

А. Н. ГУЗЬ

**О ПОСТРОЕНИИ ОСНОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СЖАТИИ ВДОЛЬ ТРЕЩИН (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. П.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

**Abstract.** An analysis of the main results on construction of the foundations of the fracture mechanics of materials in case of compression along cracks as applied to the homogeneous materials with cracks and inhomogeneous (composite layered) materials with interface cracks is presented. The results are considered which are obtained in the framework of elastic, plastic and visco-elastic models of deformable bodies. This review article consists of three parts.

In the first part, a creation of the basic conception is discussed which determines the start (beginning) of the fracture under consideration as the mechanism of local stability loss of an equilibrium state near the cracks located in a single plane or parallel planes. The fracture criterion and the basic problems arising in the branch of fracture mechanics under consideration are also formulated. Two basic approaches to construct the foundations of the fracture mechanics under consideration are presented. *The first approach*, so-called «beam approximation», is based on the various applied theories of stability of thin-walled systems (including the hypotheses of Bernoulli, Kirchhoff – Love, Timoshenko type, and so on). This approach has a substantially approximate nature and introduces an irreducible error in determination of the stresses. *The second approach* is based on the basic relationships and methods of the three-dimensional (3D) linearized theory of stability of deformable bodies for finite and small subcritical strains. This approach does not introduce the major errors, which are characteristic of the first approach, and allows to obtain the results with accuracy accepted in the mechanics.

The second part is devoted to a short analysis of the main results obtained by *the first* approximate approach and a more detailed analysis of the main results obtained by *the second* rigorous approach (in the framework of the 3D linearized theory of stability of deformable bodies for finite and small subcritical strains). In case of *the second* rigorous approach, the exact solutions are discussed for the interacting cracks in a single plane, the construction of solutions is shown for the interacting cracks located in parallel planes and analysis of results is carried out for the particular cases of engineering structural materials.

In the third part, the new results are presented for the interacting cracks in parallel planes in the case of *very small distances* between these parallel planes including a distance tending to zero (in an asymptotic sense). These results may be considered as a transition from *the second* approach (3D linearized theory of elastic stability) to *the first* approach (so-called «beam approximation»). In such a way, an accuracy of the results of *the first* approach is evaluated and a structure of boundary conditions near the cracks tip (in the framework of «beam approximation») is established.

**Key words:** compression along cracks, basic conception, local stability loss, fracture criterion, two basic approaches, «beam approximation», 3D linearized theory of stability of deformable bodies, main results, analysis of main mechanical effects.

**1. Общие вопросы.**

В первом разделе в краткой форме излагаются сведения, относящиеся к анализируемому явлению, к сформировавшейся концепции при их описании и анализе, к разработанным двум принципиально различным подходам к исследованию рассматриваемых явлений, к формулировке и постановке трех основных задач и к классификации рассматриваемого раздела механики разрушения как неклассической проблеме

механики разрушения. *Целью первого раздела является представление вышеуказанных сведений без применения соответствующего математического аппарата, что дает возможность ознакомиться с рассматриваемыми проблемами представителям широких кругов специалистов.*

### **1.1. Введение.**

В настоящее время общепринято считать, что механика разрушения имеет начало с общеизвестной публикации Гриффитса [124], которая была опубликована в 1920 г.; отмеченный подход Гриффитса позволяет строить механику разрушения материалов и элементов конструкций, когда в вершине трещины возникают напряжения растяжения и сдвига. Развитию механики разрушения в вышеуказанном смысле посвящены практически неподдающиеся учету и соответствующему анализу весьма многочисленные публикации в периодических изданиях и в трудах конференций, достаточно большое число монографий фундаментального и прикладного характера, относящихся к различным аспектам рассматриваемой проблемы, и многочисленные коллективные издания энциклопедического характера.

Учитывая возможности подхода Гриффитса [124] (в окрестности вершины трещины возникают напряжения растяжения или сдвига – что является характерной и достаточно типичной ситуацией), построение механики разрушения при сжатии вдоль трещин является отдельной проблемой (разделом) механики разрушения, требующей разработки соответствующих подходов. Отмеченная ситуация возникает в однородных материалах при сжатии вдоль трещин, расположенных в одной плоскости, и при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях или поверхностях. Отмеченная ситуация также возникает в слоистых композитных материалах при сжатии вдоль слоев, поскольку в границе раздела свойств материала (interface), как правило, возникает достаточно много трещин или других нарушений адгезии. Отмеченная ситуация является составной частью более общего (при различных нагрузках) явления, которое получило название расслоения или отслоения (delamination) в слоистых композитных материалах и которое, как правило, инициируется трещиной; в ряде случаев для указанного явления применяется название «развитие расслоений или отслоений», анализ такой терминологии и соответствующих явлений также рассматривается в настоящей обзорной статье. В настоящее время общепринято считается, что первой публикацией в рассматриваемом отдельном разделе механики разрушения является статья Обреимова [203], опубликованная в 1930 г., в которой исследовано отслоение слоя слюды, вызванное наличием торцевой межслоевой трещины.

Настоящая обзорная статья посвящена анализу построения и основных полученных результатов механики разрушения при сжатии вдоль трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, для однородных материалов и при сжатии вдоль слоев с межслоевыми (interfacial) трещинами для слоистых композитных материалов; рассматривается также анализ результатов механики расслоения или отслоения (delamination) слоистых композитов, когда они возникают при сжатии и инициируются наличием трещин. При подготовке статьи не ставилась цель – дать исчерпывающий анализ всех публикаций по рассматриваемой проблеме, частично и по тем соображениям, что таких публикаций весьма много и они рассредоточены по различным научным направлениям фундаментального, технологического и инженерного характера. При подготовке статьи ставилась более определенная и достаточно ответственная цель – дать анализ постановок задач и разработанных подходов для их решения, а также провести анализ полученных основных решений рассматриваемых задач с точки зрения их достоверности и соответствия обычно принятой точности в механике деформируемого твердого тела.

**1.2. Анализируемые явления и общая концепция.** Рассмотрим анализируемые явления в механике разрушения однородных (металлы, сплавы, высокоэластические, керамические материалы и т.п.) и слоистых композитных материалов, а также формирование общей концепции для их исследования.

**1.2.1. Анализируемые явления в однородных и слоистых композитных материалах.** Рассмотрим явления, которые исследуются в механике разрушения однородных и слоистых композитных материалов с плоскими трещинами, расположенными в параллельных плоскостях, при сжатии вдоль этих плоскостей. Необходимо отметить, что ниже в настоящем пункте представлены основные расчетные схемы лишь примени-

тельно к плоской задаче с целью сокращения изложения; аналогичные расчетные схемы (случаи), естественно, имеют место и применительно к пространственной задаче.

