

**В. Ф. Мейш, О. Г. Галаган, В. М. Мельник**

**НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ  
НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A solution of the problem on non-axisymmetric vibrations of inhomogeneous conical shell of variable thickness is obtained for the case of action of a non-stationary load. The statement is given and the algorithm of solving is elaborated. The system of differential equations is based on application of the Timoshenko type shell theory. The concrete example is given for analysis of dynamical behavior of a conical panel of variable thickness under non-stationary load.

**Key words:** conical shells, variable thickness, Timoshenko type shell theory, forced vibrations, numerical method.

**Введение.**

Неоднородные по толщине оболочечные элементы конструкций находят широкое применение в современной технике (подкрепленные оболочки, оболочки переменной толщины и т.д.). Условно задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) и колебаний оболочечных элементов переменной толщины можно разделить на три класса: *а)* статические задачи определения НДС конструкций; *б)* задачи на свободные колебания; *в)* задачи на вынужденные колебания. Детальный обзор исследований по задачам первого и второго направления приведен в [11]. Здесь рассмотрены работы по статическим и динамическим задачам для замкнутых цилиндрических и конических оболочек переменной толщины в классической и уточненной постановках. К первому классу можно также отнести работы по определению (НДС) оболочек переменной толщины канонического вида [2, 9, 12]. Свободные колебания оболочечных элементов переменной толщины исследованы в [7 – 10, 14 – 17]. В основном, рассматриваются неоднородные по толщине цилиндрические, конические и сферические оболочки в классической постановке. Задачам о вынужденных колебаниях оболочек переменной толщины посвящены работы [4, 5, 13, 18]. К третьему классу задач также можно отнести задачи о вынужденных колебаниях дискретно подкрепленных оболочек при нестационарных нагрузках [1, 3]. В этих работах рассмотрены вынужденные колебания цилиндрических и сферических подкрепленных оболочек в рамках теории оболочек и стержневой модели Тимошенко. Исследования [8, 19] посвящены задачи выпучивания цилиндрических и конических оболочек переменной толщины при динамических нагрузках.

Целью настоящей работы является постановка и численное решение задач об неосесимметричных колебаниях конических оболочек переменной толщины при нестационарных нагрузках.

**1. Постановка задачи. Уравнения колебаний конических оболочек переменной толщины.**

Рассмотрим задачу динамического поведения конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки. Предположим, что неоднородная по толщине коническая оболочка находится под действием внутренней распределен-

ной нагрузки  $P_3(s_1, s_2, t)$ , где  $s_1 = A_1\alpha_1$ ,  $s_2 = A_2\alpha_2$  и  $t$  – пространственные и временная координаты;  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  – соответственно, коэффициенты первой квадратичной формы и криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

При рассмотрении процесса несимметричных колебаний конических оболочек используем систему координат  $s_1, s_2, t$ , причем координата  $s_1$  отсчитывается от вершины конуса. В некоторых случаях, в частности, для усеченных конических оболочек, рационально применение координаты  $s_1$ , которая отсчитывается от края оболочки.

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности имеют вид

$$A_1 = 1; A_2 = R_s; k_1 = 0; k_2 = \cos \theta / R_s, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол конусности;  $s_1$  – текущая координата;  $R_s = R_0 + s_1 \sin \theta$ ,  $R_0$  – радиус оболочки при  $s_1 = s_{10}$ .

При построении математической модели процесса динамического деформирования конической оболочки переменной толщины используем геометрически и физически линейный вариант теории оболочек, в которой принимаются гипотезы Тимошенко [1, 3]. Предположим, что толщина оболочки изменяется вдоль координаты  $s_1$ , т.е.  $h = h(s_1)$ .

