}\right)}{\sqrt{(x - \zeta_1)^2 + (y - \zeta_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{ab\pi}{16} R(\Delta x, \Delta y) \left(\frac{n_1 l}{a^2} + \frac{n_2 m}{b^2} \right) \delta_{m m_2} \delta_{l n_1}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Итак, решение гиперсингулярного интегрального уравнения сведено к последовательности решений линейных алгебраических уравнений.

Построим динамическую модель нелинейных колебаний пластинки с конечным числом степеней свободы. Соотношение (9) введем в (7) и получим линейное неоднородное уравнение в частных производных. Решение этого уравнения представим в виде

$$F = F_p + F_g, \quad (18)$$

где F_p – частное решение неоднородного уравнения; F_g – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
0,5 F_p = & \sum_{r_1, r_2, p_1, p_2=1}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2} \left[A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(1)} \cos \eta(r_2 - p_2) \cos \xi(r_1 + p_1) + \right. \\
& \left. + A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(2)} \cos \eta(r_2 + p_2) \cos \xi(r_1 - p_1) \right] + \\
& + \sum_{\substack{r_1, r_2, p_1, p_2=1 \\ r_1 \neq r_2 \text{ и } p_1 \neq p_2 \\ r_1 \neq p_1 \text{ и } r_2 \neq p_2}}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2} A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(3)} \cos \eta(r_2 - p_2) \cos \xi(p_1 - r_1) + \\
& + \sum_{\substack{r_1, r_2, p_1, p_2=1 \\ r_1 \neq r_2 \text{ и } p_1 \neq p_2}}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2} A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(4)} \cos \eta(r_2 + p_2) \cos \xi(p_1 + r_1)
\end{aligned} \quad (19)$$

(параметры $A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(1)}, \dots, A_{r_1 r_2 p_1 p_2}^{(4)}$ не приводим для краткости изложения). Общее решение однородного уравнения F_g определим, используя процедуру из [2]. Следуя этой процедуре и удовлетворяя граничным условиям для пластинки, получаем $F_g = 0$.

Если полученное решение (18, 19) подставим в уравнение (6) и применим метод Бубнова – Галеркина, то в результате получим следующую динамическую систему:

$$\begin{aligned}
\sum_{l, m=1}^{N_S} \left(M_{n_1 n_2 l m} \ddot{\theta}_{l m} + D_{n_1 n_2 l m} \dot{\theta}_{l m} + K_{n_1 n_2 l m} \theta_{l m} \right) + R_{n_1 n_2} (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots) = 0 \\
(n_1 = 1, \dots, N_S; n_2 = 1, \dots, N_S),
\end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\left(R_{n_1 n_2} (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots) = - \int_S (F_{YY}'' w_{XX}'' - 2F_{XY}'' w_{XY}'' + F_{XX}'' w_{YY}'') \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dx dy = \right. \\
= \sum_{r_1, r_2, p_1, p_2, l, m=1}^{N_S} \alpha_{l m r_1 r_2 p_1 p_2}^{(n_1, n_2)} \theta_{l m} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2};
\end{aligned}$$

$$M_{n_1 n_2 l m} = \rho_p h \delta_{l n_1} \delta_{m n_2} + 0,25 \rho_w a b \varphi_{n_1 n_2}^{(l,m)}; D_{n_1 n_2 l m} = 0,25 \rho_w V b \left(\bar{F}_{n_1 n_2}^{(l,m)} + \varphi_{n_1 n_2}^{-(l,m)} \right) + \zeta_{n_1 n_2 l m};$$

$$K_{n_1 n_2 l m} = \delta_{l n_1} \delta_{m n_2} D \pi^4 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 + 0,25 \rho_w V^2 a^{-1} b \bar{F}_{n_1 n_2}^{(l,m)};$$

$$\bar{F}_{n_1 n_2}^{(l,m)} = \sum_{r_1} r_1 \mathcal{G}_{n_1 n_2 r_1} \varphi_{r_1 n_2}^{-(l,m)}; \bar{F}_{n_1 n_2}^{(l,m)} = \sum_{r_1} r_1 \mathcal{G}_{n_1 n_2 r_1} \varphi_{r_1 n_2}^{(l,m)};$$

$\zeta_{n_1 n_2 l m}$ – коэффициенты линейного демпфирования).

2. Численный анализ хаотических колебаний.

