

А. Я. Григоренко<sup>1</sup>, И. А. Лоза<sup>2</sup>

**НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛЫХ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРАХ  
С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ, ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ  
В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ**

*<sup>1</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru.*

*<sup>2</sup>Национальный транспортный университет, ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина;  
e-mail: dukeigor@mail.ru*

**Abstract.** A problem on propagation of non-axisymmetric waves in layered hollow piezoceramic cylinders is considered for the layers polarizes in the axial direction. To solve this problem, the effective numerical-analytical method is used. The initial three-dimensional problem of the theory of electroelasticity, which is described by partial differential equations, is reduced to the boundary value problem for ordinary differential equations. This is made by representation of components of elasticity tensor, vectors of displacements, electric induction and electrostatic potential by the combination of standing waves in the circumferential direction and running waves in the axial direction. The last problem is solved by the stable method of discrete orthogonalization combined with the method of incremental search. The results of numerical analysis of dispersion relations are shown for the wide range of changing the geometrical characteristics of layered cylinders with piezoceramic layers.

**Key words:** hollow multilayered piezoceramic cylinder, three-dimensional problem of the theory of electroelasticity, running waves.

**Введение.**

Пьезокерамические волноводы в виде кругового цилиндра широко распространены в акустоэлектронике. Поэтому исследованию волновых процессов, происходящих в пьезокерамических телах цилиндрической формы и распространению акустоэлектрических волн в однородных цилиндрических волноводах, посвящено значительное количество работ. Осесимметричная задача для сплошного и полого волноводов исследована в работах [1, 3, 16], а неосесимметричная задача – в работах [6, 17].

Для слоистых цилиндров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условиям сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. В работах [4, 5, 7, 9, 12 – 15, 18] проведено исследование волновых процессов в неоднородных структурах. Для решения этой задачи в работе [4] использован метод, основанный на разложении искомых функций в степенные ряды. Однако сложности в его реализации не позволили получить подробную количественную информацию. Для решения рассматриваемой задачи предложен эффективный численно-аналитический подход, с успехом применявшийся для решения аналогичных задач для упругих тел [2, 8, 10 – 11].

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Представим полную система уравнений, описывающую данную задачу. Уравнения неосесимметричных движений  $i$  – го слоя в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют такой вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}; \quad (1)$$

уравнения электростатики для  $i$ -го слоя:

$$\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} = 0; \quad E_r^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; \quad E_\theta^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^i}{\partial \theta}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z}; \quad (2)$$

соотношения Коши для  $i$ -го слоя:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{r\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r};$$

$$2\varepsilon_{rz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\theta z}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{jk}^i$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho^i$  – плотность материала;  $u_j^i$  – компоненты вектора перемещений;  $D_j^i$  – компоненты вектора электрической индукции;  $E_j^i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\phi^i$  – электростатический потенциал;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для  $i$ -го слоя пьезокерамического слоя, поляризованного в осевом направлении, принимаем в виде

$$\sigma_{rr}^i = c_{11}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i; \quad \sigma_{\theta\theta}^i = c_{12}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i;$$

$$\sigma_{zz}^i = c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{33}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_z^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{\theta z}^i - e_{15}^i E_\theta^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{15}^i E_r^i;$$

$$\sigma_{r\theta}^i = 2c_{66}^i \varepsilon_{r\theta}^i; \quad D_z^i = e_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{33}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i; \quad (4)$$

$$D_r^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{11}^i E_r^i; \quad D_\theta^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_\theta^i,$$

где  $c_{jk}^i$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{jk}^i$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Материальные соотношения для  $i$ -го слоя изотропного слоя

$$\sigma_{rr}^i = \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \quad (5)$$

$$\sigma_{zz}^i = \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i;$$

$$\sigma_{r\theta}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{r\theta}^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{\theta z}^i.$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ):