Уравнения колебаний конической оболочки переменной толщины запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Связь усилий и моментов с соответствующими величинами деформаций в случае ортотропного материала оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{12}(s_1)\varepsilon_{22}; \quad T_{22} = B_{21}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{22}(s_1)\varepsilon_{22}; \\ S &= B_s(s_1)\varepsilon_{12}; \quad T_{13} = B_{13}(s_1)\varepsilon_{13}; \quad T_{23} = B_{23}(s_1)\varepsilon_{23}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_{11} = D_{11}(s_1)\kappa_{11} + D_{12}(s_1)\kappa_{12}; \quad M_{22} = D_{21}(s_1)\kappa_{11} + D_{22}(s_1)\kappa_{22}; \quad H = D_s(s_1)\kappa_{12}$$

$$\left( B_{11}(s_1) = \frac{E_1 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{12}(s_1) = \frac{E_1 h(s_1) \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{22}(s_1) = \frac{E_2 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{21}(s_1) = \frac{E_2 h(s_1) \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \right.$$

$$B_s(s_1) = G_{12} h(s_1); \quad B_{13}(s_1) = G_{13} h(s_1); \quad B_{23}(s_1) = G_{23} h(s_1);$$

$$D_{11}(s_1) = \frac{E_1 h^3(s_1)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12}(s_1) = \frac{E_1 h^3(s_1) \nu_2}{12(1 - \nu_1 \nu_2)};$$

$$D_{22}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_{21}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)\nu_1}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_s(s_1) = G_{12} \frac{h^3(s_1)}{12}.$$

Деформационные соотношения для конических оболочек представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_1 + k_2 u_3; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_2; \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_1; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения колебаний неоднородной по толщине конической оболочки (2) – (4) дополним соответствующими граничными условиями по координате  $s_1$  при  $s_{10}$  и  $s_N$ . Начальные условия при  $t = 0$  принимаем в виде

$$u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

## 2. Численный алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения начально-краевой задачи (2) – (5) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам  $s_1, s_2$  и явной аппроксимации по временной координате  $t$  [1, 3, 6]. Интегрируем исходные уравнения колебаний (2) по области  $D_1 = \{s_{1i-1/2} \leq s_1 \leq s_{1i+1/2}; s_{2j-1/2} \leq s_2 \leq s_{2j+1/2}\}$ . При этом приходим к разностным соотношениям для уравнений (2), которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} \right] ds_1 ds_2 &= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2; \\ \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} \right] ds_1 ds_2 &= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2; \\ \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 \right] ds_1 ds_2 &= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2; \quad (6) \\ \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} \right] ds_1 ds_2 &= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2; \\ \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} \right] ds_1 ds_2 &= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[ \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

После стандартных преобразований в (6) получим следующие разностные соотношения:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 T_{11}^n)_{i+1/2,j} - (A_2 T_{11}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} - \Psi_i T_{22i,j}^n + \frac{S_{i,j+1/2} - S_{i,j-1/2}}{\Delta s_2} = \rho h(s_{1i})(u_{1i,j}^n)_{\bar{u}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 S^n)_{i+1/2,j} - (A_2 S^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} + \Psi_i S_{i,j}^n + \\
& + \frac{T_{22i,j+1/2}^n - T_{22i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2i} \frac{T_{23i,j+1/2}^n + T_{23i,j-1/2}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(u_{2i,j}^n)_{\bar{u}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 T_{13}^n)_{i+1/2,j} - (A_2 T_{13}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} + \\
& + \frac{T_{23i,j+1/2}^n - T_{23i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - k_{2i} \frac{T_{22i,j+1/2}^n + T_{22i,j-1/2}^n}{2} + P_{3i,j}^n = \rho h(s_{1i})(u_{3i,j}^n)_{\bar{u}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 M_{11}^n)_{i+1/2,j} - (A_2 M_{11}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} - \Psi_i \frac{M_{22i,j+1/2}^n + M_{22i,j-1/2}^n}{2} + \\
& + \frac{H_{i,j+1/2}^n - H_{i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - \frac{T_{13i+1/2,j}^n + T_{13i-1/2,j}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(\varphi_{1i,j}^n)_{\bar{u}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 H^n)_{i+1/2,j} - (A_2 H^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} + \Psi_i \frac{H_{i,j+1/2}^n + H_{i,j-1/2}^n}{2} + \\
& + \frac{M_{22i,j+1/2}^n - M_{22i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - \frac{T_{23i,j+1/2}^n + T_{23i,j-1/2}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(\varphi_{2i,j}^n)_{\bar{u}},
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\Psi_i = \left( \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds} \right) \Big|_i$ .