Произведем численный анализ колебаний пластинки в потоке воды (рис. 1) при следующих численных значениях параметров системы:

$$h = 0,04 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \rho_p = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_w = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \mu = 0,3;$$

$$a = b = 0,5 \text{ м}; N_1 = N_s = 3; \zeta_{n_1 n_2 l m} = 5000 \text{ кг/с} (n_1, n_2, l, m) = 1, 2, 3.$$

Исследуем устойчивость тривиального состояния равновесия $\eta \equiv 0$. При $M = 0,0855$ оно теряет устойчивость и появляются два дополнительных состояния равновесия, которые описывают дивергенцию пластинки. Такое ветвление состояний равновесия соответствует бифуркации типа «вилы» [15]. Результаты анализа состояний равновесия пластинки представлены на рис. 2, где показана зависимость первой обобщенной координаты η_1 от числа Маха M .

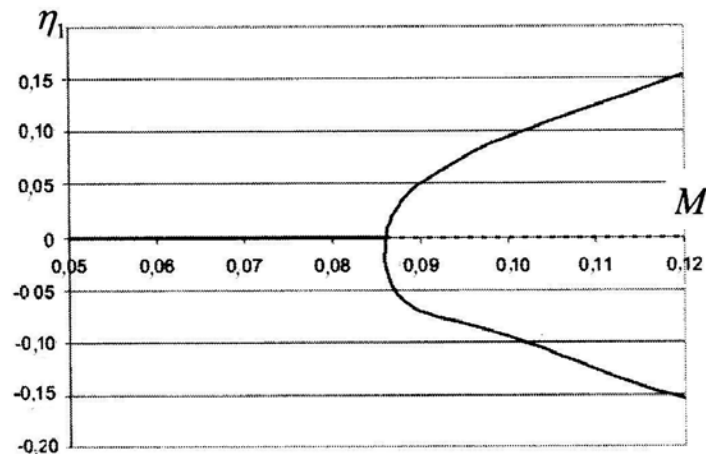


Рис. 2

При $M = 0,11423$ в системе возникают хаотические колебания [3]. Они исследуются в диапазоне $M \in [0,11423; 0,116]$. Для анализа хаотических колебаний рассчитаны сечения Пуанкаре системы (20) во всем исследуемом диапазоне M . Сечения Пуанкаре выбирались так: $\Sigma = \{(\eta, \dot{\eta}) \in R^{2N} | \dot{\eta}_1 = 0\}$.

В качестве примера сечения Пуанкаре при $M = 0,1144$ приведены на рис. 3, где показана 931 точка, описывающая хаотический аттрактор системы. Как следует из численных расчетов, вид сечений Пуанкаре не изменяется во всем исследуемом диапазоне M .

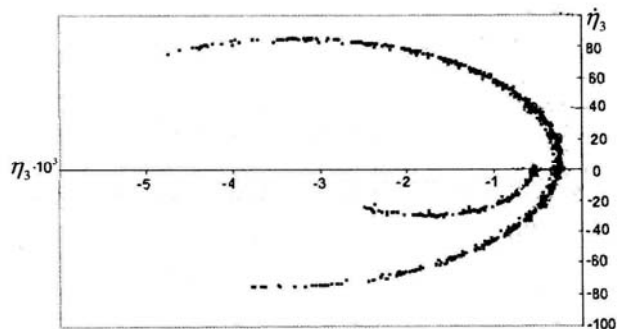


Рис. 3

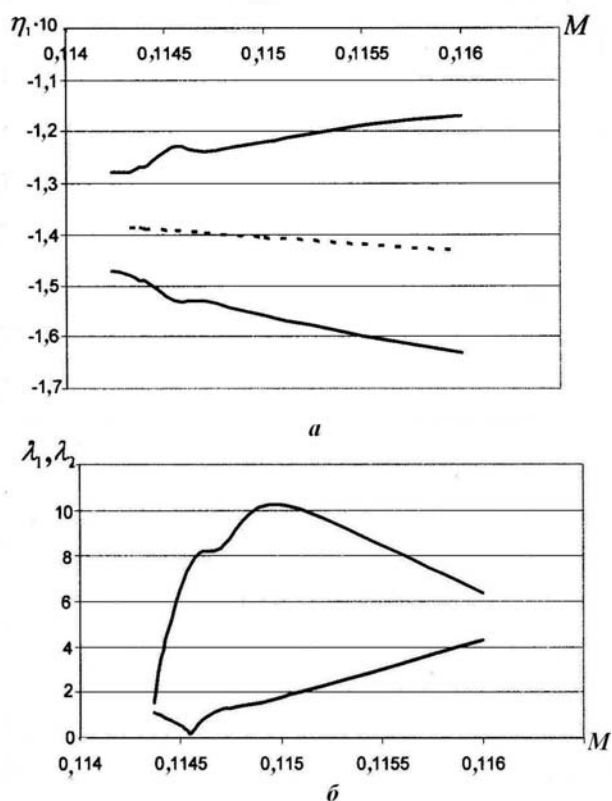


Рис. 4.