поверхности свободны от внешних усилий:  $(\sigma_{rr}^i = \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{rz}^i = 0)$  и покрыты электродами, которые закорочены:  $\varphi = 0$ . На поверхностях контакта  $r = r_i$  имеют место условия совместной работы  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= \sigma_{rr}^{i+1}; \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{r\theta}^{i+1}; \sigma_{rz}^i = \sigma_{rz}^{i+1}; \varphi^i = \varphi^{i+1}; \\ u_r^i &= u_r^{i+1}; u_\theta^i = u_\theta^{i+1}; u_z^i = u_z^{i+1}; D_r^i = D_r^{i+1}.\end{aligned}\quad (6)$$

В дальнейшем верхний индекс  $i$  будем опускать. Выбираем в качестве основных неизвестных функции, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и условия на ограничивающих тело поверхностях. Разрешающая система уравнений для данного класса задач принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \\ &+ \left( \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\Delta_4}{c_{11}} + c_{66} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{c_{12}}{rc_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \left( \frac{\Delta_5}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\ &- \left( \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta - \left( \frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \left( \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \\ &- \left( \frac{c_{55}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_r - \frac{c_{12}}{rc_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{c_{66}} \sigma_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \left( \frac{\varepsilon_{11}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} \varphi - \frac{\Delta_5}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} u_z - \\ &- \left( \frac{\Delta_5}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} D_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_r \\ &\left( \Delta = c_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2; \quad \Delta_1 = c_{13} (c_{11} - c_{12}); \quad \Delta_2 = c_{13}^2 \varepsilon_{33} - c_{11} c_{33}; \quad \Delta_3 = c_{13} \varepsilon_{13} - c_{11} e_{33}; \right. \\ &\left. \Delta_4 = c_{11}^2 - c_{12}^2; \quad \Delta_5 = e_{13} (c_{11} - c_{12}); \quad \Delta_6 = c_{13} \varepsilon_{33} + e_{13}^2 \right).\end{aligned}\quad (7)$$

## §2. Методика решения задачи.

Для решения данной задачи используем численно-аналитический подход. Представим компоненты тензоров напряжения и векторов смещения, электрической индукции и электростатического потенциала в виде стоячих волн в окружном направлении и бегущих волн в осевом направлении. В результате исходная трехмерная задача

теории электроупругости, описываемая уравнениями в частных производных, сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученную задачу решаем с использованием устойчивого численного метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Используя метод разделения переменных, а также замкнутость цилиндрического тела в направлении окружной координаты, разрешающие функции представим в виде стоячих волн в окружном направлении и бегущих – в осевом направлении:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) &= \sigma_{rr}(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = \sigma_{r\theta}(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); \\ \sigma_{rz}(r, \theta, z, t) &= \sigma_{rz}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad \varphi(r, \theta, z, t) = h\sqrt{\lambda/\varepsilon_0}\varphi(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\ u_r(r, \theta, z, t) &= hu_1(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \quad u_\theta(r, \theta, z, t) = hu_2(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); \quad (8) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= hu_3(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad D_r(r, \theta, z, t) = D_r(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t).\end{aligned}$$

Используя разложение (8), систему (7), граничные и смежные условия, получаем краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = A(x, \Omega)\mathbf{R}; \quad B(-1) = 0; \quad B(1) = 0; \quad \mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_\theta, u_z, D_r\}; \quad (9)$$