Вначале рассмотрим однородные изотропные и ортотропные материалы; при этом в случае ортотропных материалов будем считать, что оси симметрии свойств материала совпадают с горизонтальной и вертикальной осями на всех рисунках рис. 1.1, а трещины на рис. 1.1, а – д изображены «жирными» линиями.

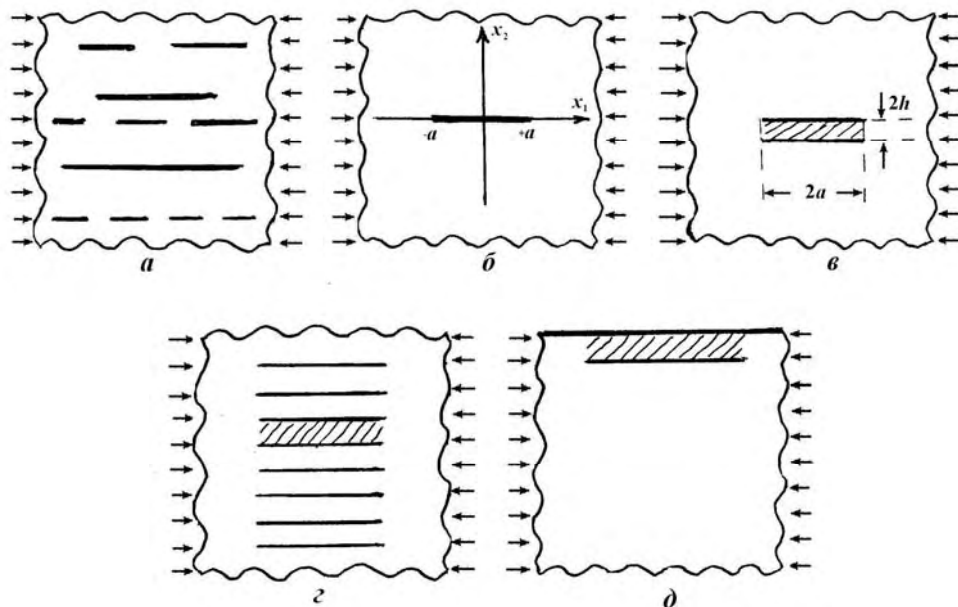


Рис. 1.1

На рис. 1.1, а представлен общий случай расположения плоских трещин в параллельных плоскостях, вдоль которых происходит сжатие материала; на рис. 1.1, б – д представлены основные отдельные расчетные схемы для исследования характерных задач применительно к анализируемым явлениям.

На рис. 1.1, б представлен простейший случай одной трещины длиной  $2a$  (в плоскости  $x_1 0x_2$ ) при сжатии вдоль трещины; этот случай соответствует ситуации на рис. 1.1, а, когда трещины в соседних параллельных плоскостях расположены на достаточно большом расстоянии от трещины, представленной на рис. 1.1, б, и таким образом не происходит взаимовлияние трещин в анализируемых явлениях разрушения.

На рис. 1.1, в представлен простейший случай взаимодействия двух одинаковых трещин, расположенных в двух соседних параллельных плоскостях ( $2h$  – расстояние между плоскостями,  $2a$  – длина трещины), в анализируемом явлении разрушения; при этом на рис. 1.1, в заштрихована часть материала, расположенного между соседними трещинами. Необходимо отметить, что рис. 1.1, в соответствует расчетной схеме, учитывающей взаимодействие лишь двух соседних трещин; таким образом, с точки зрения расчетной схемы на рис. 1.1, а для большего числа трещин в соответствии с рис. 1.1, в не происходит взаимовлияние различных «пар трещин».

На рис. 1.1, г представлен случай взаимодействующих большего числа трещин, расположенных в параллельных плоскостях; указанное взаимодействие моделируется взаимодействием периодического ряда (вдоль вертикальной оси) одинаковых трещин, расположенных друг над другом. Геометрические параметры ( $2a, 2h$ ), характеризующие периодический ряд одинаковых трещин, указаны на рис. 1.1, в; при этом часть материала, расположенного между соседними трещинами на рис. 1.1, г, также заштрихована по аналогии с рис. 1.1, в.

Необходимо отметить, что на рис. 1.1,  $a - z$  представлены расчетные схемы для исследования разрушения материала с трещинами, которые расположены внутри материала, о чем свидетельствует обозначение волнистыми линиями выделенного внутри материала объема; в связи с этим трещины, представленные на рис. 1.1,  $a - z$ , можно называть «внутренними» трещинами. Наряду с «внутренними» трещинами в материале существуют трещины вблизи поверхности материала, которые при разрушении взаимодействуют с поверхностью материала; в связи с этим указанные трещины можно называть «приповерхностными» трещинами.

На рис. 1.1,  $d$  представлен простейший случай одной приповерхностной трещины, расположенной в параллельной плоскости к поверхности материала (на рис. 1.1,  $d$  материал занимает нижнюю полуплоскость – в рамках плоской задачи и поверхность материала обозначена прямой линией) при сжатии вдоль трещины и, естественно, вдоль поверхности материала. Следует отметить, что в расчетной схеме на рис. 1.1,  $d$  трещина расположена на достаточно малом расстоянии от поверхности материала; в связи с этим при анализируемом явлении разрушения необходимо учитывать взаимодействие (взаимодействие) приповерхностной трещины и поверхности материала. На рис. 1.1,  $d$  заштрихованная часть материала имеет геометрические параметры ( $2a, h$ ) в отличие от рис. 1.1  $e, z$ , где заштрихованная часть материала характеризуется геометрическими параметрами ( $2a, 2h$ ).

Следует отметить, что на рис. 1.1,  $b - d$  в каждой из параллельных плоскостей показано по одной трещине с целью сокращения обсуждения; с учетом общего случая расположения плоских трещин в параллельных плоскостях, приведенного на рис. 1.1,  $a$ , представляется очевидным обобщение расчетных схем, приведенных на рис. 1.1,  $b - d$ . Кроме того, представляется очевидным обобщение расчетной схемы, представленной на рис. 1.1,  $d$  применительно к одной приповерхностной трещине, на случай нескольких приповерхностных трещин, расположенных в параллельных плоскостях с учетом ситуаций, представленных на рис. 1.1,  $a, e$  и  $z$ .

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении анализируемых явлений в механике разрушения однородных изотропных и ортотропных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях.