Произведен анализ размахов хаотических колебаний; для этого определены $\max(\eta_i)$ и $\min(\eta_i)$. Зависимость $\max(\eta_i)$ и $\min(\eta_i)$ от M приведена на рис. 4, a сплошной линией. Пунктирной линией показаны состояния равновесия системы, описывающие дивергенцию пластинки. Из этого рисунка следует, что хаотические колебания наблюдаются около одного из дивергентных состояний равновесия.

Отметим, что как при дивергентных состояниях [11], так и при хаотических колебаниях наибольшие абсолютные величины имеют первая и седьмая обобщенные координаты, т.е. эти координаты наиболее «активны».

Для исследования хаотических колебаний выполнен расчет характеристических показателей Ляпунова. Для этого систему уравнений динамической системы (20) интегрировали совместно с уравнениями в вариациях. Через некоторые равные промежутки времени производилась ортогонализация решений уравнений в вариациях. Подробно процедура расчета спектра характеристических показателей изложена в

монографии [12]. Результаты расчетов двух максимальных характеристических показателей Ляпунова при различных значениях M приведены на рис. 4, б. Как видно из представленных результатов, хаотические колебания имеют два положительных характеристических показателя. Величина λ_3 соответствует нулевому характеристическому показателю. Итак, во всем диапазоне изменения M хаотические колебания имеют два положительных характеристических показателя.

Заключение.

В статье исследовано двухстороннее взаимодействие колеблющейся пластины с потоком движущейся жидкости. Построена математическая модель этого взаимодействия. Оно описывается гиперсингулярным интегральным уравнением, которое решено методом Бубнова – Галеркина. Рассмотрены колебания пластинки с учетом ее геометрически нелинейного деформирования. Эта нелинейность ограничивает амплитуды колебаний в области флаттера.

Исследованы хаотические колебания пластинки, которые наблюдаются около одного дивергентного состояния равновесия. Для исследования хаоса рассчитаны сечения Пуанкаре и спектр характеристических показателей Ляпунова. Показано, что в спектре наблюдаются два положительных характеристических показателя Ляпунова. Во всем исследуемом диапазоне структура хаотических колебаний не меняется.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано математичну модель взаємодії тонкої пластинки з потоком рідини, що рухається. У моделі коливань пластинки враховано геометрично нелінійне деформування. Взаємодія пластинки з потоком рідини описується гіперсингулярним інтегральним рівнянням. Хаотичні коливання цієї системи досліджено на основі розрахунків перерізів Пуанкаре та спектру показників Ляпунова.

1. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков: Новое слово, 2005. – 250 с.
2. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 420 p.
3. Avramov K.V., Karaban V.N. Resonance under Random Vibrations of Discrete Dynamic Systems with Piecewise – Linear Elastic Characteristic // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 7. – P. 584 – 588.
4. Avramov K.V., Strel'nikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow // Nonlinear Dynamics – 2012. – N 70. – P. 1335 – 1354.
5. Breslavsky I. D., Strel'nikova E. A., Avramov K. V. Dynamics of shallow shells with geometrical nonlinearity interacting with fluid // Computers and Structures. – 2011. – **89**. – P. 496 – 506.
6. Dowell E.H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system // J. Sound and Vibration. – 1982. – N 85. – P. 333 – 344.
7. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid – structure interaction // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2001. – N 33. – P. 445 – 490.
8. Epureanu B.I., Tang L.S. Paidoussis M.P. Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels // Int. J. of Non-linear Mechanics. – 2004. – N 39. – P. 977 – 991.
9. Fu Y., Price W.G. Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid // J. Sound and Vibration. – 1987. – N 118. – P. 495 – 513.
10. Kurilov E., Mikhlin Y. Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells with Initial Imperfections in a Supersonic Flow // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 9. – P. 1000 – 1008.
11. Martynyuk A.A., Mullazhonov. Revisiting the Theory of Stability of Stationary Linear Large-Scale Systems // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 101 – 111.
12. Parker T.S., Chua L.O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. – New York: Springer, 1989. – 654 p.
13. Shul'ga N.A. Mixed System of Equations in Kirchhoff's Theory of the Transverse Vibrations of Plates // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 203 – 210.
14. Tang D., Dowell E.H. Limit cycle oscillations of two-dimensional panels in low subsonic flow // Int. J. of Non-linear Mechanics. – 2002. – **37**. – P. 1199 – 1209.
15. Vel'magina N.A. Bifurcations of the Self-Exciting Oscillations of a Wheeled Assembly about Straight-Line Motion // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 726 – 731.

Поступила 26.04.2011

Утверждена в печать 03.12.2013