

**Л.Г. Сильченко, А.А. Мовчан, Т.Л. Сильченко**

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

*Институт прикладной механики РАН,  
Ленинский проспект, 32А, 119991, Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru*

**Abstract.** A method of solving is proposed for the problem of stability of cylindrical shell made of alloy with shape memory, when the alloy undergoes the direct martensite transformation under action of uniform axial compression, torsional moment and uniform external pressure. It is shown that the additional structural changes, which occur owing to buckling, decrease essentially the critical loads for thin-wall shells. The allowance for the additional structural changes is also important for the shells of middle thickness.

**Key words:** alloy with shape memory, stability of cylindrical shell, uniform axial compression, torsional moment, uniform external pressure, phase and structural changes.

#### **Введение.**

Уникальные термомеханические свойства сплавов с памятью формы (СПФ) связаны с происходящими в этих материалах термоупругими фазовыми и структурными превращениями. При охлаждении через определенный температурный интервал в СПФ происходит прямое фазовое превращение из аустенитного состояния в мартенситное. При прямом превращении существенно уменьшаются упругие модули СПФ, и может накапливаться неупругая деформация. Прямое превращение может быть вызвано не только уменьшением температуры, но и ростом интенсивности напряжений при фиксированной температуре. При активном изотермическом нагружении СПФ, находящегося в мартенситном состоянии наблюдается рост неупругих деформаций, связанный со структурным превращением мартенсита (так называемая "мартенситная неупругость"). При нагреве через соответствующий температурный интервал происходит обратное превращение, фазовые и структурные деформации полностью или частично снимаются (явление памяти формы).

Процесс потери устойчивости элементов из СПФ осложнен по сравнению с соответствующими упругими процессами [4] наличием дополнительных фазовых и структурных превращений при выпучивании. Экспериментально установлено [2], что прямое и обратное фазовые превращения, происходящие под действием постоянной сжимающей нагрузки, могут вызвать потерю устойчивости пластинки-полоски из никелида титана. В [7, 13, 15] предложены различные подходы (концепции) к описанию явления потери устойчивости, вызванного фазовыми переходами в СПФ. В процессе выпучивания на вогнутой поверхности, в общем случае, образуется область, в которой действующие сжимающие напряжения возрастают, вызывая дополнительное прямое превращение и дополнительный структурный переход, сопровождающиеся ростом неупругих деформаций (зона дополнительного фазового и структурного перехода). На выпуклой стороне, в общем случае, образуется зона разгрузки, где нет ни фазового, ни структурного перехода и рост неупругих деформаций отсутствует. В рамках концепции «фиксированной нагрузки» [7] возможные возмущения внешних сил не учитываются. Граница между зонами дополнительного фазового и структурного перехода и разгрузки заранее не известна и должна находиться в процессе решения задачи устойчивости.

Если предположить, что внешняя нагрузка может испытывать не известные заранее малые возмущения, то решение задачи устойчивости для СПФ становится неопределенным, т.к. для этих материалов расположение границы между зонами дополнительного фазового и структурного перехода и разгрузки испытывает конечные изменения при малых вариациях внешней нагрузки. В частности, возможны такие малые возмущения нагрузки, при которых все сечение рассматриваемого элемента находится в зоне дополнительных фазовых и структурных переходов (гипотеза «повсеместного фазового и структурного перехода» [7]). В этой ситуации значение критической нагрузки имеет наименьшее, из всех возможных, значение. Такой подход аналогичен гипотезе об отсутствии разгрузки при анализе устойчивости упруго-пластических тел [1, 5, 19]. В то же время возможны такие малые возмущения внешних нагрузок, при которых все сечение изделия находится в зоне разгрузки, и дополнительные неупругие деформации отсутствуют (гипотеза «фиксированного фазового и структурного состояния» [7]). В этой ситуации учитывается лишь падение упругих модулей при прямом фазовом превращении, критические нагрузки принимают наибольшие возможные значения. Для случая обратного фазового перехода формулировки упомянутых выше гипотез уточнены в [15].

В рамках упомянутых выше концепций решена задача [3] о потере устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ; в [12] – для стержня из СПФ; в [9-11,13,14] исследована потеря устойчивости прямоугольной, круглой и кольцевой пластин из СПФ; в [16] решена задача об устойчивости скручиваемого вала из СПФ. В указанных выше работах [3, 9 – 14] анализ проводился в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [6], не учитывающей нелинейность зависимости деформаций от напряжений при фазовом превращении и возможность структурного перехода при выпучивании. В [18, 20] экспериментально исследована потеря устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки из СПФ, квазистатически и динамически нагружаемой монотонно возрастающей осевой сжимающей силой, вызывающей в материале оболочки эффект сверхупругости. В [20] проведен численный анализ соответствующего процесса.

