

Н. А. Шульга¹, Л. О. Григорьева², А. А. Кириченко²

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
ПОЛОГО ШАРА С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;*

²*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Воздухофлотский пр-т, 31, 03037, Киев, Украина
e-mail: l_grigoryeva@ukr.net*

Abstract. A numerical method for analysis of the non-stationary vibrations of piezoceramic radially polarized bodies with allowance for effect of acoustic medium. The piezoelectric vibrations of spheres are analyzed for the case of impedance boundary conditions under electric excitation. A dependence of vibrations on the ratio of the sphere thickness to its radius is established. The vibrations of sphere with the free external surface are compared with ones of the sphere immersed in water.

Key words: piezo-ceramic sphere, radial polarization, electric excitation, electro-elastic vibrations, impedance boundary conditions, numerical method.

Введение.

Пьезокерамические элементы конструкций сферической формы являются типичными активными компонентами многих устройств и широко применяются в различных областях техники (приборостроении, гидроакустике, электроакустике, ультразвуковой технологии) [1, 2, 10 и др.]. Для обеспечения надежности и выбора оптимальных условий функционирования электромеханических излучателей необходимо изучение динамического электромеханического состояния тел с учетом влияния внешней среды [1, 2, 10 и др.]. В [4, 5, 13] выполнено определение собственных частот и форм колебаний для электроупругих полых цилиндров и сфер. Задачи о распространении волн в электроупругих телах рассмотрены в [8, 11]. Нестационарные колебания двухслойной пьезокерамической сферической оболочки проанализированы в [9]. Исследования упругоэлектрических центральносимметрических и осесимметрических нестационарных колебаний пьезокерамических сфер и цилиндров в рамках пространственной теории упругости проведены в статьях [3, 6, 7, 12 – 14].

Данная работа посвящена построению численного метода решения и анализу влияния импедансного контакта с акустической средой на нестационарные колебания полого пьезокерамического поляризованного по толщине шара при электрических динамических возмущениях.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим полый поляризованный по толщине пьезокерамический шар с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки $2h$. Колебания шара описываем уравнением движения и квазистатическим уравнением для электрической индукции [1, 2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при материальных соотношениях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; & \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия накладываются только на перемещения и их скорости

$$u(r, 0) = u^0(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, t=0) = u^1(r). \quad (3)$$

Механические граничные условия при $r_0 = R - h$ и $r_1 = R + h$ примем в виде импедансных соотношений

$$\sigma_{rr}(r_i, t) + z_i \frac{\partial u}{\partial t}(r_i, t) = 0 \quad (i = 0, 1), \quad (4)$$

где z_i – удельные акустические сопротивления внешней среды.

Условия (4) позволяют приближенно учесть влияние акустической среды, что важно для задач гидроакустики [10].

Колебания шара возбуждаются электрическим потенциалом $\varphi(R \pm h, t) = \pm V(t)$, подводимым к электродированным внешним поверхностям шара $r = R \pm h$.

Начально-краевую задачу (1) – (4) сводим к безразмерному виду с помощью обозначений:

$$\begin{aligned} r &= R + x; \quad \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}; \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}; \\ \bar{D}_i &= \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}; \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}; \quad \bar{z}_i = \frac{z_i}{\sqrt{c_{00} \rho_{00}}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{33}^E$, $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{33}^S$, $t_h = h \sqrt{\rho_{00} / c_{00}}$, $\varepsilon = h / R$ – нормирующие величины (в дальнейшем знаки безразмерности опускаем).

Введение параметра кривизны ε позволяет в частном случае (при $\varepsilon = 0$) рассматривать колебания плоского пьезокерамического слоя. Ранее колебания плоского пьезокерамического слоя без учета влияния внешней среды исследованы в [12, 13].

Систему уравнений электроупругости (1), (2) представим в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial x} + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} D_r = 0; \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{13} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} u - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} u + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + (c_{11} + c_{21}) \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x} u + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Численный метод решения задачи. Для решения начально-краевой задачи (6), (7) с учетом (3), (4) построена численная схема на основе сеточных аппроксимаций и разностных схем. В интервале интегрирования $x \in [-1, 1]$ введено разбиение Ω таким образом, что крайние точки разбиения находятся на расстоянии $\Delta_x / 2$ от концов интервала, т.е. $\Omega = \{x_i = (i - 0,5)\Delta_x - 1; \quad i = 0, 1, \dots, n + 1; \quad \Delta_x = 2 / (n - 1)\}$.