В уравнениях (7) дискретные величины усилий – моментов имеют вид

$$\begin{aligned}
T_{11i\pm 1/2,j}^n &= B_{11}(s_{1i\pm 1/2})\varepsilon_{11i\pm 1/2,j}^n + B_{12}(s_{1i\pm 1/2})\varepsilon_{22i\pm 1/2,j}^n; \\
S_{1i\pm 1/2,j}^n &= B_s(s_{1i\pm 1/2})\varepsilon_{12i\pm 1/2,j}^n; \quad T_{13i\pm 1/2,j}^n = B_{13}(s_{1i\pm 1/2})\varepsilon_{13i\pm 1/2,j}^n; \\
M_{11i\pm 1/2,j}^n &= D_{11}(s_{1i\pm 1/2})\kappa_{11i\pm 1/2,j}^n + D_{12}(s_{1i\pm 1/2})\kappa_{22i\pm 1/2,j}^n; \\
H_{i\pm 1/2,j}^n &= D_s(s_{1i\pm 1/2})\kappa_{12i\pm 1/2,j}^n; \quad T_{22i,j\pm 1/2}^n = B_{22}(s_{1i})\varepsilon_{22i,j\pm 1/2}^n + B_{21}(s_{1i})\varepsilon_{11i,j\pm 1/2}^n; \\
S_{i,j\pm 1/2}^n &= B_s(s_{1i})\varepsilon_{12i,j\pm 1/2}^n; \quad H_{i,j\pm 1/2}^n = D_s(s_{1i})\kappa_{12i,j\pm 1/2}^n; \quad T_{23i,j\pm 1/2}^n = B_{23}(s_{1i})\varepsilon_{23i,j\pm 1/2}^n; \\
M_{22i,j\pm 1/2}^n &= D_{22}(s_{1i})\kappa_{22i,j\pm 1/2}^n + D_{21}(s_{1i})\kappa_{11i,j\pm 1/2}^n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, в разностных уравнениях (7), (8) компоненты обобщенного вектора перемещений  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$  соотношены к целым точкам разностной схемы  $(s_{1i}, s_{2j})$ , а величины деформаций и усилий – моментов – к соответствующим точкам  $(s_{1i\pm 1/2}, s_{2j})$  и  $(s_{1i}, s_{2j\pm 1/2})$ . Для получения разностных соотношений для величин