В [7, 15, 17] проведен учет структурного превращения в процессе выпучивания при анализе устойчивости стержней [7, 15] и круглых пластин [17], претерпевающих фазовые превращения. Задачи решены в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [8, 15].

В данной работе в рамках модели [8, 15] рассмотрена потеря устойчивости замкнутой круговой цилиндрической оболочки из СПФ, испытывающей прямое мартенситное превращение под действием постоянных осевой сжимающей силы, крутящего момента или внешнего давления. Решения получены в рамках концепции «повсеместного фазового и структурного перехода» и сравниваются с данными, соответствующими концепции «фиксированного фазового и структурного состояния».

### **§1. Постановка задачи и определяющие соотношения.**

Рассматриваемая замкнутая цилиндрическая оболочка из СПФ имеет длину  $L$ , радиус  $R$  и постоянную толщину  $h$ . Она отнесена к правой ортогональной криволинейной системе координат, оси  $x_1, x_2$  которой расположены в срединной поверхности оболочки, причём  $x_1$  направлена вдоль образующей оболочки,  $x_2$  – в окружном направлении, а ось  $x_3$  – по нормали к срединной поверхности в сторону её выпуклости. Начало координат расположено на одном из торцов оболочки. Полагаем, что в невозмущенном процессе в оболочке реализовано однородное безмоментное напряжённое состояние, соответствующее действию равномерного сжатия, кручения или внешнего давления. Нагруженная в аустенитном состоянии оболочка охлаждается через интервал температур прямого превращения. Разыскиваем минимальные постоянные нагрузки, которые в указанном процессе охлаждения могут привести к бифуркации формы равновесия.

Задачу устойчивости решаем в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [8, 15], сводящаяся к следующим соотношениям:

$$q = 0,5(1 - \cos(\pi t)), \quad t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}; \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S};$$

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \Phi_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{(2)};$$

$$\Delta K = (K_2 - K_1) / (K_1 K_2); \quad \Delta G = (G_2 - G_1) / (G_1 G_2); \quad 6Z(\sigma) = \Delta K \sigma_{kk}^2 + \Delta G \sigma_i^2;$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} \varepsilon_0 q + \varepsilon_{ij}^{(2)}; \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{kk}^{(1)} = \frac{\sigma_{kk}}{K}; \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}; \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_1} + \frac{1-q}{K_2}; \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_1} + \frac{1-q}{G_2}; \quad (1.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(2)} = \omega_{ij}^+ dq + \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \Phi_2'(\sigma_i) d\sigma_i. \quad (1.3)$$

Здесь  $q$  – объемная доля мартенситной фазы,  $T$  – температура;  $\sigma_{ij}, \sigma_i$  – тензор напряжений и его интенсивность; штрихом обозначены компоненты девиаторов;  $\Delta S$  – разница объемных плотностей энтропии аустенита и мартенсита при отсчетной температуре;  $\varepsilon_0, \delta_0$  – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения и интенсивность соответствующей кристаллографической деформации;  $M_s^0, M_f^0$  – температуры начала (нижний индекс  $s$ ) и окончания (нижний индекс  $f$ ) прямого фазового перехода в отсутствие напряжений, те же символы с верхним индексом  $\sigma$  – учитывают наличие напряжений;  $K, G$  – утроенный объемный модуль и модуль сдвига СПФ; нижними индексами 1, 2 обозначены значения этих модулей для мартенситного и аустенитного состояний;  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$  – полные, упругие и фазово-структурные деформации (температурные деформации в силу их малости не учитываются);  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Первое слагаемое в правой части (1.3) отвечает за изменение девиаторной части фазовых деформаций при прямом превращении, происходящем при условиях  $M_f^\sigma < T < M_s^\sigma$ ,  $dq > 0$ ,  $0 < q < 1$ , второе – связано со структурным превращением и отлично от нуля лишь при  $d\sigma_i > 0$ .