$$A = \|a_{lm}\| \quad (l, m = 1, 2, \dots, 8).$$

Для ненулевых элементов матрицы  $A$  имеем формулы

$$\begin{aligned}a_{11} &= \tilde{x} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right); \quad a_{12} = m\tilde{x}; \quad a_{13} = k; \quad a_{14} = \frac{k\tilde{x}\Delta_5}{c_{11}}; \quad a_{15} = \left( \frac{\tilde{x}^2\Delta_4}{c_{11}} - \Omega^2 \right); \quad a_{16} = \frac{\Delta_4}{c_{11}} m\tilde{x}^2; \\ a_{17} &= -\frac{k\tilde{x}\Delta_1}{c_{11}}; \quad a_{21} = -\frac{m\tilde{x}c_{12}}{c_{11}}; \quad a_{22} = -2\tilde{x}; \quad a_{24} = \left( \frac{\Delta_5}{c_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) m\tilde{x}; \quad a_{25} = -\frac{m\tilde{x}^2\Delta_4}{c_{11}}; \\ a_{26} &= \frac{m^2\tilde{x}^2\Delta_4}{c_{11}} + k^2c_{55} - \Omega^2; \quad a_{27} = m\tilde{x} \left( \frac{\Delta_5}{c_{11}} + c_{55} \right); \quad a_{31} = -\frac{kc_{13}}{c_{11}}; \quad a_{33} = -\tilde{x}; \\ a_{34} &= \left( m^2\tilde{x}^2\tilde{e}_{15} - k^2\frac{\Delta_3}{c_{11}} \right); \quad a_{35} = -\frac{k\tilde{x}\Delta_1}{c_{11}}; \quad a_{36} = m\tilde{x} \left( \frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right); \\ a_{37} &= m^2\tilde{x}^2c_{55} - \frac{k^2\Delta_2}{c_{11}} - \Omega^2; \quad a_{41} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta}; \quad a_{48} = -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta}; \quad a_{51} = \frac{1}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{55} = -\frac{\tilde{x}\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}}; \\ a_{56} &= \frac{m\tilde{x}\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{57} = \frac{k\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{62} = \frac{1}{c_{66}}; \quad a_{65} = -m\tilde{x}; \quad a_{66} = \tilde{x}; \quad a_{73} = \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta}; \quad a_{75} = -k; \quad a_{78} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta}; \\ a_{81} &= -\frac{k\tilde{e}_{13}}{c_{11}}; \quad a_{84} = -\left( m^2\tilde{x}^2\tilde{e}_{11} + \frac{k^2\Delta_6}{\tilde{c}_{11}} \right); \quad a_{85} = -\frac{k\tilde{x}\Delta_5}{c_{11}}; \\ a_{86} &= \left( \tilde{e}_{15} + \frac{\Delta_5}{\tilde{c}_{11}} \right) m\tilde{x}; \quad a_{87} = m^2\tilde{x}^2\tilde{e}_{15} - \frac{k^2\Delta_3}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{88} = -\tilde{x}\end{aligned}$$

$$\left( \Omega = \omega h\sqrt{\rho/\lambda}; \quad \tilde{c}_{ij} = c_{ij}/\lambda; \quad \tilde{e}_{ij} = e_{ij}/\sqrt{\varepsilon_0\lambda}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0; \right.$$

$$\left. x = (r - R_0)/h; \quad \varepsilon = h/R_0; \quad \tilde{x} = \varepsilon/(1 + \varepsilon x); \right.$$

$h$  – половина толщины цилиндра;  $\rho$  – плотность материала цилиндра;  $R_0$  – радиус срединной поверхности;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ).

Граничные условия представим в виде:  $B_1 \mathbf{R}(-1) = 0, B_2 \mathbf{R}(1) = 0,$

где матрицы  $B_1$  и  $B_2$  имеют такой вид:

$$B_1 = B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### §3. Числовые результаты и их анализ.

Ниже представим результаты численного анализа. На рис. 1 показана зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа  $\zeta = kh/\pi$  (при этом значение  $m = 1, \varepsilon = 0,25$ ). Цилиндр состоит из трех слоев. Толщины внешних слоев равны  $h/2$ ; толщина внутреннего слоя равна  $h$ . Внешний и внутренний слои – стальные со следующими характеристиками:  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $\nu = 0,28$ ;  $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 имеет характеристики:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2; e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2;$$

$$e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2; \varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 730; \varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 635; \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Здесь для кривых введены обозначения, принятые в работе [7]. При  $\varepsilon = 0$  и  $k = 0$  приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Так, для однослойного цилиндра из металла имеем следующие формулы для частот:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_m}} = 0; 2,905; 5,81; \dots; n = 0, 1, 2 \dots;$$

$$V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_m}} = 0; 1,606; 3,211; \dots; n = 0, 1, 2 \dots;$$