деформаций интегрируем уравнения (4) по соответствующим областям. Например, для получения искомым величин в точках  $(s_{1\pm 1/2}, s_{2j})$  интегрируем уравнения, соответственно, по областям  $D_2 = \{s_{1i} \leq s_1 \leq s_{1i+1}; s_{2j-1/2} \leq s_2 \leq s_{2j+1/2}\}$  и  $D_3 = \{s_{1i-1} \leq s_1 \leq s_{1i}; s_{2j-1/2} \leq s_2 \leq s_{2j+1/2}\}$ . В результате получим следующие разностные соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11i+1/2,j}^n &= \frac{u_{1i+1,j}^n - u_{1i,j}^n}{\Delta s_1}; \quad \varepsilon_{11i-1/2,j}^n = \frac{u_{1i,j}^n - u_{1i-1,j}^n}{\Delta s_1}; \\
\varepsilon_{22i+1/2,j}^n &= \frac{u_{2i+1/2,j+1/2}^n - u_{2i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \Psi \Big|_{i+1/2} u_{1i+1/2,j}^n + k_{2i+1/2} u_{3i+1/2,j}^n; \\
\varepsilon_{22i-1/2,j}^n &= \frac{u_{2i-1/2,j+1/2}^n - u_{2i-1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \Psi \Big|_{i-1/2} u_{1i-1/2,j}^n + k_{2i-1/2} u_{3i-1/2,j}^n; \\
\varepsilon_{12i+1/2,j}^n &= \frac{u_{1i+1/2,j+1/2}^n - u_{1i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{u_{2i+1,j}^n - u_{2i,j}^n}{\Delta s_1} - \Psi_{i+1/2} u_{2i+1/2,j}^n; \\
\varepsilon_{12i-1/2,j}^n &= \frac{u_{1i-1/2,j+1/2}^n - u_{1i-1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{u_{2i,j}^n - u_{2i-1,j}^n}{\Delta s_1} - \Psi_{i-1/2} u_{2i-1/2,j}^n; \\
\varepsilon_{13i+1/2,j}^n &= \frac{u_{3i+1,j}^n - u_{3i,j}^n}{\Delta s_1} + \varphi_{1i+1/2,j}^n; \quad \varepsilon_{13i-1/2,j}^n = \frac{u_{3i,j}^n - u_{3i-1,j}^n}{\Delta s_1} + \varphi_{1i-1/2,j}^n; \\
\kappa_{11i+1/2,j}^n &= \frac{\varphi_{1i+1,j}^n - \varphi_{1i,j}^n}{\Delta s_1}; \quad \kappa_{11i-1/2,j}^n = \frac{\varphi_{1i,j}^n - \varphi_{1i-1,j}^n}{\Delta s_1}; \\
\kappa_{22i+1/2,j}^n &= \frac{\varphi_{2i+1/2,j+1/2}^n - \varphi_{2i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \Psi_{i+1/2} \varphi_{1i+1/2,j}^n; \\
\kappa_{22i-1/2,j}^n &= \frac{\varphi_{2i-1/2,j+1/2}^n - \varphi_{2i-1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \Psi_{i-1/2} \varphi_{1i-1/2,j}^n; \\
\kappa_{12i+1/2,j}^n &= \frac{\varphi_{1i+1/2,j+1/2}^n - \varphi_{1i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{\varphi_{2i+1,j}^n - \varphi_{2i,j}^n}{\Delta s_1} - \Psi_{i+1/2} \varphi_{2i+1/2,j}^n; \\
\kappa_{12i-1/2,j}^n &= \frac{\varphi_{1i-1/2,j+1/2}^n - \varphi_{1i-1/2,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{\varphi_{2i,j}^n - \varphi_{2i-1,j}^n}{\Delta s_1} - \Psi_{i-1/2} \varphi_{2i-1/2,j}^n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Аналогичным образом получены разностные соотношения для деформаций в точках  $(s_{1i}, s_{2j\pm 1/2})$ .

### 3. Числовые результаты и их анализ.

Исследуем динамическое поведение конической панели переменной толщины при действии нормальной распределенной нагрузки  $P_3(s_1, s_2, t)$ . Рассмотрим два случая: а) все края панели жестко закреплены; б) один из краев панели свободен при  $s_1 = s_{10}$ . В случае, когда края панели жестко закреплены на границах области  $D = \{s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}; s_{20} \leq s_2 \leq s_{2M}\}$  компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности

панели  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ . В случае свободного края при  $s_1 = s_{10}$  принято  $T_{11} = S = T_{13} = M_{11} = H = 0$ . Начальные условия нулевые.

Нестационарная импульсная нагрузка задана в таком виде:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)].$$

Переменная толщина в панели определена как линейная функция координаты  $s_1$ :

$$h(s_1) = h(s_{10}) + [h(s_{1N}) - h(s_{10})] \frac{s_1}{L}, \text{ где } s_{1N} - s_{10} = L, s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}.$$

Обе исходные задачи решены при следующих геометрических и физико-механических параметрах:  $\theta_1 = \pi/12$ ;  $\theta_2 = \pi/6$ ;  $\theta_3 = \pi/4$ ;  $R_0 = 0,3$  м;  $L = 0,4$  м;  $\alpha_2 \in [-\pi/6; \pi/6]$ ;  $h(s_{10}) = 0,5 \cdot 10^{-2}$  м;  $h(s_{1N}) = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м;  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 2,7$  кг/м<sup>3</sup>;  $E/A = 7 \cdot 10^4$ ;  $T = 0,625L/c$ ;  $c^2 = E/[\rho(1-\nu^2)]$ .

Также были проведены расчеты динамического поведения конической панели постоянной толщины, масса которой совпадает с массой исходной конической панели переменной толщины при выше указанных параметрах для случая жесткого защемления всех краев.