Механические перемещения и электрический потенциал определим в узлах разбиения, а механические напряжения и электрическую индукцию – в центрах ячеек разбиения. Разностную форму уравнений электроупругости (6) записываем для внутренних точек разбиения; она принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (\sigma_{i+0.5}^{rr} + \sigma_{i-0.5}^{rr} - \sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} - \sigma_{i-0.5}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{\Delta x} (\sigma_{i+0.5}^{rr} - \sigma_{i-0.5}^{rr});$$

$$\frac{1}{\Delta x} (D_{i+0.5}^r - D_{i-0.5}^r) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (D_{i+0.5}^r + D_{i-0.5}^r) = 0. \quad (8)$$

Материальные соотношения (7) представим в центрах участков разбиения:

$$\sigma_{i+0.5}^{rr} = \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$\sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} = \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} \right) u_{i+1} + \left(c_{11} \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} - \frac{c_{13}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{13}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i); \quad (9)$$

$$D_{i+0.5}^r = \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{e_{33}}{\Delta x} \right) u_i - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i).$$

Значения перемещений и электрического потенциала в законтурных точках исключаем из уравнений с помощью разностной формы граничных условий.

Для интегрирования по времени вводим разбиение ω интервала времени $t \in [0, T]$ с шагом Δt . Решение получим с использованием явной разностной схемы

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (10)$$

или методом Ньюмарка

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \ddot{u}^k; \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (11)$$

где ξ – параметр схемы.

Для определения перемещений и электрического потенциала в законтурных точках используем разностную форму граничных условий. Из электрических граничных условий получаем следующие выражения: $\varphi_0 = -\varphi_1 - 2V_0(t)$; $\varphi_{n+1} = -\varphi_n + 2V_0(t)$.

Механические граничные условия (4) преобразуем к виду

$$\sigma_{0.5}^{rr,k} = -\frac{z_0}{2} (\dot{u}_1^k + \dot{u}_0^k); \quad \sigma_{n+0.5}^{rr,k} = -\frac{z_1}{2} (\dot{u}_{n+1}^k + \dot{u}_n^k). \quad (12)$$

Подставляя (9) и (11) в (12), выражаем значения перемещений в законтурных точках на $(k+1)$ -м временном слое через перемещения и электрический потенциал внутри области на этом же временном слое, а перемещения и скорости перемещений – на предыдущем слое:

$$u_0^{k+1} = - \left(\left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \frac{z_0}{2\xi\Delta t} \right) u_1^{k+1} + \frac{e_{33}}{\Delta x} (2V(t_{k+1}) + 2\varphi_1^{k+1}) - z_0 \frac{u_{0.5}^k}{\xi\Delta t} - z_0 \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}_{0.5}^k \right) \times$$

$$\times \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} + \frac{z_0}{2\xi\Delta t} \right)^{-1}; \quad (13)$$

$$u_{n+1}^{k+1} = - \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} + \frac{z_1}{2\xi\Delta t} \right) u_n^{k+1} + \frac{e_{33}}{\Delta x} (2V(t_{k+1}) - 2\phi_i^{k+1}) - z_1 \frac{u_{n+0.5}^k}{\xi\Delta t} - z_1 \frac{1-\xi}{\xi} \dot{u}_{n+0.5}^k \right) \times$$

$$\times \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{z_1}{2\xi\Delta t} \right)^{-1}.$$

При применении неявной схемы (11) на каждом шаге по времени перемещения и электрический потенциал определяем одновременно из системы алгебраических уравнений $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$, полученной путем подстановки (9), (11), (13) в (8). Здесь F^{k+1} включает в себя внешнюю нагрузку и перемещения, скорости и ускорения из предыдущего временного слоя. Задача также усложняется зависимостью перемещений в законтурных точках от перемещений и их скоростей на предыдущем слое. При использовании явной схемы (10) на $(k+1)$ -м временном слое механические перемещения u_i^{k+1} во внутренних точках области получим через значения параметров электромеханического состояния на предыдущих временных слоях, тогда как электрический потенциал определим из системы алгебраических уравнений, которую получаем из разностной формы квазистатического уравнения для электрической индукции. Перемещения в законтурных точках определяем по (13) с учетом предыдущего временного слоя.