Для однослойного цилиндра из пьезокерамики PZT 4:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{c_{11}/\rho_n} = 0; 2,138; 4,277; \dots; n = 0, 1, 2 \dots; \quad W(2n+1) = 0,925; 2,859; \dots;$$

$$W(2n) = \pi n \sqrt{(c_{55} + e_{15}^2/\varepsilon_{11})/\rho_n} = 0; 1,913; 3,826; \dots; n = 0, 1, 2 \dots;$$

$$V(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{c_{66}/\rho_n} = 0; 1,003; 2,007; \dots; n = 0, 1, 2 \dots.$$

Поскольку частота слоистого цилиндра ограничена сверху соответствующей частотой для сплошного металлического цилиндра, а снизу – частотой для сплошного пьезокерамического цилиндра, для слоистого цилиндра будем использовать аналогичные обозначения.

Ниже числовые результаты представлены в виде графиков и таблиц. На рис. 1 сплошными линиями показаны ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного цилиндра такой же геометрии из пьезокерамики PZT 4. Из приведенного рисунка видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к «ужесточению» материала, т. е. к повышению значений собственных частот.

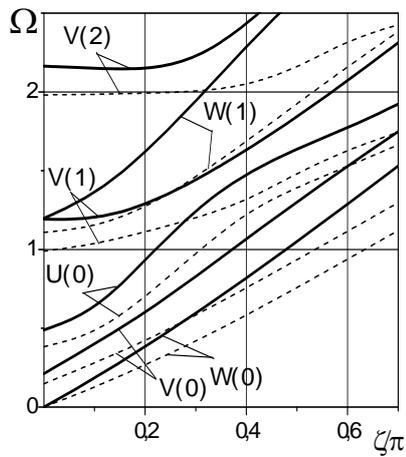


Рис. 1

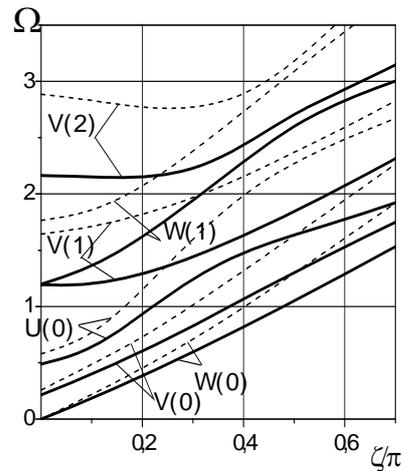


Рис. 2

На рис. 2 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа  $\zeta = kh/\pi$ . Сплошными линиями также обозначены ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, а пунктирной – для однослойного стального цилиндра. Как видно из приведенного рисунка, в этом случае значения собственных частот для слоистого цилиндра меньше соответствующих частот для стального цилиндра. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого шара лежит в «коридоре» между собственной частотой для однослойного цилиндра из пьезокерамики и частотой для однослойного цилиндра из стали. Это иллюстрирует рис. 3. Здесь сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики, штрих-пунктирной – для цилиндра из стали (материал и геометрия цилиндра соответствует данным, принятым ранее).