На рис. 1 – 5 приведены результаты расчетов для панели переменной толщины в случае жесткого закрепления всех краев. Учитывая, что исходная задача является многопараметрической (в разные моменты времени  $t$  кинематические и силовые параметры принимают разные значения по координатам  $s_1$  и  $s_2$ ), в дальнейшем рассмотрены зависимости искомых величин в моменты времени достижения ими максимальных значений по модулю. На рис. 1

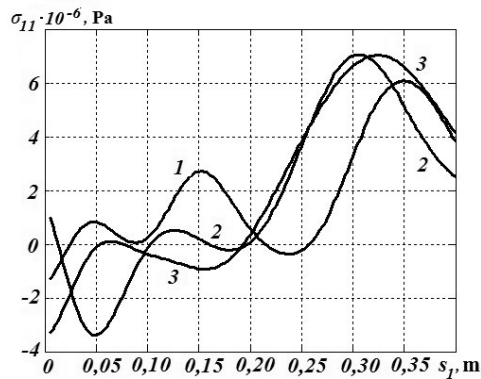


Рис. 1

представлены зависимости перемещения  $u_3$  по пространственной координате  $s_1$  в сечении  $s_2 = 0$  при разных углах конусности исходной оболочки. Кривая с индексом 1 соответствует случаю  $\theta_1 = \pi/12$  в момент времени  $t_1 = 16,7T$ ; кривая 2 –  $\theta_2 = \pi/6$  в момент времени  $t_2 = 18,3T$ ; кривая 3 –  $\theta_3 = \pi/4$  в момент времени  $t_3 = 16,5T$ . На рис. 2 – 3 приведены зависимости величин  $\varepsilon_{11}$  и  $\sigma_{11}$  в указанном сечении  $s_2 = 0$ . На рисунках кри-