Вычисления методом Ньюмарка проведены при значении параметра $\xi = 0,5$. Решения обоими методами совпали с точностью 99% на сетках $n = 61$, $\Delta t = 0,01$ для явной схемы и $n = 51$, $\Delta t = 0,02$ – для метода Ньюмарка. При сгущении сетки совпадение результатов улучшается.

3. Численный пример.

Рассмотрим задачу о вынужденных нестационарных колебаниях шара из керамики PZT-4 [1]

$$(c_{11}^E = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{12}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{13}^E = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad e_{31} = -5,2 \text{ Кл/м}^2; \quad e_{33} = 15,1 \text{ Кл/м}^2;$$

$$e_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}; \quad \rho = 7500 \text{ кг/м}^3)$$

с радиусом срединной поверхности $R = 4 \text{ см}$ и толщиной стенки $2h = 2 \text{ см}$, что соответствует параметру кривизны $\varepsilon = 0,25$, при нулевых начальных условиях.

Влияние внешней среды на колебания пьезоэлемента зависит от значения удельного акустического сопротивления среды. Следует отметить, что малое удельное акустическое сопротивление газов ограничивает применение магнитострикционных или пьезоэлектрических преобразователей для излучения в газообразную среду. Хотя при работе магнитострикционного излучателя в воздухе можно получить относительно большие амплитуды колебаний поверхности (порядка нескольких микрон), однако такой вибратор не может отдать сколько-нибудь значительную акустическую мощность [2].

Рассмотрим случай, когда полый пьезокерамический шар опущен в воду, удельное акустическое сопротивление которой $z_1 = 150 \cdot 10^4 \text{ Па} \times \text{с/м}$ (для воздуха примем $z_0 = 0$).

При переходе к безразмерным величинам имеем

$$\bar{z}_i = \frac{z_i}{\sqrt{c_{33}^E \rho}} = \frac{150 \cdot 10^4}{\sqrt{11,5 \cdot 10^{10} \cdot 7500}} = 0,05.$$

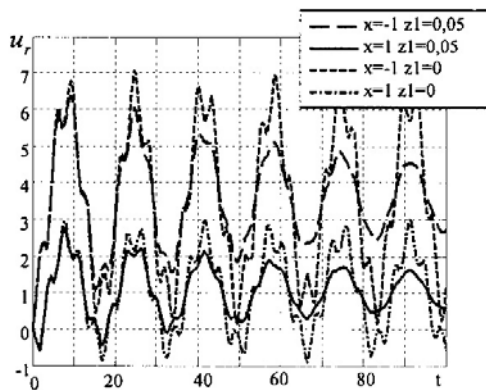


Рис. 1

Исследуем реакцию шара на приложение к электродированным внешним поверхностям разности электрического потенциала $2V(t) = 2V_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Представленные результаты получены при $V_0 = 1$. При переходе к размерной задаче полученные результаты умножаются на безразмерное значение V_0 , а потом используются выражения (5). На рисунках приведены результаты в безразмерном виде.

На рис. 1 для сравнения представлена динамика изменения радиальных перемещений u_r внешних поверхностей сферы с учетом акустической среды ($z_1 = 0,05$) и без него ($z_1 = 0$). Видно, что колебания сферы, опущенной в воду, заметно угасают, тогда как в воздухе такого эффекта не наблюдается. На рассмотренном интервале времени, соответствующем $100t_h = 2,55 \cdot 10^{-2}$ с, амплитуда колебаний внешней поверхности сферы уменьшилась почти в два раза. Значения максимальных перемещений на внутренней поверхности шара больше, чем в два раза превышают перемещения внешней поверхности.

Из граничных условий следует, что радиальные напряжения максимальны около срединной поверхности. Рис. 2 иллюстрирует изменение радиальных напряжений при $x = 0$ для (а) – шара в акустической среде ($z_1 = 0,05$) и (б) – без ее учета ($z_1 = 0$). Механические напряжения возникают в сечении мгновенно согласно распределению электрического потенциала в момент приложения нагрузки, и достигают значения $\bar{\sigma}_{rr\max} = 1,3$. На рассматриваемом интервале напряжения в шаре в акустической среде практически угасают, тогда как на рис. 2, б амплитуда колебаний не уменьшается. На поверхности $x = 1$ для сферы (а) радиальные напряжения не превышают 5% от значений напряжений на срединной поверхности.