*В дальнейшем в настоящем пункте рассмотрим слоистые композитные материалы, составленные из слоев постоянной толщины; материалы слоев будем считать изотропными или ортотропными. В случае ортотропного материала какого-либо слоя будем считать, что одна из плоскостей симметрии свойств материала параллельна плоскости раздела слоев. Будем анализировать явления разрушения указанных слоистых композитных материалов, в которых в границах раздела свойств (in interface) расположены плоские трещины, при сжатии вдоль трещин и, естественно, вдоль границ раздела слоев. Таким образом, в рассматриваемой ситуации для слоистых композитных материалов, как выше в настоящем пункте и для однородных материалов, анализируется случай сжатия вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях. Дополнительно для слоистых композитных материалов (по сравнению с однородными материалами) будем считать, что сжатие «на бесконечности» осуществляется таким образом, что обеспечивается одинаковое укорочение вдоль всех слоев; вышеуказанный подход, по-видимому, является единственно возможным для обеспечения проведения исследований явлений внутри композитного материала.*

На всех рис. 1.2,  $a - d$  трещины в границах раздела (interface) изображены «жирными» линиями, а границы раздела (interface) изображены «точками»; при этом слои из различных материалов отмечены широкой наклонной штриховкой. На рис. 1.2,  $e - z$ , по аналогии с рис. 1.1,  $e - z$ , достаточно густой наклонной штриховкой отмечена часть материала между трещинами в соседних параллельных плоскостях. На рис. 1.2,  $a$  представлен общий случай расположения плоских трещин в параллельных плоскостях раздела свойств (interface), вдоль которых происходит сжатие слоистого композитного материала; на рис. 1.2,  $b - d$ , по аналогии с рис. 1.1,  $b - d$ , представлены основные расчетные схемы для исследования характерных задач применительно к исследуемым явлениям.

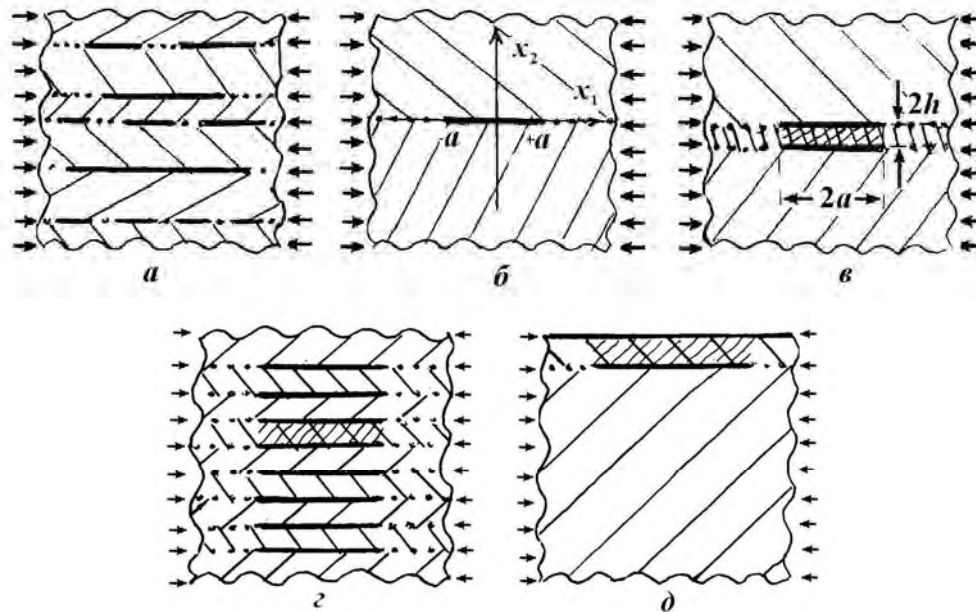


Рис. 1.2

Целесообразно отметить, что все сведения и соображения, приведенные после рис. 1.1 применительно к однородным материалам, в равной мере относятся и к расчетным схемам на рис. 1.2 применительно к слоистым композитным материалам или указанные сведения и соображения необходимо несколько специализировать. В связи с этим отмеченные сведения и соображения не будем приводить в специализированном виде для слоистых композитных материалов с трещинами в границах раздела (interface).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении анализируемых явлений в механике разрушения слоистых композитных материалов, состоящих из слоев постоянной толщины, с плоскими трещинами в границах раздела (interface) при сжатии вдоль трещин и, естественно, вдоль границ раздела свойств слоистых композитных материалов.

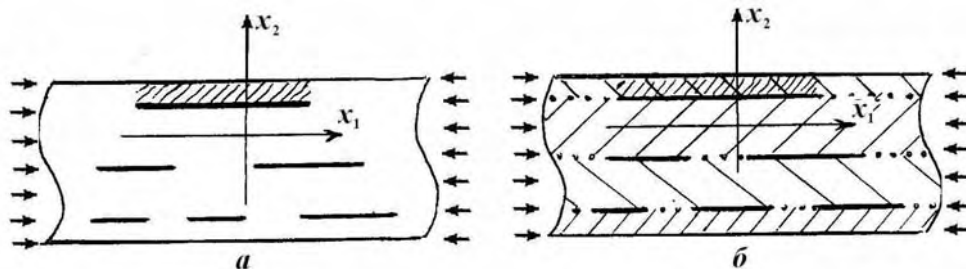


Рис. 1.3

В настоящем пункте выше обсуждались анализируемые явления в механике разрушения однородных и слоистых композитных материалов; родственные явления имеют место и в механике разрушения элементов конструкций (балки, стержни, пластины, оболочки и т.д.), изготовленных из таких материалов, когда трещины расположены в плоскостях, параллельных лицевым поверхностям, в случае сжатия вдоль трещин. В качестве примера на рис. 1.3, а и б представлены пластины постоянной толщины, когда в плоскостях, параллельных лицевым плоскостям, расположены трещины, которые изображены «жирными» линиями; для удобства обсуждения на

рис. 1.3, *a* и *б* расчетные схемы представлены в рамках плоской задачи в плоскости  $x_3 = \text{const}$ ; в настоящем пункте граничные условия на торцах не конкретизируются и в связи с этим торцы изображены волнистыми линиями. На рис. 1.3, *a* и *б* заштрихована часть материала между лицевой плоскостью и ближайшей трещиной по аналогии с рис. 1.1, *в* – *д* и рис. 1.2, *в* – *д*. Необходимо отметить, что рис. 1.3, *a* относится к однородному изотропному или ортотропному материалу пластины; при этом принимается, что в случае ортотропного материала плоскость  $x_2 = \text{const}$  совпадает с плоскостью симметрии свойств материала.