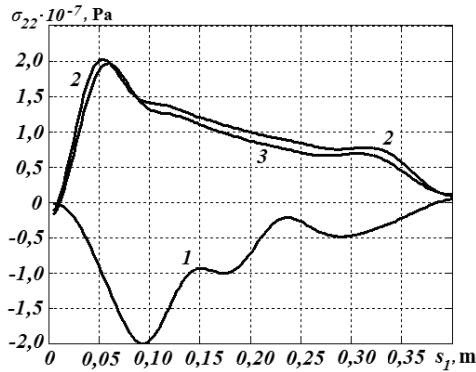


Рис. 2

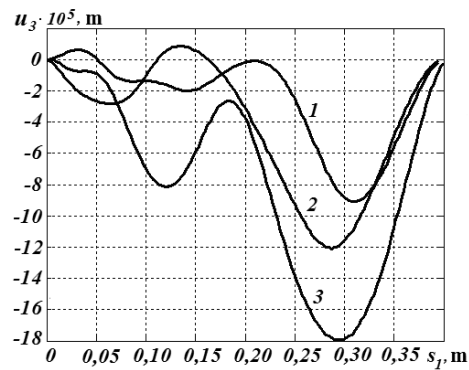


Рис. 3

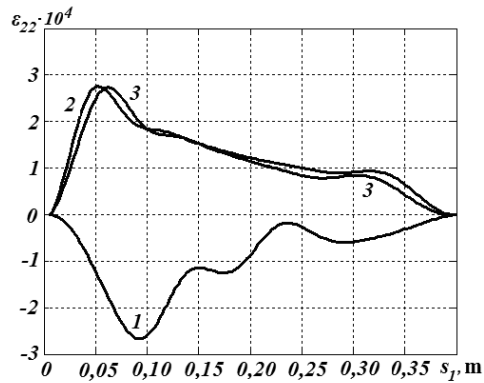


Рис. 4

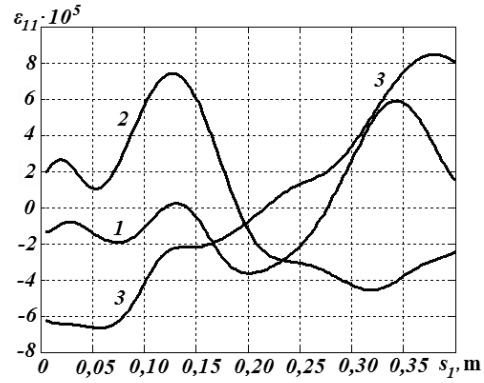


Рис. 5

вые (согласно выше принятым обозначениям) соответствуют временам  $t_1 = 9,9T$ ,  $t_2 = 4,6T$ ,  $t_3 = 2,1T$ . На рис. 4 приведены зависимости величины  $\varepsilon_{22}$  при указанных углах конусности в соответствующие моменты времени (времена достижения исходными величинами максимальных значений по модулю) –  $t_1 = 3,1T$ ,  $t_2 = 1,3T$ ,  $t_3 = 1,6T$ . На рис. 5 приведены зависимости величин  $\sigma_{22}$  по координате  $s_1$  во времена  $t_1 = 3,1T$ ,  $t_2 = 1,3T$ ,  $t_3 = 1,4T$ . Как видно из приведенного графического материала, максимумы по пространственной координате  $s_1$  в сечении  $s_2 = 0$  величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\sigma_{11}$  достигают в области  $L/2 \leq s_1 \leq L$ , а величины  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$  в области  $-0 \leq s_1 \leq L/2$ .

Расчеты для конических оболочек с постоянной толщиной (при равной массе с оболочкой переменной толщины) показывают аналогичную качественную картину для величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\sigma_{11}$  – максимальные значения достигаются в области  $L/2 \leq s_1 \leq L$ . В частности, на рис. 6 приведены зависимости величин  $u_3$  в сечении  $s_2 = 0$  для оболочки переменной толщины (кривая 1) и оболочки постоянной толщины (кривая 2) в моменты достижения ими максимальных значений  $t_1 = 16,7T$ ,  $t_2 = 13,1T$ . Приведенные кривые соответствуют случаю  $\theta_1 = \pi/12$ . Отличие по максимальным значениям достигает  $\approx 25\%$ . Величины  $\varepsilon_{22}$  и  $\sigma_{22}$  для гладкой оболочки также достигают своих максимумов в области  $L/2 \leq s_1 \leq L$ . На рис. 7 приведены зависимости для величин  $\sigma_{22}$  (кривые 1, 2), соответственно, для времени  $t_1 = 3,1T$ ;  $t_2 = 15,4T$ .