Материальная функция  $\Phi_1(\sigma_i)$  трактуется как интегральная функция распределения микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное состояние). В данной работе это распределение принимаем Гауссовым с нулевым математическим ожиданием и квадратичным уклонением  $\sigma_1$ :

$$\Phi_1(\sigma_i) = \Phi^*(\sigma_i / \sigma_1), \quad \Phi^*(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt.$$

Символом  $\Phi_2'(\sigma_i)$  обозначим производную от функции  $\Phi_2(\sigma_i)$ , связанную с интегральной функцией распределения микронапряжений в мартенситном со-

стоянии СПФ  $\Phi^*$ , которую также предполагаем Гауссовой:  $\Phi_2(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left( \Phi^* \left( \frac{\sigma_i - \sigma^*}{\sigma_2} \right) + \Phi^* \left( \frac{\sigma_i + \sigma^*}{\sigma_2} \right) \right)$ . Здесь  $\sigma_2$  – соответствующее квадратичное уклонение,  $\sigma^*$  – пороговое напряжение [8]. Материальная функция  $f(q) = 1/(1+q)$  определяет соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при прямом превращении.

## §2. Докритическое и возмущенное состояния.

Предполагаем, что вплоть до момента выпучивания в рассматриваемой цилиндрической оболочке реализуется безмоментное однородное и неизменное поле напряжений. Интегрируя (1.3) при постоянных напряжениях с учетом (1.1) (1.2) для докритического состояния получим

$$\varepsilon_{ii}^{(1)}(q) = \frac{\sigma_{ii} - \mu(q)\sigma_{jj}}{E(q)}, \quad \varepsilon_{12}^{(1)}(q) = \frac{\sigma_{12}}{2G(q)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(2)}(q) = \left( \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \Phi_1(\sigma_i) + \varepsilon_0 \delta_{ij} \right) q.$$

Здесь и далее  $i, j = 1, 2$ ; если в одной формуле встречаются индексные обозначения  $ii, jj$ , то  $i \neq j$ , причем по повторяющемуся индексу суммирование не производится.

Для описания возмущенного напряженно-деформированного состояния используется гипотеза прямых нормалей (для полных деформаций), которой с учетом (1.1), (1.2) можно придать вид

$$\varepsilon_{ii}^0 - x_3 \kappa_{ii} = \frac{\sigma_{ii} - \mu(q)\sigma_{jj}}{E(q)} + \varepsilon_{ii}^{(2)}; \quad \varepsilon_{12}^0 - x_3 \kappa_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G(q)} + \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^0$  – полные деформации срединной поверхности оболочки,  $\kappa_{ij}$  – “кривизны”,  $E, \mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, связанные с константами (1.2), т.е.

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{1}{E_2} + q\Delta E; \quad \mu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1; \quad \Delta E = \frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2},$$

причем  $E_1, E_2$  – модули Юнга мартенсита и аустенита.

Варьируя равенства (2.1) относительно критического состояния, используя (1.1) – (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ii} - x_3 \delta \kappa_{ii} &= \frac{\delta \sigma_{ii} - \mu(q) \delta \sigma_{jj}}{E(q)} + g_{ii} \delta q + \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma'_{ii}}{\sigma_i} q \Phi'_2(\sigma_i) \delta \sigma_i U(\delta \sigma_i); \\ \delta \varepsilon_{12} - x_3 \delta \kappa_{12} &= \frac{\delta \sigma_{12}}{2G(q)} + g_{12} \delta q + \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_i} q \Phi'_2(\sigma_i) \delta \sigma_i U(\delta \sigma_i); \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$g_{ii} = \sigma_{ii} \Delta E - \sigma_{jj} \left( \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2} \right) + \delta_0 \Sigma_{ij} \Phi_1(\sigma_i) + \varepsilon_0; \quad g_{12} = \frac{1}{2} \sigma_{12} \left( \Delta G + 3 \frac{\delta_0}{\sigma_i} \Phi_1(\sigma_i) \right),$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ii} - 0,5 \sigma_{jj}}{\sigma_i};$$

$$\delta q = \psi(q) k^* x U, \quad U = H(x), \quad x = F \delta \sigma_i + (\sigma_{kk} \Delta K / 3 + \varepsilon_0) \delta \sigma_{kk}$$

$$(F = F(\sigma_i, q) = \delta_0 [\sigma_i \Phi_1'(\sigma_i) + \Phi_1(\sigma_i) + q f(q) \sigma_i (\Phi_2'(\sigma_i) - \Phi_1'(\sigma_i))] + \sigma_i \Delta G / 3;$$

$$\delta \sigma_i = (\Sigma_{12} \delta \sigma_{11} + \Sigma_{21} \delta \sigma_{22} + 3 \sigma_{12} \delta \sigma_{12} / \sigma_i), \quad \psi(q) = \pi \sqrt{q(1-q)}, \quad k^* = [(M_1 - M_2) \Delta S]^{-1},$$