Рис. 1.3, *б* относится к пластине из слоистого композитного материала, состоящего из слоев постоянной толщины с плоскостями раздела свойств (interface) в виде  $x_2 = \text{const}$ ; при этом границы раздела свойств изображены «точками» и слои из различных материалов отмечены широкой наклонной штриховкой. В случае ортотропных материалов слоев принимается, что плоскость  $x_2 = \text{const}$  совпадает с плоскостью симметрии свойств материала каждого слоя. В случае слоистого композитного материала пластины (рис. 1.3, *б*), как и в случае слоистого композитного материала для расчетных схем на рис. 1.2, *дополнительно принимается, что сжатие вдоль слоев и, естественно, вдоль трещин осуществляется таким образом, что обеспечивается одинаковое укорочение вдоль всех слоев.*

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении анализируемых явлений в механике разрушения элементов конструкций с плоскими трещинами, расположенными в плоскостях, которые параллельны лицевым поверхностям, при сжатии вдоль трещин.

**Примечание.** Выше в настоящем пункте обсуждались вопросы механики разрушения материалов и элементов конструкций *лишь при сжатии* вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях. Необходимо отметить, что аналогичные явления возникают и в других близких ситуациях, например, в сжатых зонах при изгибе. Также аналогичные явления возникают вблизи внутренних слоев материала в толстостенных элементах конструкций при внешнем давлении, например, в толстостенных цилиндрических трубах и в толстостенных сферических сосудах.

**1.2.2. Формирование общей концепции для исследования анализируемых явлений.** Следует отметить, что в ситуациях и в расчетных схемах, которые рассмотрены в предыдущем пункте (1.2.1), во всех случаях *возникает однородное напряженно-деформированное состояние для произвольных моделей (упругая, пластическая и вязко-упругая среда) деформируемых тел* применительно к изотропным и ортотропным материалам (для ортотропных материалов при рассматриваемом расположении осей симметрии свойств материала). В связи с вышеизложенным в указанном общем случае (для всех рассматриваемых моделей материалов) в соответствующих точных решениях *будет отсутствовать сингулярная часть решения* и, таким образом, будут иметь место условия

$$K_I = 0; K_{II} = 0; K_{III} = 0. \quad (1.1)$$

В (1.1) и ниже  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  – коэффициенты интенсивности напряжений по Ирвину [192]. Следует отметить, что все критерии разрушения в механике разрушения материалов, построенной на основе подхода Гриффитса [124] – Ирвина [192], определяются величинами коэффициентов интенсивности напряжений или другими величинами, которые вычисляются через коэффициенты интенсивности напряжений. Поскольку в механике разрушения материалов и элементов конструкций при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, которая рассматривается в настоящей обзорной статье, имеют место условия (1.1), то *для построения основ обсуждаемой механики разрушения подход Гриффитса – Ирвина не может быть применен (этот подход в рассматриваемом случае не работает).*

В связи с вышеизложенным приходим к выводу, что применительно к механике разрушения *при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, в однородных изотропных и ортотропных (трещины расположе-*

ны в плоскостях симметрии свойств) материалах и *при сжатии вдоль слоев, в границах раздела (interface) которых расположены плоские трещины*, в слоистых композитных (слои постоянной толщины, в ортотропных слоях плоскости симметрии свойств параллельны границам раздела) материалах необходимо привлекать концепции и подходы, которые отличны от подхода Гриффитса – Ирвина. В рассматриваемых случаях сформировалась общая концепция для исследования анализируемых явлений по аналогии с соответствующей ситуацией в механике тонкостенных элементов конструкций (стержни, балки, пластины и оболочки). Так, в механике тонкостенных элементов конструкций *при сжатии вдоль осей симметрии* (свойств материала и геометрической формы) *возникает явление потери устойчивости состояния равновесия*, которое в большинстве случаев в последующем приводит к исчерпанию несущей способности. Следует отметить, что *в рассматриваемых случаях (рис. 1.1 и 1.2) механики разрушения материалов* при сжатии также рассматривается сжатие вдоль осей симметрии. Вышеизложенные сведения и соображения обосновывают сформировавшуюся общую концепцию, которую можно сформулировать следующим образом.

**Общая концепция. В рассматриваемых ситуациях (рис. 1.1,  $a - d$ , рис. 1.2,  $a - d$ ) начало (старт) процесса разрушения материала определяется локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины.** Целесообразно отметить, что вышесформулированная **общая концепция** относится к произвольным моделям (упругая, пластическая и вязко-упругая среда) деформируемых тел применительно к изотропным и ортотропным (трещины расположены в плоскостях симметрии свойств материала) материалам; необходимо только применительно к конкретной модели применять критерии устойчивости, общепринятые в родственных классах задач.

Вышесформулированная **общая концепция** представляется столь естественным обобщением, что в настоящее время, по-видимому (по крайней мере, по мнению автора настоящей обзорной статьи), не представляется возможным строго установить в какой публикации она была впервые последовательно изложена. Необходимо отметить, что вышесформулированная **общая концепция** определяет лишь общее направление исследования анализируемых явлений; в рамках же этой концепции развиваются различные подходы и методы, приоритетные публикации по разработке которых четко устанавливаются, что и будет выполнено в последующих пунктах настоящей обзорной статьи.

**1.3. Дополнительные сведения.** В предыдущем пункте (п. 1.2) первого раздела сравнительно подробно изложены сведения о построении механики разрушения однородных материалов с плоскими трещинами в параллельных плоскостях и слоистых композитных материалов с плоскими трещинами в границах раздела (interface) при сжатии вдоль трещин. В соответствии с отмеченными сведениями построение механики разрушения для указанных случаев может быть осуществлено на основе **общей концепции**, определяющей начало (старт) процесса разрушения материала в этих случаях как процесс локальной потери устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины.

При обсуждении вопроса о построении вышеуказанной механики разрушения в научной литературе также публиковались сведения и соображения, прямо относящиеся к обсуждаемой проблеме или никак не относящиеся к рассматриваемой проблеме. В настоящем пункте (п. 1.3) в весьма краткой форме приводится информация о двух вопросах вышеуказанного характера.