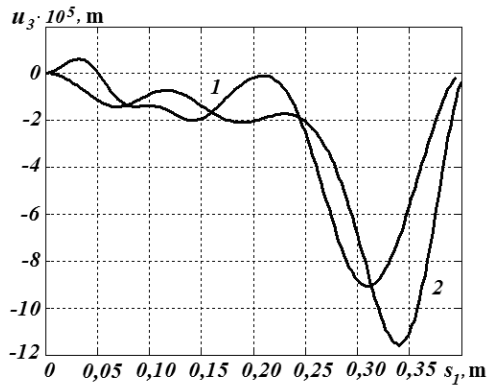


Рис. 6

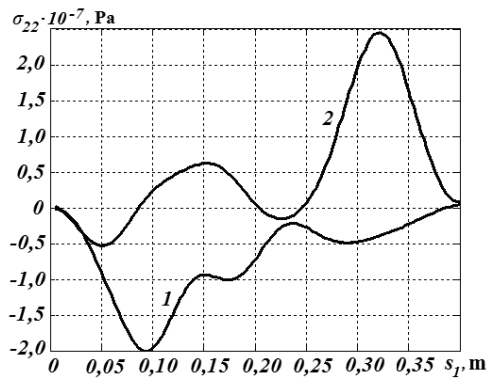


Рис. 7

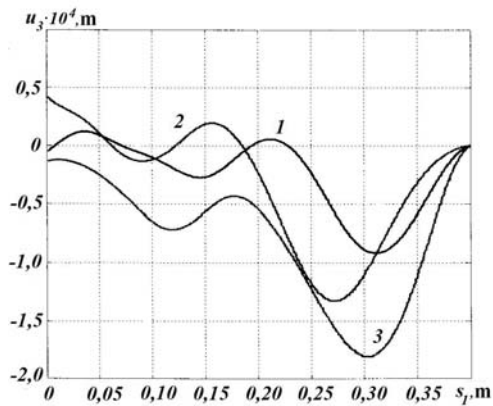


Рис. 8

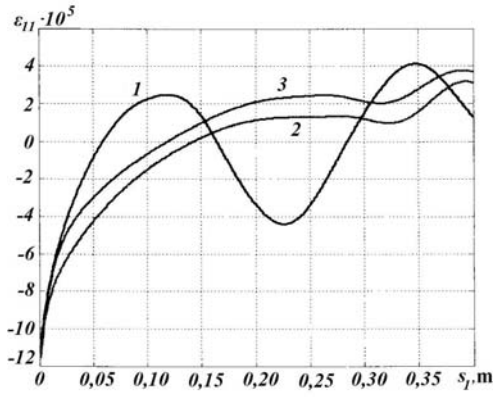


Рис. 9

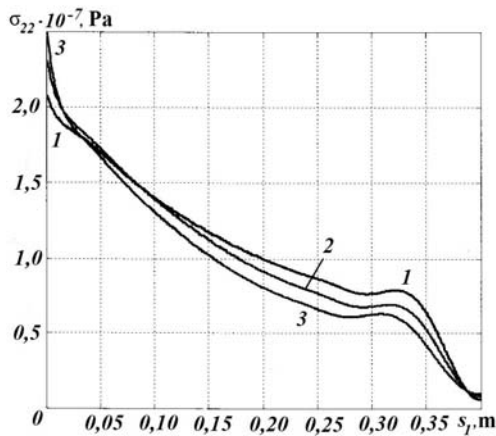


Рис. 10

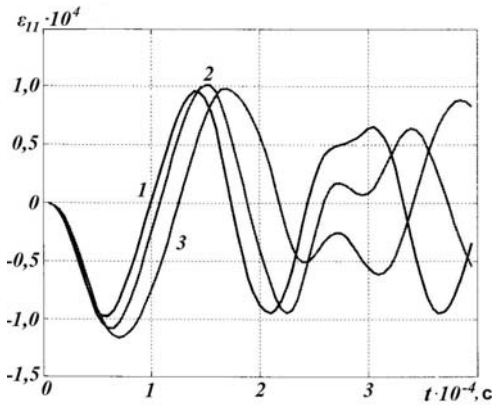


Рис. 11

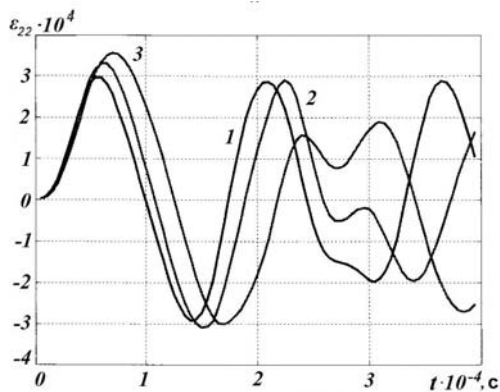


Рис. 12

На рис. 8 – 12 приведены результаты расчетов для панели переменной толщины для случая, когда один из краев свободный. На рис. 8 представлены зависимости перемещения  $u_3$  по пространственной координате  $s_1$  в сечении  $s_2 = 0$  при разных углах конусности исходной панели. Кривая с индексом 1 соответствует случаю  $\theta_1 = \pi/12$  в момент времени  $t_1 = 16,75T$ ; кривая 2 –  $\theta_2 = \pi/6$  в момент времени  $t_2 = 18,5T$ ; кривая 3 –  $\theta_3 = \pi/4$  в момент времени  $t_3 = 16,25T$ . На рис. 9 приведены зависимости величин

$\varepsilon_{11}$  в указанном сечении  $s_2 = 0$ . Здесь кривые, согласно выше принятым обозначениям, соответствуют моментам времени  $t_1 = 10,1T$ ,  $t_2 = 1,2T$ ,  $t_3 = 1,4T$ . При  $s_1 = 0$  величины деформаций равны:  $\varepsilon_{11}(t_1) = -1,07 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_{11}(t_2) = -1,08 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_{11}(t_3) = -1,16 \cdot 10^{-4}$ . Качественное отличие кривой 1 от кривых 2, 3 объясняется разным временем достижения максимальных по модулю значений величин  $\varepsilon_{11}$ . На рис. 10 представлены зависимости величин  $\sigma_{22}$  в указанном сечении  $s_2 = 0$ . Здесь кривые