где  $H(x)$  – ступенчатая функция Хэвисайда, штрихом обозначена производная). Здесь и ниже все величины без знака вариации относятся к докритическому состоянию, со знаком вариации – к возмущённому. Для вариаций деформаций срединной поверхности оболочки и кривизн использованы соотношения

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11}^0 &= \delta u_{1,1}; \quad \delta \varepsilon_{22}^0 = \delta u_{2,2} + \frac{\delta w}{R}; \quad \delta \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2} (\delta u_{1,2} + \delta u_{2,1}); \quad \delta \kappa_{11} = \delta w_{,11}; \\ \delta \kappa_{22} &= \delta w_{,22} - \frac{1}{R} \delta u_{2,2}; \quad \delta \kappa_{12} = w_{,12} - \frac{1}{R} \delta u_{2,1}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta u_i, \delta w$  – вариации смещений точек срединной поверхности оболочки вдоль осей  $x_1, x_3$ .

Разрешая (2.2) относительно вариаций напряжений, получаем для них выражения

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{1 + (\xi_{33} + \xi_{jj})H}{1 + \xi H} (\delta \varepsilon_{ii} - x_3 \delta \kappa_{ii}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\mu(1 + \xi_{33}H) - \xi_{ij}H}{1 + \xi H} (\delta \varepsilon_{jj} - x_3 \delta \kappa_{jj}) - \frac{(\xi_{i3} + \mu \xi_{j3})H}{1 + \xi H} \frac{\delta \varepsilon_{12} - x_3 \delta \kappa_{12}}{(1 + \mu)} \right]; \\ \delta \sigma_{12} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ - \frac{(\xi_{31} + \mu \xi_{32})H}{1 + \xi H} (\delta \varepsilon_{11} - x_3 \delta \kappa_{11}) - \frac{(\xi_{32} + \mu \xi_{31})H}{1 + \xi H} (\delta \varepsilon_{22} - x_3 \delta \kappa_{22}) + \right. \\ &+ \left. (1 - \mu) \left( 1 - \frac{\xi_{33}H}{1 + \xi H} \right) (\delta \varepsilon_{12} - x_3 \delta \kappa_{12}) \right]. \end{aligned}$$

$$\xi_{ii} = \Psi_{ij} e + \delta_0 E(q) q (\Sigma_{ij})^2 \Phi_2'(\sigma_i), \quad \xi_{ij} = \Psi_{ji} e + \delta_0 E(q) q \Sigma_{ij} \Sigma_{ji} \Phi_2'(\sigma_i),$$

$$\xi_{i3} = 3 \left[ eF + \delta_0 E(q) q \Sigma_{ij} \Phi_2'(\sigma_i) \right] \sigma_{12} / \sigma_i;$$

$$\xi_{3i} = 2 \Psi_{ij} g + 3 \delta_0 G(q) q \Sigma_{ij} \Phi_2'(\sigma_i) \sigma_{12} / \sigma_i, \quad \xi_{33} = 6 F g \sigma_{12} / \sigma_i + 9 \delta_0 G(q) q (\sigma_{12} / \sigma_i)^2 \Phi_2'(\sigma_i);$$

$$\xi = \xi_{33} + (\xi_{11} + \xi_{22} + \mu(\xi_{12} + \xi_{21})) / (1 - \mu^2), \quad \Psi_{ij} = F \Sigma_{ij} + \sigma_{kk} \Delta K + \varepsilon_0,$$

$$e = E(q) \psi(q) g_{ii} k^*, \quad g = G(q) \psi(q) g_{12} k^*.$$

В рамках рассматриваемой здесь концепции повсеместного дополнительного фазового и структурного перехода полученные выражения для вариаций напряжений справедливы в каждой точке сечения оболочки. Вариации моментов  $\delta M_{ij}$  и усилий  $\delta N_{ij}$  определяем по формулам