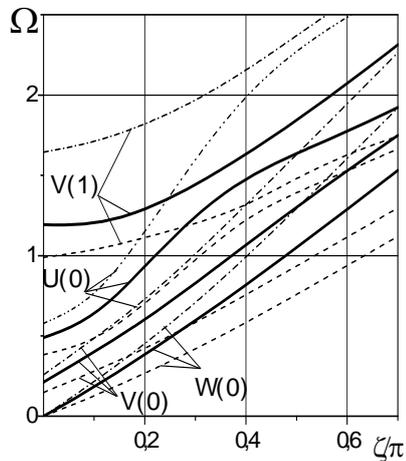


Рис. 3

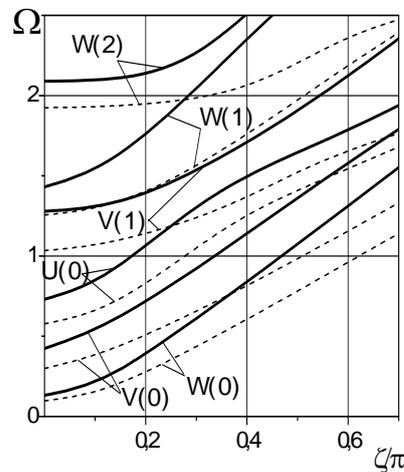


Рис. 4

На рис. 4 представлена также зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения  $m = 2$ . Материал и геометрия цилиндра такие же, как и для рис. 1. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики PZT 4. На рис. 5 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения  $m = 2$ . Материал и геометрия цилиндра такие же, как и для рис. 2. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из стали.

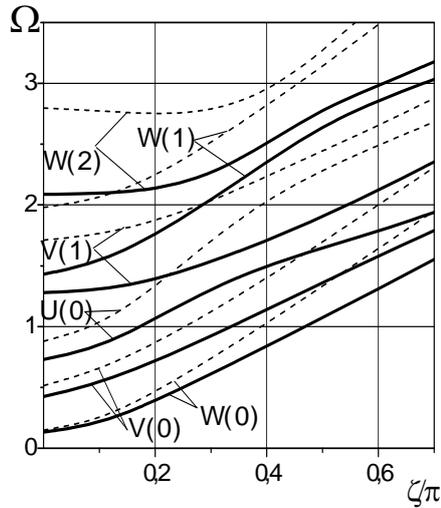


Рис. 5

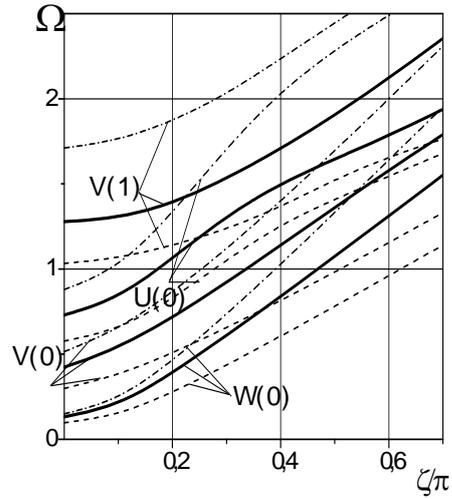


Рис. 6

На рис. 6 выполнено совмещение данных рис. 4 и 5 для первых четырех частот.

Как известно, краевая задача (8), (9) математически соответствует задаче о свободных неосесимметричных колебаниях слоистого цилиндра с шарнирным опиранием на торцах. Рассмотрим трехслойный цилиндр со слоями, аналогичными рассмотренному выше цилиндру, с внутренним радиусом  $R_{внутр.} = 3$ , внешним –  $R_{внешн.} = 5$  и длиной –  $L = 10$  безразмерных единиц. При таком выборе геометрических характеристик значение  $\varepsilon = h/R_0 = 0,25$  совпадает со значениями, принятыми для решения предыдущей задачи, результаты которых приведены на рис. 1 – 6. Кроме того, необходимо провести аналогичные исследования для значений  $m = 0, m = 3, m = 4, \dots$ .