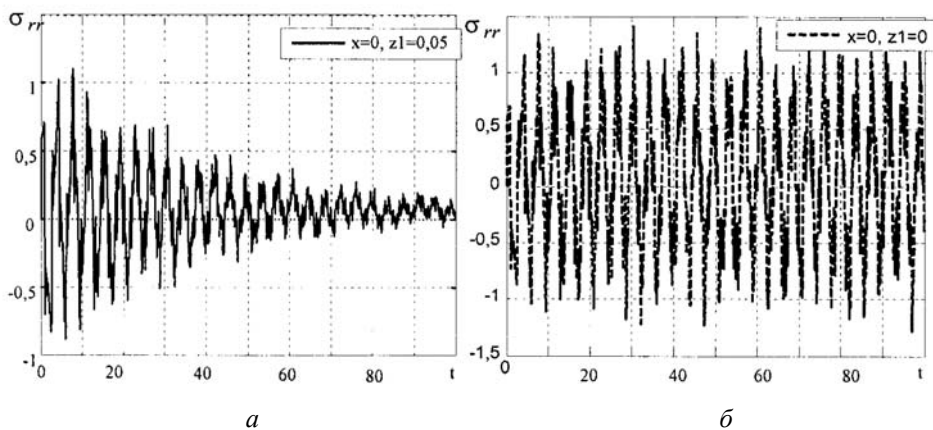


Рис. 2

Окружные напряжения на внешних поверхностях шара приведены на рис. 3. Также в шаре с учетом акустической среды наблюдается уменьшение амплитуды колебаний напряжений и существенное сглаживание кривых. Окружные напряжения заметно превышают радиальные напряжения. Максимальные окружные напряжения возникают на внутренней поверхности шара и на рассматриваемом интервале уменьшаются практически в два раза.

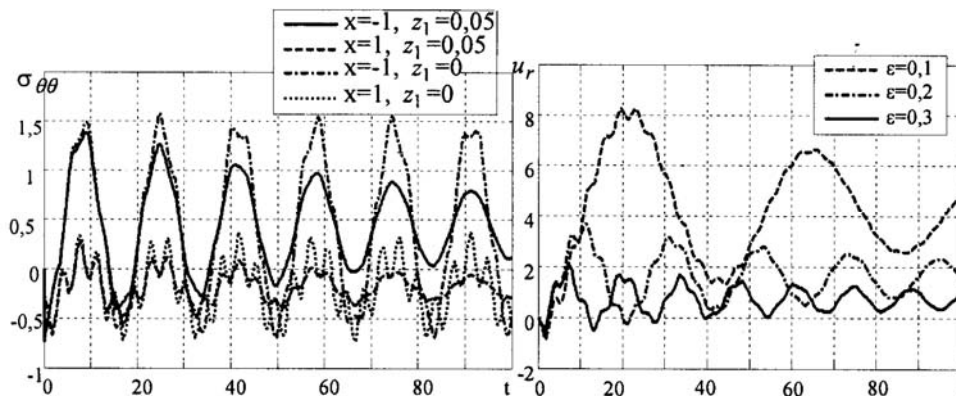


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 4 иллюстрирует перемещения внешней излучающей поверхности $x=1$ сфер с разным параметром $\varepsilon = h/R$ в акустической среде. Здесь для подробного анализа полученных результатов необходим переход к размерной задаче, так как обезразмеривание для линейных величин проводится относительно половины толщины стенки шара. Принимая внешний радиус $R+h=5\text{ см}$ для всех сфер одинаковым, при $\varepsilon = 0,1$ получаем $h = 0,45\text{ см}$ и $u_{\max} = 3,6\bar{V}_0(\text{см})$; при $\varepsilon = 0,2$ $h = 0,83\text{ см}$ и $u_{\max} = 3,2\bar{V}_0(\text{см})$; при $\varepsilon = 0,3$ имеем $h = 1,25\text{ см}$, $u_{\max} = 2,5\bar{V}_0(\text{см})$. Таким образом, с возрастанием толщины стенки шара перемещения внешней поверхности уменьшаются. Колебательные движения стенок рассмотренных тел соответствуют времени пробега электроупругой волны толщины стенки шара.