**1.3.1. Об одном предложении по построению механики разрушения в обсуждаемых случаях.** В ряде публикаций авторы видят (предлагают) возможность построения механики разрушения для случаев, представленных на рис. 1.1,  $a - d$  и рис. 1.2,  $a - d$ , за счет учета микроструктуры материала в кончике распространяющейся трещины. В связи с этим предполагается, что трещина при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.1,  $b$  распространяется не по плоской линии  $x_2 = 0$  на рис. 1.1,  $b$ , а по ломаной линии, близкой к плоской и учитывающей микроструктуру в кончике трещины. При действии внешних нагрузок в виде, указанном на рис. 1.1,  $b$  и 1.2,  $b$ , на берегах трещины возле вершины трещины, которая распространяется по предполагаемой ломаной ли-

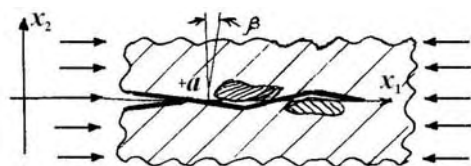


Рис. 1.4

к правому кончику трещины, соответствующему точке «+а» на рис. 1.1, б, представлена на рис. 1.4 для поликристаллического материала, когда учитывается микроструктура материала возле кончика трещины (наличие монокристаллов, которые отмечены более густой штриховкой) и трещина распространяется по ломаной линии, обходя монокристаллы. На рис. 1.4 введено обозначение  $\beta$  – угол между вертикальной осью и нормалью к одному из отрезков рассматриваемой ломаной линии.

При анализе перспектив развития рассматриваемого подхода, по мнению автора настоящей статьи, целесообразно учесть следующие три соображения.

1. Учет влияния микроструктуры материала в кончике трещины в механике разрушения для случая, представленного на рис. 1.4, по-видимому, соответствует следующему этапу в процессе познания применительно к механике разрушения, которая обычно развивается в рамках континуальных представлений для материалов.

2. При попытке реализации рассматриваемого подхода необходимо выполнить сложнейшие исследования по идентификации явлений, происходящих в кончике трещины на микроструктурном уровне и определяющих ломаную линию – линию распространения трещины, с модельными представлениями, используемыми в механике разрушения.

3. При незначительном отличии на рис. 1.4 ломаной линии от прямой (при малых величинах угла  $\beta$  на рис. 1.4) вводимые таким образом сдвигающие напряжения будут значительно меньше сжимающих напряжений  $\sigma_{11}$  (рис. 1.4).

Вышеизложенные соображения (особенно второе), по крайней мере, по мнению автора настоящей статьи, не дают возможности ожидать получения (в ближайшее время) результатов в законченном и обоснованном виде при применении рассматриваемого подхода. Таким образом, рассматриваемый в настоящем пункте (п. 1.3.1) подход можно считать прямо относящимся к проблемам, которые анализируются в данной обзорной статье; все же, как отмечалось выше, этот подход нельзя считать перспективным с точки зрения получения конкретных результатов в ближайшее время. В то же время **общая концепция**, изложенная в п. 1.2.2 и базирующаяся на явлении локальной потери устойчивости, уже позволила исследовать ряд классов задач, относящихся к обсуждаемым проблемам; анализ полученных результатов с привлечением **общей концепции** представлен во втором разделе настоящей обзорной статьи.

**1.3.2. О некоторых других публикациях.** В настоящее время в научной литературе существует ряд публикаций, в которых исследуются конкретные задачи, на первый взгляд как бы относящиеся к анализируемым проблемам в настоящей обзорной статье; в действительности же эти результаты и исследуемые задачи никак не относятся к анализируемым проблемам и имеют самостоятельное значение. Вышеизложенные соображения продемонстрируем на примере конкретной публикации [83], в названии которой указано, что исследование проводится «...при сжатии пластины

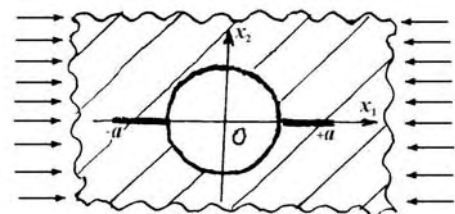


Рис. 1.5

вдоль линии трещин»; в этой публикации действительно приведены результаты экспериментальных исследований при сжатии вдоль двух трещин, которые выходят из контура кругового отверстия и расположены на продолжении одного и того же диаметра отверстия (расположены на одной линии). На рис. 1.5 приведена расчетная схема, соответствующая исследованиям [83];



следует отметить, что рис. 1.5 полностью соответствует рис. 1, а [83], где опущена информация, относящаяся к описанию образцов, применяемых при экспериментальных исследованиях. В случае, представленном на рис. 1.5, действительно исследуется сжатие вдоль трещин, которые лежат в одной плоскости, но в этом случае трещины находятся в сложном поле напряжений, вызванном концентрацией напряжений около отверстия.

Таким образом, возле кончиков трещин (при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.5) не выполняются условия (1.1) (первые два условия); следовательно, исследования [83] не относятся к проблемам, которые анализируются в настоящей обзорной статье. В связи с этим выполнение условий (1.1), по-видимому, может служить критерием для отбора публикаций, относящихся к анализируемым проблемам.

В конкретном случае [83], соответствующем расчетной схеме на рис. 1.5, возле кончиков трещин (при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.5) возникают растягивающие напряжения  $\sigma_{22}$ , вызванные концентрацией напряжений возле отверстия, что дает возможность применять критерии разрушения классической механики разрушения (подход Гриффитса – Ирвина). Вышеизложенное подтверждается и названием публикации [83] «Экспериментальное определение величины  $K_I \dots$ », где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений.

Из сведений и соображений, рассмотренных выше в п. 1.3.2, следует, что необходимо четко определять – относится ли конкретная публикация к анализируемым в настоящей обзорной статье проблемам.

**1.4. О явлении расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах (Delamination).** Как уже отмечалось во Введении (п. 1.1) в настоящую обзорную статью, явление расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах возникает, в общем случае, при различных нагрузках и заключается в разделении слоистых композитных материалов на отдельные части вдоль поверхности раздела (interface) на достаточно протяженных или недостаточно протяженных участках. По-видимому, достаточно общим и характерным в явлении расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах является та ситуация, что *дополнительное* расслоение или отслоение возникает в указанных материалах возле уже *имеющихся* трещин и других дефектов в границах раздела (interface). Таким образом, по принятой терминологии наличие трещин в границах раздела слоистых композитных не тождественно наличию расслоения или отслоения; наличие трещин лишь может инициировать возникновение расслоения или отслоения в дальнейшем процессе нагружения. Учитывая вышеизложенные соображения, можно выделить следующие явления расслоения или отслоения (delamination) и которые определяют, в определенной мере, методы исследования этих ситуаций. Первая ситуация соответствует возникновению расслоений или отслоений в результате локальной потери устойчивости *при сжатии* вдоль границ раздела, в которых расположены *трещины*. Вторая ситуация соответствует возникновению расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах при действии нагрузок, которые *отличаются*, иногда на первый взгляд, *от сжатия* вдоль границ раздела; при этом не всегда предполагается формирование в границах раздела четко выраженных трещин. Третья ситуация соответствует распространению расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах (в том числе и при сжатии вдоль границ раздела) при условии, что существующие расслоения или отслоения *возникли ранее* в технологических процессах или при эксплуатации элементов конструкций. Ниже в настоящем пункте (п. 1.4) в весьма краткой форме, ограничиваясь анализом отдельных примеров и соответствующих публикаций, рассмотрим несколько более подробно три вышеуказанные ситуации.