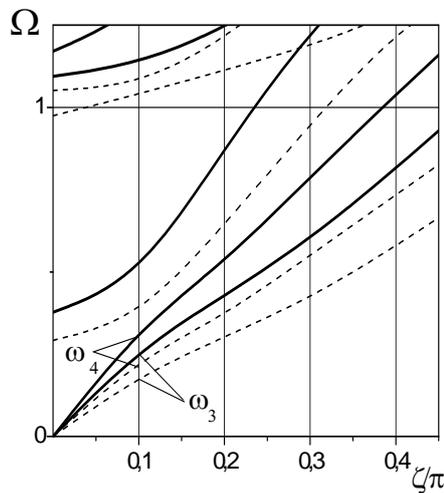


Рис. 7

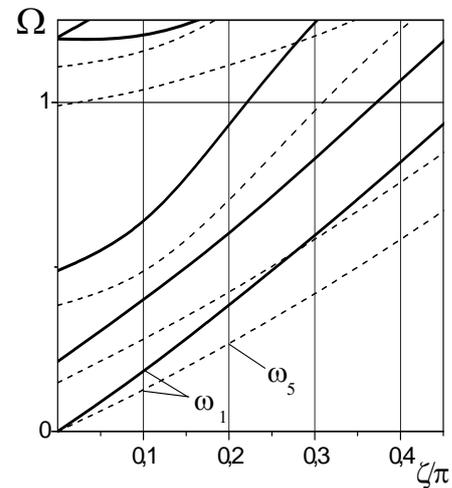


Рис. 8

Анализ частотного спектра показывает, что для определения первых пяти собственных частот достаточно четырех первых значений  $m$ :  $m = 0, m = 1, m = 2$  и  $m = 3$ . Результаты проведенных исследований представлены на рис. 7 – 10 для соответствующих значений  $m$ . На рисунках сплошные линии соответствуют дисперсионным кривым для неоднородного цилиндра, а пунктирной – для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4.

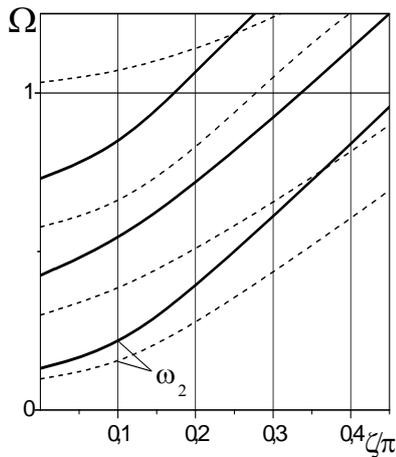


Рис. 9

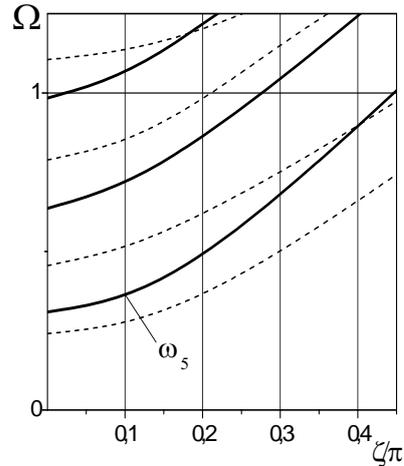


Рис. 10

Значения собственных частот будут лежать на пересечении соответствующих дисперсионных ветвей и значений  $\zeta = 0,1; 0,2; 0,3 \dots$ . Следует их лишь расположить в порядке возрастания. В таблице представлены числовые значения первых пяти частот для случая трехслойного цилиндра и сплошного пьезокерамического цилиндра. Показано также количество полуволн в окружном направлении ( $m$ ) и волн в осевом направлении, ( $n$ ) а также, к какой относительной погрешности ( $\Delta$ ) при вычислении собственных частот приведет игнорирование неоднородности. Вариант 1 соответствует многослойному цилиндру, а вариант 2 – однородному цилиндру из пьезокерамики PZT 4.