$$\delta M_{ii} = -D(\eta_{jj} \delta \kappa_{ii} + \eta_{3ij} \delta \kappa_{jj} - 2 \eta_{ij3} \delta \kappa_{12}), \quad \delta M_{12} = -D(\eta_{3132} \delta \kappa_{11} + \eta_{3231} \delta \kappa_{22} + 2 \eta_{33} \delta \kappa_{12}); \quad (2.3)$$

$$\delta N_{ii} = B(\eta_{jj} \delta \varepsilon_{ii}^0 + \eta_{3ij} \delta \varepsilon_{jj}^0 - 2 \eta_{ij3} \delta \varepsilon_{12}^0), \quad \delta M_{12} = D(\eta_{3132} \delta \varepsilon_{11}^0 + \eta_{3231} \delta \varepsilon_{22}^0 + 2 \eta_{33} \delta \varepsilon_{12}^0); \quad (2.4)$$

$$D = D(q) = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; B = B(q) = \frac{Eh}{1-\mu^2}; \eta_{ij} = \frac{1 + \xi_{33} + \xi_{jj}}{1 + \xi}; \eta_{3ij} = \frac{\mu(1 + \xi_{33}) - \xi_{ij}}{1 + \xi};$$

$$\eta_{ij3} = \frac{\xi_{i3} + \mu\xi_{j3}}{2(1 + \xi)(1 + \mu)}; \eta_{3i3j} = -\frac{\xi_{3i} + \mu\xi_{3j}}{1 + \xi}; \eta_{33} = \frac{1 - \mu}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{33}}{1 + \xi} \right).$$

Если в формулах (2.3), (2.4) положить  $\xi = \xi_{ij} = 0$ , то получим выражения, отвечающие гипотезе «фиксированного фазового и структурного состояний».

Линеаризованные уравнения равновесия рассматриваемой оболочки в вариациях относительно докритического состояния имеют вид

$$\delta N_{11,1} + \delta N_{21,2} + N_{12}\delta u_{1,12} + N_{22}(\delta u_{1,22} - \delta w_{,1}/R) = 0;$$

$$\delta N_{12,1} + \delta N_{22,2} + (\delta M_{12,1} + \delta M_{22,2})/R + N_{11}\delta u_{2,11} + N_{21}(\delta u_{2,12} + \delta w_{,1}/R) = 0; \quad (2.5)$$

$$\delta M_{11,11} + \delta M_{21,21} + \delta M_{12,12} + \delta M_{22,22} - \delta N_{22}/R + N_{11}w_{,11} + 2N_{12}(\delta w_{,12} - \delta u_{2,1}/R) +$$

$$+ N_{22}(\delta w_{,22} - \delta u_{2,2}/R) = 0.$$

Подстановка зависимостей (2.3), (2.4) в уравнения (2.5) приводит к системе трёх дифференциальных уравнений равновесия в смещениях

$$\eta_{22}\delta u_{,11} + a_{11}^{(1)}\delta u_{,12} + a_{02}^{(1)}\delta u_{,22} - \eta_{123}\delta u_{2,11} + a_{11}^{(2)}\delta u_{2,12} + \eta_{3231}\delta u_{2,22} + a_{10}\delta w_{,1} + \eta_{3231}\delta w_{,2}/R = 0;$$

$$\eta_{3132}\delta u_{,11} + b_{11}^{(1)}\delta u_{,12} - \eta_{213}\delta u_{,22} + b_{20}^{(2)}\delta u_{2,11} + b_{11}^{(2)}\delta u_{2,12} + b_{02}^{(2)}\delta u_{2,22} +$$

$$+ b_{30}\delta w_{,11} + b_{21}\delta w_{,12} + b_{12}\delta w_{,122} - Rd\eta_{11}\delta w_{,222} + b_{10}\delta w_{,1} + \eta_{11}\delta w_{,2}/R = 0;$$

$$c_{10}^{(1)}\delta u_{,11} + c_{01}^{(1)}\delta u_{,12} + c_{30}^{(2)}\delta u_{2,11} + c_{21}^{(2)}\delta u_{2,12} + c_{12}^{(2)}\delta u_{2,22} + c_{03}^{(2)}\delta u_{2,222} + c_{10}^{(2)}\delta u_{2,1} + c_{01}^{(2)}\delta u_{2,2} +$$

$$+ \eta_{22}\delta w_{,1111} + c_{31}\delta w_{,1112} + c_{22}\delta w_{,1122} + c_{13}\delta w_{,1222} + \eta_{11}\delta w_{,2222} + c_{20}\delta w_{,11} + c_{11}\delta w_{,12} +$$