**1.4.1. Расслоения или отслоения в слоистом композитном материале при сжатии вдоль границ раздела, в которых расположены плоские трещины.** Общая расчетная схема, относящаяся к рассматриваемой первой ситуации, представлена на рис. 1.2, а; простейшие характерные расчетные схемы для рассматриваемой первой ситуации представлены на рис. 1.2, б – д. В рассматриваемых случаях в соответствии

с **Общей концепцией**, изложенной в п. 1.2.2, начало (старт) процесса разрушения материала определяется локальной потерей состояния равновесия материала, который окружает трещины; при этом расслоения или отслоения слоистого композитного материала вызываются вышеуказанным механизмом разрушения. Таким образом, формы и количество расслоений или отслоений в соответствии с вышеизложенным определяются формой потери устойчивости, соответствующей теоретическому пределу прочности. На рис. 1.6, *а – в* показаны возможные формы расслоений или отслоений применительно к расчетным схемам, указанным на рис. 1.2; при этом на рис. 1.6, *б* показана возможная форма потери устойчивости, когда явление расслоения или отслоения имеет место лишь для «нижней» трещины и не имеет места для «верхней» трещины. На рис. 1.6, *а – в*, по аналогии с рис. 1.2, *а – д*, трещины в границах раздела (interface) изображены «жирными» линиями, границы раздела (interface) изображены «точками», слои из различных материалов отмечены широкой наклонной штриховкой и достаточно густой наклонной штриховкой отмечена часть материала между трещинами в соседних границах раздела (рис. 1.6, *б*) или между границей материала и трещиной в границе раздела (рис. 1.6, *в*). Необходимо отметить, что рис. 1.6, *а* соответствует расчетной схеме на рис. 1.2, *б*, рис. 1.6, *б* соответствует расчетной схеме на рис. 1.2, *в* и рис. 1.6, *в* соответствует расчетной схеме на рис. 1.2, *д*. Также следует отметить, что на рис. 1.6 изображены возможные расслоения или отслоения, возникающие применительно к слоистым композитным материалам, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.2; аналогичные явления имеют место и для элементов конструкций из слоистых композитных материалов, одна из простейших расчетных схем для указанных элементов конструкций представлена на рис. 1.3, *б*.

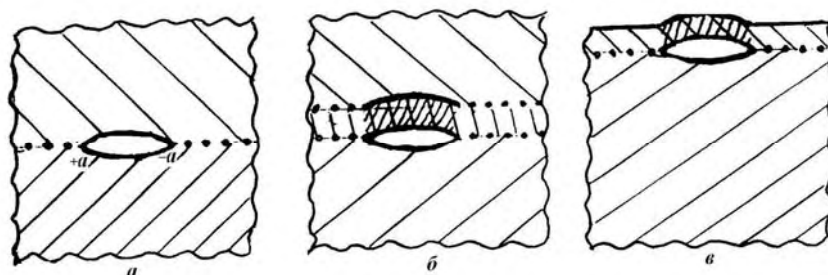


Рис. 1.6

**Примечание.** На рис. 1.6, *а – в* (на рис. 1.6, *б* применительно к «нижней» трещине) изображены расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах, соответствующие возможным формам потери устойчивости. Для возникновения указанных расслоений или отслоений *необходимо*, чтобы рассмотренные возможные формы потери устойчивости соответствовали теоретическим пределам прочности. Это требование является существенным, так как имеют место возможные формы потери устойчивости, которые не приводят к возникновению расслоений или отслоений (например, для «верхней» трещины на рис. 1.6, *б*).

Вышеизложенными сведениями и соображениями ограничимся при обсуждении возникновения расслоений или отслоений в слоистом композитном материале при сжатии вдоль границ раздела (interface), в которых расположены плоские трещины.

**1.4.2. Расслоения или отслоения в слоистом композитном материале при действии других (по сравнению с п. 1.4.1) нагрузок.** Как уже отмечалось во вводной части п. 1.4, вторая из рассматриваемых ситуаций соответствует возникновению расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах при действии нагрузок, которые отличаются, иногда на первый взгляд, от сжатия вдоль границ раздела; при этом не всегда предполагается формирование предварительно в границах раздела четко выраженных трещин. В случае произвольных нагрузок, очевидно, уже не выполняются условия (1.1) и таким образом можно применять общеизвестный и общепринятый подход Гриффитса [124] – Ирвина [192] или только энергетический подход Гриффитса [124].

Как уже отмечалось во Введении в настоящую обзорную статью (п. 1.1), в настоящее время общепринято считать, что первой публикацией по проблеме расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах (по принятой классификации – вводная часть п. 1.4 при анализе второй рассматриваемой ситуации) была статья Обреимова [203], опубликованная в 1930 г. В этой статье исследовано расслоение слюды вблизи торцевой трещины (отделение слоя слюды от образца) под действием раздирающей силы  $F$ , приложенной перпендикулярно к образцу слюды; примерная расчетная схема [203] представлена на рис. 1.7, *а*. В результате анализа в [203] оценена величина удельной работы межслойного разрушения, как бы следуя энергетическому подходу Гриффитса [124]. При определении удельной работы с учетом отщепляемого слоя для определения напряженно-деформированного состояния слоя применялась приближенная теория пластин. Такой подход (применение для отслаиваемой тонкостенной части материала прикладных двумерных теорий стержней, балок, пластин и оболочек, построенных с привлечением гипотез Бернулли, Кирхгофа – Лява, типа Тимошенко и т.п.) в последующие годы получил название «балочное приближение» (beam approximation). Таким образом, можно считать, что Обреимов [203] является инициатором создания балочного приближения.