согласно выше принятым обозначениям соответствуют моментам времени  $t_1 = 1,05T$ ,  $t_2 = 1,1T$ ,  $t_3 = 1,45T$ . На рис. 11, 12 приведены зависимости величин  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  при указанных углах конусности по временной координате в сечении  $s_1 = s_{10}$  (свободный край). Кривые 1 – 3 соответствуют вариантам  $\theta_1 = \pi/12$ ;  $\theta_2 = \pi/6$ ;  $\theta_3 = \pi/4$ . Как видно из представленного графического материала, на рис. 8 – 12 явно прослеживается влияние геометрии (угла конусности) на НДС исходной оболочки. С увеличением угла конусности возрастают максимальные значения величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$ .

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі про неосесиметричні коливання неоднорідної конічної оболонки змінної товщини при дії нестационарного навантаження. Дано постановку та наведено алгоритм розв'язання поставленої задачі. Система диференціальних рівнянь базується на застосуванні теорії оболонок з використанням гіпотез Тимошенка. Наведено конкретний приклад розрахунку динамічної поведінки конічних панелей змінної товщини при нестационарному навантаженні.

1. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1982. – Т. 4. – 544 с.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
4. Мейш В.Ф., Мельник В.М. Осесимметричные колебания конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетр. націон. ун-т. – 2012. Вип. 18. – С. 132 – 139.
5. Мейш В.Ф., Луговой П.З., Мельник В.М. О динамическом поведении конической оболочки переменной толщины на упругом основании // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетр. націон. ун-т. – 2012, вип. 19. – С. 219 – 225.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.
7. Свободные колебания оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
8. Aksogan O., Sofiyev A.H. Dynamic buckling of a cylindrical shell with variable thickness subject to a time – dependent external pressure varying as a power function of time // J. Sound and Vibration. – 2002. – 254, № 4. – P. 693 – 702.
9. Avramenko O.A. Stress – Strain Analysis of Nonthin Conical Shells with Thickness Varying in Two Coordinate Direction // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 3. – P. 332 – 342.
10. Gantham B.P., Ganesan N. Axisymmetric vibration of layered orthotropic spherical shells of variable thickness // Computer & Structures. – 1992. – 45, N 5 – 6. – P. 893 – 900.
11. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 193.
12. Grigorenko A.Ya., Vovkodav O.V., Yaremenko S.N. Stress – Straine State of Nonthin Spherical Shells of Variable Thickness under Localized Loads // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 315 – 321.
13. Duan W.H., Koh C.G. Axisymmetric transverse vibrations of circular cylindrical shells with variable thickness // J. Sound and Vibration. – 2008. – 317, № 3 – 5. – P. 1035 – 1041.
14. Irie T., Yamada G., Kaneko Y. Free vibration of conical shell with variable thickness // J. Sound and Vibration. – 1982. – 82, № 1. – P. 83 – 94.
15. Sivadas K.R., Ganesan N. The vibration of cantilever conical shells with variable thickness // Comp. & Structures. – 1990. – 36, N 3. – P. 559 – 566.
16. Sivadas K.R., Ganesan N. Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness // J. Sound and Vibration. – 1991. – 148, № 3. – P. 477 – 491.
17. Sivadas K.R., Ganesan N. Free vibration of circular cylindrical shells with axially varying thickness // J. Sound and Vibration. – 1991. – 147, № 1. – P. 73 – 85.
18. Sivadas K.R., Ganesan N. Axisymmetric vibration analysis of thick cylindrical shell with variable thickness // J. Sound and Vibration. – 1993. – 160, № 3. – P. 387 – 400.
19. Sofiyev A.H., Aksogan O. Buckling of a conical thin shell with variable thickness under a dynamical loading // J. Sound and Vibration. – 2004. – 270, № 4 – 5. – P. 903 – 915.
20. Wu C.P., Lee C.Y. Differential quadrature solution for the free vibration analysis of laminated conical shells with variable stiffness // Int. J. Mech. Sci. – 2001. – 43. – P. 1853 – 1869.

Поступила 12.06.2011

Утверждена в печать 03.12.2013