$$+ c_{02}\delta w_{,22} + c_{00}\delta w = 0 \quad (2.6)$$

$$a_{11}^{(1)} = s_{12} - \eta_{3132} - \eta_{123}, \quad a_{02}^{(1)} = s_{22} + \eta_{33}, \quad a_{11}^{(2)} = \eta_{312} + \eta_{33}, \quad a_{10} = (\eta_{312} - s_{22})/R,$$

$$b_{11}^{(1)} = \eta_{321} + \eta_{33};$$

$$b_{20}^{(2)} = s_{11} + (1 + 2d)\eta_{33}, \quad b_{02}^{(2)} = (1 + d)\eta_{11}, \quad b_{30} = -Rd\eta_{3132}, \quad b_{11}^{(2)} = (1 + d)(\eta_{3231} - \eta_{213}) + s_{12};$$

$$b_{21} = -Rd(\eta_{321} + 2\eta_{33}), \quad b_{12} = Rd(2\eta_{213} - \eta_{3231}), \quad b_{10} = (\eta_{3231} + s_{12})/R, \quad c_{10}^{(1)} = Rd\eta_{321},$$

$$c_{01}^{(1)} = -Rd\eta_{213};$$

$$c_{30}^{(2)} = 2\eta_{123}/R, \quad c_{03}^{(2)} = -\eta_{11}/R, \quad c_{21}^{(2)} = (\eta_{312} + 4\eta_{33}),$$

$$c_{12}^{(2)} = (\eta_{3231} + 2\eta_{213}), \quad c_{10}^{(2)} = b(2s_{12} - \eta_{213});$$

$$c_{01}^{(2)} = b(\eta_{11} + s_{22}), \quad c_{20} = -\sigma_{11}h/D, \quad c_{31} = 2(\eta_{3132} - \eta_{123}), \quad c_{22} = \eta_{312} + \eta_{321} + 4\eta_{33},$$

$$c_{11} = -2\sigma_{12}h/D;$$

$$c_{13} = 2(\eta_{3231} - \eta_{213}), \quad c_{02} = -\sigma_{22}h/D, \quad c_{00} = \eta_{11}b/R, \quad s_{ij} = h\sigma_{ij}/B, \quad d = D/(BR^2),$$

$$b = B/(RD).$$

### 3. Метод решения и числовые результаты.

Решение определим в перемещениях. В случае свободного опирания торцов оболочки используем тригонометрические разложения вариаций смещений по продольной и окружной координатам вида

$$\begin{aligned} \delta u_1(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\alpha_m x_1) (\delta u_{1mn}^S \sin(\beta_n x_2) + \delta u_{1mn}^C \cos(\beta_n x_2)); \\ \delta u_2(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\alpha_m x_1) (\delta u_{2mn}^S \sin(\beta_n x_2) + \delta u_{2mn}^C \cos(\beta_n x_2)); \\ \delta w(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\alpha_m x_1) (\delta w_{mn}^S \sin(\beta_n x_2) + \delta w_{mn}^C \cos(\beta_n x_2)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введены обозначения:  $\alpha_m = m\pi / L$ ,  $\beta_n = n / R$ . Представления (3.1), содержащие и синусы и косинусы окружной координаты, позволяют получить решение, обладающее «винтовой» формой, характерной для потери устойчивости при кручении. Для построения приближённого решения применяем процедуру Галёркина. После подстановки разложений (3.1) с конечными верхними пределами суммирования ( $M$  по продольной и  $N$  по окружной координатам) в уравнения (2.6), домножения на соответствующие координатные функции и интегрирования по области, занимаемой срединной поверхностью оболочки, получена разрешающая система однородных линейных уравнений порядка  $6M(N+1)$ . Можно показать, что для каждого конкретного числа полуволн в окружном направлении  $n$  может быть указана система порядка  $3M$ , для определения соответствующих собственных значений. Полученные собственные значения минимизируем по  $n$ .