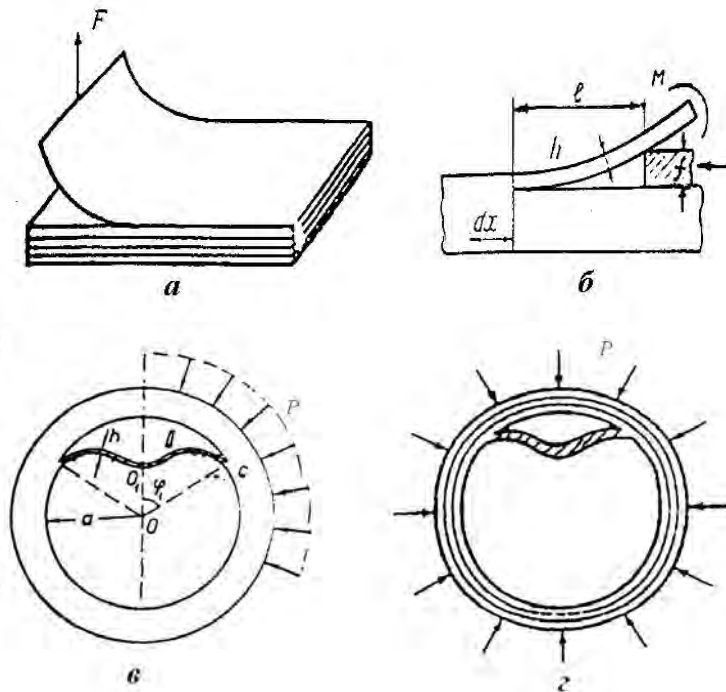


Рис. 1.7

В последующие годы исследования [203] были продолжены в публикации Давиденкова [51] за 1960 г. также применительно к отслоению слоя слюды; расчетная схема [51] представлена на рис. 1.7, *б*, где отслоение осуществляется продвижением клина  $f$  (заштрихованный прямоугольник). При определении удельной работы в случае продвижения трещины на величину  $dx$  (рис. 1.7, *б*) в [51] при анализе напряженно-деформированного состояния для отщепляемого слоя действие клина  $f$  заменялось действием момента  $M$  и применялась приближенная теория пластин (балок в рамках плоской задачи).

В качестве примера исследования расслоения или отслоения в слоистом композитном материале при действии нагрузки, на первый взгляд существенно отличающейся от сжатия вдоль слоев, можно указать статью [60], опубликованную в 1975 г. В [60] исследовано отслоение внутреннего тонкого слоя в толстостенной слоистой цилиндрической трубе, нагруженной равномерным внешним давлением, в рамках плоской задачи в плоскости поперечного сечения; на рис. 1.7, *в*, соответствующем рис. 1

[60], приведена детальная расчетная схема, которая применялась в [60], а на рис. 1.7, *з* приведена общая примерная расчетная схема. В рассматриваемом исследовании не предполагалось наличие трещины в границе раздела (interface) в области, соответствующей отщепляемому тонкому слою на рис. 1.7 *в*, *з*; таким образом, в указанной области анализировалось разрушение слоя связующего и это явление исследовалось с привлечением энергетического подхода Гриффитса [124]. Также в [60] при анализе напряженно-деформированного состояния в отщепляемом тонком слое, отмеченном на рис. 1.7, *в*, *з* густой штриховкой, применялись соотношения теории тонких стержней (балок), построенной с привлечением гипотезы плоских сечений; таким образом в [60], по существу, применялось «балочное приближение». Отметим, что в области отщепляемого тонкого слоя (для локальной части материала) рассматривалось, по существу, нагружение, близкое к сжатию вдоль слоев, что следует из решения задачи Ляме для толстостенной трубы при равномерном внешнем давлении. Также следует отметить, что в [60] при вышеуказанном приближенном анализе определено значение критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости (отщеплению) тонкого внутреннего слоя; при этом получено *существенное изменение геометрической конфигурации тела*, так как появилась выпучина, представленная на рис. 1.7, *в* и *з* заштрихованной частью материала. В связи с этим при анализе дальнейшего изменения (развития) расслоения *необходимо учитывать изменение конфигурации тела* и, как следствие, *необходимо применять нелинейную теорию деформирования*.

Вышеизложенными примерами и сведениями ограничимся при обсуждении возникновения расслоения или отслоения в слоистом композитном материале при нагрузках, которые отличаются от сжатия вдоль слоев.

**1.4.3. Расслоения или отслоения в слоистом композитном материале при сжатии вдоль слоев с учетом существования ранее возникших дефектов.** В настоящем пункте (п. 1.4.3) в краткой форме рассмотрим третью ситуацию, соответствующую развитию расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах, которые отмечены во вводной части п. 1.4. В рассматриваемой ситуации принимается, что уже существующие расслоения или отслоения *возникли ранее* в технологических процессах создания или при эксплуатации элемента конструкций. В опубликованных исследованиях по обсуждаемой проблеме молчаливо принимается *следующее основное допущение*: исследуется распространение уже существующего дефекта (типа расслоений или отслоений) и не учитывается напряженно-деформированное состояние, которое возникло при образовании этого дефекта. По-видимому, существуют случаи, когда напряжения, возникшие при образовании рассматриваемого дефекта, превосходят напряжения, которые вызывают развитие рассматриваемого дефекта; в связи с этим в общем случае необходимо привлекать нелинейную теорию и необходимо учитывать напряжения, которые возникли при образовании дефекта.

Поскольку существуют разнообразные (по форме и структуре) дефекты типа расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах, то существует и большое разнообразие рассматриваемых задач. Классификация приповерхностных отслоений представлена на рис. 2 в статье [12]; следуя [12] (рис. 2), применительно к сжатию вдоль слоев классификация типичных приповерхностных отслоений представлена на рис. 1.8, соответствующем рис. 2 [12]. В указанной публикации введены следующие названия для отслоений: рис. 1.8, *а* – закрытое отслоение; рис. 1.8, *б* – эллипсоидальное отслоение; рис. 1.8, *в* – эллипсоидальное закрытое отслоение; рис. 1.8, *г* – краевое «карманообразное» отслоение; рис. 1.8, *д* – краевое «карманообразное» отслоение с поперечной трещиной. При исследовании расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах при сжатии в соответствии с расчетными схемами, представленными на рис. 1.8, *а* – *д*, необходимо учесть, что указанные дефекты не являются симметричными относительно границ раздела (interface); в связи с этим для указанных расчетных схем не выполняются условия (1.1) и для исследования соответствующих задач **Общая концепция**, сформулированная в п. 1.2.2, неприменима. Учитывая вышеизложенное, в публикациях по рассматриваемой проблеме для исследования распространения уже имеющихся отслоений (типа представленных на рис. 1.8, *а* – *д*, применяется энергетический подход Гриффитса [124]. Кроме того, в указанных публикациях для определения напряженно-деформированного состояния отслоенного тонкого слоя применяется балочное приближение (beam approximation). В связи с

привлечением балочного приближения основные соотношения энергетического подхода Гриффитса [124] в анализируемых публикациях представлены через интегральные величины (усилия, моменты и перерезывающие силы).