№ част.	Вариант 1	$m$	$n$	Вариант 2	$m$	$n$	$\Delta, \%$
1	0,1784	1	1	0,1235	1	1	30,8
2	0,1973	2	1	0,1422	2	1	27,9
3	0,2656	0	1	0,1835	0	1	30,9
4	0,3294	0	1	0,2347	0	1	28,7
5	0,3477	3	1	0,2665	1	2	23,4

Как видно из таблицы, первая собственная частота не является собственной частотой осесимметричных колебаний. Только лишь третья и четвертая собственные частоты являются частотами осесимметричных колебаний. При этом третья частота является частотой продольных колебаний, а четвертая – частотой крутильных колебаний. Собственные частоты, полученные в данной работе для сплошного цилиндра из пьезокерамики PZT 4, полностью совпадают с данными, полученными на основании подхода, разработанного в работе [2]. Естественно, что для проведения такого анализа требуется значительно больший объем работ. Однако, это компенсируется тем, что на основании анализа, проведенного в данной работе, кроме собственных частот получена также информация о формах колебаний.

**Р Е З Ю М Е .** Дано розв'язок задачі про поширення неосесиметричних хвиль у шаруватих порожнистих п'єзокерамічних циліндрах з шарами, поляризованими в осьовому напрямі. Запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Початкова тривимірна задача теорії електропружності в частинних похідних у випадку представлення компонентів тензора пружності, компонент векторів переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу комбінацією стоячих хвиль в коловому напрямі та бігучих хвиль в осьовому напрямі зведена до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях. Отриману задачу розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу дисперсійних відношень в широкому діапазоні зміни геометричних характеристик шаруватих циліндрів з п'єзокерамічними шарами.

1. Григоренко А.Я., Лоза И.А., Шульга Н.А. Распространение осесимметричных волн в полом пьезо-керамическом цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3. – С. 35 – 39.
2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Ивина Н.Ф., Касаткин Б.А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27 – 32.
4. Лоза И.А., Медведев К.В., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в слоистых цилиндрах // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 3 – 6.
5. Ambadar A., Ferris C.D. Wave propagation in piezoelectric two-layered cylindrical shell with hexagonal symmetry. Some application for long bone // J. A. Soc. Amer. – 1965. – 63, N 3. – P. 781 – 792.
6. Berg M., Hagedorn P., Gutschmidt S. On the dynamics of piezoelectric cylindrical shells // J. of Sound and Vibration, 274, N 1 – 2, 6, July 2004. – P. 91 – 109.
7. Dai H. L., Hong, L., Fu Y. M., Xiao, X. Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder // Appl. Math. Modeling. – 2010. – 34. – P. 343 – 357.
8. Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical Solution of Bending Problems for Rectangular Plates // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 1. – P. 81 – 94.
9. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. Non-Axisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Piezoceramic Radially Polarized Layeres // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6 – P. 641 – 649.
10. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basic of different models. – К.: Akadempіodika, 2009. – 549 p
11. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. State and Dynamical Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Thickness (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 193.
12. Heyliger P. R., Brooks S. Exact Solution for Piezoelectric Laminates in Cylindrical Bending // J. Appl. Mech. – 1994. – 63, N 4 – P. 903 – 910.
13. Heyliger P. R., Ramirez G. Free vibrations of laminated circular piezoelectric plates and discs // J. Sound and Vibration. – 2000. – 229, N 4. – P. 935 – 956.
14. Hussein M., Heyliger P.R. Discrete Layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibration. – 1996. – 192, N 5. – P. 995 – 1013.
15. Kharouf N., Heyliger P.R. Axisymmetric Free Vibrations of Homogeneous and Laminated Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibration. – 1994. – 174, N 4. – P. 539 – 561.
16. Paul H.S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric  $\beta$ -quartz // Arch. Mech. Stosow. – 1962. – N 5. – P. 127 – 134.
17. Paul H.S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – 40, N 5. – P. 1077 – 1080.
18. Paul H.S., Nelson V.K., Vazhapadi K. Flexural vibration of piezoelectric composite cylinder // J. Acoust. Soc. Am. – 1996. – 99, N 1. – P. 309 – 313.

Поступила 26.07.2010

Утверждена в печать 26.06.2013