В качестве числового примера рассмотрена потеря устойчивости цилиндрической оболочки из СПФ, характеризуемого следующими значениями безразмерных констант, соответствующими никелиду титана:

$$E_1 / E_2 = 1/3; \mu_1 = 0,48; \mu_2 = 0,33; \delta_0 = 0,08; \varepsilon_0 = 0,0034; \sigma_2 / E_2 = 8,3 \cdot 10^{-4};$$

$$\sigma_1 / E_2 = 2,0 \cdot 10^{-3}; \sigma^* / E_2 = 1,9 \cdot 10^{-3}; E_2 / [\Delta S(M_s^0 - M_f^0)] = 4100.$$

На всех приведенных ниже графиках (рис. 1 – 4) по оси ординат отложены безразмерные значения критических напряжений, отнесенные к критическому напряжению осесимметричного выпучивания упругой цилиндрической оболочки с мартенситными значениями модулей при однородном сжатии. Пунктирными линиями представлены графики безразмерных критических напряжений полученных в рамках концепции «фиксированного фазового и структурного состояния». Две нижние группы сплошных линий отражают решения в рамках концепции «повсеместного дополнительного фазового превращения» (верхние линии) и «повсеместного дополнительного фазового и структурного превращения» – нижние линии. Подчёркнутые номера, проставленные рядом с кривыми, показывают количество полуволн в окружном направлении у соответствующих форм потери устойчивости, а без подчёркивания – в направлении образующей оболочки.

Рис. 1, 2 относятся к случаю осевого сжатия для значения  $h/R = 0,05$  и  $h/R = 0,01$ , соответственно. Там же для сопоставления

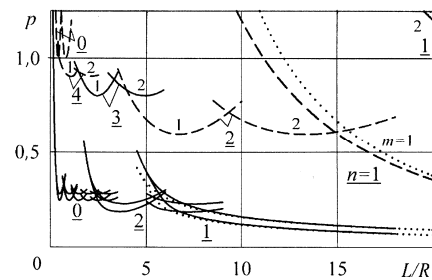


Рис. 1

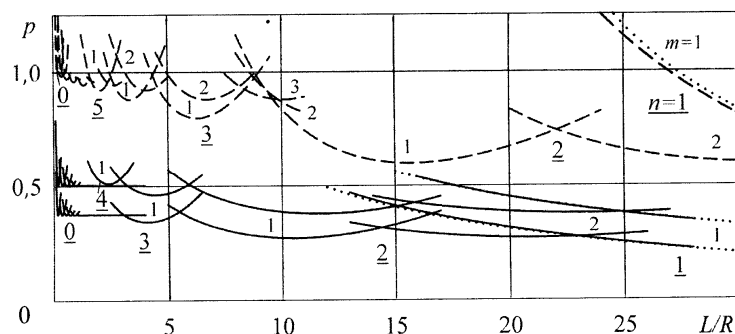


Рис. 2

представлены три точечные кривые. Они получены на основе решений для стержня с кольцевым поперечным сечением из СПФ и с теми же значениями площади и момента инерции сечения, что и рассматриваемая оболочка. Как видно, оболочечные решения с  $n = 1, m = 1$  очень хорошо согласуются с соответствующими балочными решениями.

Сравнение данных рис. 1 и 2 показывает, что чем тоньше оболочка, тем больше разница между двумя группами нижних сплошных линий, т.е. тем большее значение имеет учет возможного структурного превращения при выпучивании. В то же время для более тонких оболочек меньше разница между двумя группами пунктирных и сплошных кривых, т.е. учет дополнительного фазового превращения становится менее актуален.

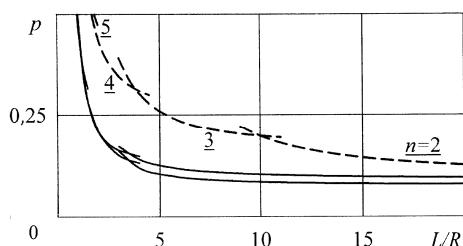


Рис. 3

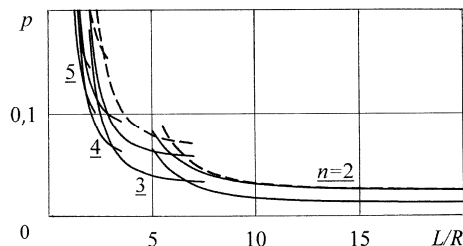


Рис. 4

На рис. 3 представлены результаты решения задачи устойчивости оболочки с  $h/R = 0,05$ , подверженной однородному кручению. Здесь по оси ординат отложено безразмерное касательное напряжение. На рис. 4 представлена зависимость безразмерного критического окружного напряжения  $p$ , обусловленного действием внешнего давления на оболочку с  $h/R = 0,05$  от ее относительной длины. Как видно, для случая кручения весьма существенен учет происходящего при выпучивании дополнительного фазового перехода, тогда как учет дополнительного структурного превращения мало меняет результат. В то же время при действии внешнего давления (для тех же значений геометрических параметров) – наоборот, т.е. учет фазового перехода мало существенен, а структурное превращение обязательно следует учитывать.