Ранее установлено, что максимальные напряжения возникают в окружном направлении при $x=-1$. На рис. 5 приведены окружные напряжения на внутренней поверхности сферических тел с разными параметрами $\varepsilon = h/R$. Здесь максимальные значения зависят только от материала, т.е. можно проводить непосредственное сравнение по максимальным значениям. Видно, что с увеличением толщины стенки (уменьшением внутреннего радиуса) напряжения возрастают практически пропорционально изменению толщины.

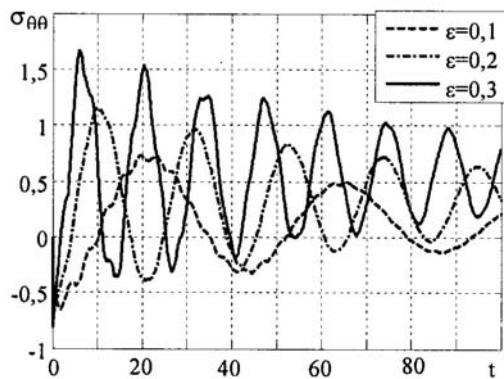


Рис. 5

Заключение.

Построенная в работе численная схема дает возможность эффективно решать динамические задачи электроупругости для пьезокерамического полого шара с импедансными граничными условиями. Проведен анализ закономерностей распространения электроупругих нестационарных колебаний при электрическом возмущении.

Изложенные результаты свидетельствуют о том, что закономерности распространения колебаний в электроупругих телах с учетом влияния акустической среды существенно отличаются от аналогичных закономерностей, полученных без учета внешней среды. Наблюдается значительное уменьшение амплитуды колебаний и существенное сглаживание полученных кривых динамического электромеханического состояния. Причиной этого является взаимодействие полей разной физической природы, что проявляется и в математическом описании электроупругих задач, и в приведенных результатах.

РЕЗЮМЕ. Розвинуто чисельний метод аналізу нестационарних коливань п'єзокерамічних радіально поляризованих тіл сферичної форми з врахуванням впливу акустичного середовища. Проведено дослідження коливань п'єзокерамічних сфер з імпедансними граничними умовами при електричному збудженні; встановлено залежність коливань від відношення товщини до радіусу сфери; проведено порівняння коливань сфери з вільними зовнішніми поверхнями з коливаннями сфери, зануреної у воду.

1. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990. – 228 с.
2. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин.— К.: Наук. думка, 2008. –270 с.
3. Шульга М.О., Григор'єв С.А. Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – № 81. – С. 159 – 166.
4. Berg M., Hagedorn P., Gutschmidt S. On the dynamics of piezoelectric cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 2004. – 274, N 1 – 2. – P. 91 – 109.
5. Chiroiu V.L., Munteanu L. On the free vibrations of a piezoceramic hollow sphere // Mechanics Research Communications. – 2007. – 34, N 2. – P. 123 – 129.
6. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Dynamic response of a pyroelectric hollow sphere under radial deformation // Eur. J. Mech.-A/Solids. – 2003. – 22, N 4. – P. 617 – 631.
7. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Analytical solution for the electroelastic dynamics of a nonhomogeneous spherically isotropic piezoelectric hollow sphere // Arch. of Appl. Mech. – 2003. – 73, N 6 – 7. – P. 49 – 62.
8. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Radially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 641 – 649.
9. Kubenko V.D., Yanchevskii I.V. Vibrations of a Nonclosed Two-Layer Spherical Electroelastic Shell under Impulsive Electromechanical Loading // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 303 – 314.
10. Mazon W.P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. –1981. – 70, N 6. – P. 1561 – 1566.
11. Storozhev V.I. Propagation of Electroelastic Waves in Multilayer Piezoelectric Cylinders with a Sector Notch // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 194 – 202.
12. Shulga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation / In: Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers (New York). – 2011. – P. 179 – 204.
13. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 2. – P. 177 – 185.
14. Wang H.M., Ding H.J. Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem // Eur. J. of Mechanics – A/Solids. – 2006. – 25, N 6. – P. 965 – 980.

Утверждена в печать 08.02.2010

Поступила 03.12.2013