### Заключение.

Из анализа полученных решений следует, что учет дополнительных фазовых и структурных деформаций, возникающих при выпучивании, существенно снижает критические нагрузки потери устойчивости цилиндрических оболочек из СПФ при прямом мартенситном превращении. Учет дополнительного структурного превращения наиболее актуален для тонкостенных оболочек, а учет дополнительного фазового превращения важен для оболочек средней толщины. Аналогичные выводы получены ранее для стержней [7] и круглых пластин [17].



РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод розв'язку задачі стійкості циліндричної оболонки з сплаву з пам'яттю форми, матеріал якої зазнає прямого мартенситного фазового перетворення під дією рівномірного осьового стиску, моменту кручення і рівномірного зовнішнього тиску. Показано, що врахування додаткового структурного перетворення, що відбувається в процесі випучення, суттєво зменшує критичні навантаження для тонкостінних оболонок. Врахування додаткового фазового перетворення в процесі випучення є важливим для оболонок середньої товщини.

**Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 11-01-00503 а.**

1. Гузь А.Н. Устойчивость упруго-пластических тел // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 8. – С. 11 – 19.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 6. – С. 82 – 89.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 2. – С. 132 – 144.
4. Guz A.N. Stability of elastic bodies under uniform compression (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 3. – P. 241 – 293.
5. Lila D.M., Martynuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 2. – P. 224 – 233.
6. Movchan A.A. Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape memory alloys // Mech. Solids. – 1995. – 30, N 1. – P. 186 – 194.
7. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Effect of structural transformation and deformation nonlinearity on the stability of a shape memory alloy rod // Mech. Solids. – 2010. – 45, N 6. – P. 876 – 884.
8. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions // Mech. Solids. – 2010. – 45, N 3. – P. 406 – 416.
9. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Stability of an annular plate of a shape memory alloy // J. Appl. Mech. and Tech. Phys. – 2011. – 52, N 2. – P. 279 – 287.
10. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. Analytical solution of the coupled buckling problem for a plate from a shape memory alloy subjected to inverse martensite formation // Mech. Solids. – 2004. – 39, N 5. – P. 134.
11. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. Buckling of a circular plate made of a shape memory alloy due to a reverse thermoelastic martensite transformation // Mech. Solids. – 2008. – 43, N 1. – P. 100 – 111.
12. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. Buckling of a rod undergoing direct or reverse martensite transformation under compressive stresses // J. Appl. Mech. and Tech. Phys. – 2003. – 44, N 3. – P. 442 – 449.
13. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. The stability of a circular plate of shape memory alloy during a direct martensite transformation // J. Appl. Math. Mech. – 2006. – 70, N 5. – P. 785 – 795.
14. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. The stability of a plate of shape memory alloy in a direct thermoelastic phase transition // J. Appl. Math. Mech. – 2004. – 68, N 1. – P. 53 – 64.
15. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. Taking into account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys // Mech. Solids. – 2011. – 46, N 2. – P. 194 – 203.
16. Sil'chenko L.G., Movchan A.A. Stability of a shaft made from a shape memory alloy undergoing martensite transitions under the action of torque strength and an axial force // J. Mach. Manufact. and Reliability. – 2009. – 38, N 2. – P. 154 – 160.
17. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Movchan I.A. Structural transformation taken into account during the analysis of the stability of a round plate with shape memory // J. Mach. Manufact. and Reliability. – 2010. – 39, N 5. – P. 452 – 458.
18. Nemat-Nasser S., Choi J.Y., Isaacs J.B., Lisher D.W. Quasi-static and dynamic buckling of thin cylindrical shape memory alloy shells // J. Appl. Mech. – 2006. – 73, N 5. – P. 825 – 833.
19. Shanley F.R. Inelastic column theory // J. Aeronaut. Sci. – 1946. – 14, N 5. – P. 261 – 267.
20. Tang Z., Li D. Quasi-static axial buckling behavior of TiNi thin-walled cylindrical shells // Thin-Walled Struct. – 2012. – 51. – P. 130 – 138.

Поступила 17.04.2012

Утверждена в печать 26.06.2013