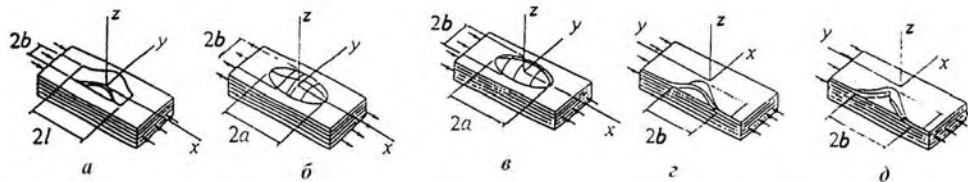


Рис. 1.8

Вышеизложенными сведениями и соображениями ограничимся при обсуждении механики развития отслоений в слоистых композитных материалах при сжатии вдоль слоев при условии, что существующие отслоения *возникли ранее* в технологических процессах создания или при эксплуатации элементов конструкций.

В виде Заключения к исследованиям проблем, типа представленных на рис. 1.8,  $a - d$ , которые рассматриваются в современных публикациях, сформулируем основные допущения, при которых получены соответствующие публикации; целесообразно отметить четыре основных допущения (положения).

1. Исследуется распространение уже существующего дефекта (отслоения определенной формы и структуры) и не учитывается напряженно-деформированное состояние, которое возникло при образовании этого дефекта.

2. Для определения напряженно-деформированного состояния отслоенного тонкого слоя применяется балочное приближение (beam approximation).

3. Для исследования развития отслоения, типа представленного на рис. 1.8,  $a - d$ , применяется энергетический подход Гриффитса [124].

4. Учитывая привлечение балочного приближения, в современных публикациях фактически основные соотношения энергетического подхода Гриффитса [124] представлены через интегральные величины (усилия, моменты и перерезывающие силы), принятые в механике тонкостенных элементов конструкций.

Целесообразно отметить, что вышеизложенное (п. 1.4) обсуждение явления расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах не претендует на полноту.

### 1.5. Основные задачи и общие подходы в механике разрушения при сжатии.

В настоящем пункте (п. 1.5) излагаются сведения об основных задачах и общих подходах к их решению в случаях: сжатия вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях в однородных материалах; сжатия вдоль границ раздела (interface), в которых расположены плоские трещины, для слоистых композитных материалов со слоями постоянной толщины; применительно к явлению расслоения или отслоения (delamination) в слоистых композитных материалах при сжатии и, частично, других нагрузках, когда это явление инициируется наличием трещин и дефектов или другими причинами. Указанные проблемы соответствуют предварительному обсуждению и анализу, изложенному в предыдущих пунктах; при этом, как уже отмечалось в заключительной части п. 1.4.3 применительно к анализу основных допущений, также приведенные сведения об основных задачах и общих подходах для исследования явления расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах не могут претендовать на полноту в силу большего разнообразия анализируемых и рассматриваемых в публикациях задач.

**1.5.1. Основные задачи.** Вполне очевидно, что в силу большего разнообразия задач, рассматриваемых в весьма многочисленных публикациях по анализируемой в настоящем обзоре тематике, невозможно уделить внимание всем задачам, даже определяя их как основные задачи. В связи с этим ниже в настоящем пункте (п. 1.5.1) сформулируем основные задачи, которые, безусловно на взгляд автора, являются характерными для рассматриваемых проблем.

**Первая основная задача (Задача I)** заключается в исследовании локальной потери устойчивости состояния равновесия части материала, окружающей трещины, что в соответствии с **Общей концепцией**, изложенной в п. 1.2.2, определяет начало (старт) разрушения. Эти исследования относятся к однородным материалам при

сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или параллельных плоскостях. Эти же исследования также относятся к слоистым композитным материалам со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль границ раздела (interface), в которых расположены трещины. Для рассматриваемой **Задачи I** характерным является выполнение условия (1.1) и указанные исследования относятся к *произвольным моделям* (упругая, пластическая и вязко-упругая среда) деформируемых тел применительно к изотропным и ортотропным (трещины расположены в плоскостях симметрии) материалам. Характерные простейшие расчетные схемы представлены для однородных материалов на рис. 1.1 и для слоистых композитных материалов – на рис. 1.2. Для слоистых композитных материалов применительно к рис. 1.2 принимается, что сжатие «на бесконечности» обеспечивает одинаковое укорочение вдоль всех слоев; как уже отмечалось, отмеченный подход является, по-видимому, единственно возможным для обеспечения анализа внутри материала.

Вышеформулированные исследования применительно к **Задаче I** проводятся в рамках различных линеаризованных теорий устойчивости деформируемых тел, включая и линеаризованные теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций. В связи с этим применительно к рассматриваемому механизму разрушения в качестве *теоретического предела прочности* на сжатие *выступают напряжения, соответствующие критическому значению сжимающей нагрузки*, определяющие локальную потерю устойчивости состояния равновесия материала возле трещин.

**Примечание.** Необходимо отметить, что после локальной потери устойчивости состояния равновесия возле трещин (соответствует началу – старту процесса разрушения, исследуемого в рамках вышеформулированной **Задачи I**) в качестве продолжения процесса деформирования возможны две ситуации.

При первой ситуации локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин *инициирует переход* к общему разрушению материала; в этом случае исследования процесса разрушения заканчивается определением величины критической нагрузки, соответствующей локальной потере устойчивости состояния равновесия материала возле трещин. Первая ситуация характерна для материалов с периодической системой трещин вдоль одной координаты (рис. 1.1,  $z$  – для однородных материалов и рис. 1.2,  $z$  – для слоистых композитных материалов); как уже отмечалось в п. 1.2.1, периодическая система трещин вдоль одной координаты моделирует случай большого числа трещин вдоль этой координаты. Для материала с периодической системой трещин (рис. 1.1,  $z$ , рис. 1.2,  $z$ ) потеря устойчивости происходит как бы по всей толщине материала (вдоль вертикальной оси на рис. 1.1,  $z$  и рис. 1.2,  $z$ ); в результате как бы образовывается «пластический шарнир» по всей толщине и материал теряет несущую способность (происходит деструкция материала).

Вторая ситуация может иметь место применительно к расчетным схемам ( $\bar{b}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{d}$ ) на рис. 1.1 и 1.2, т.е. для материала с малым числом трещин. При второй ситуации локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин может *не инициировать переход* к общему разрушению за счет «поддерживающего» влияния материала, окружающего локальную зону возле трещин. В этом случае целесообразно продолжить исследование процесса деформирования.

Соображения, представленные в вышеизложенном Примечании, неоднократно рассматривались в публикациях (в периодических изданиях) автора настоящего обзора и также помещены в соответствующих монографиях (например, в двухтомной монографии [37] в виде Примечания 2 на стр. 288 второго тома).

**Вторая основная задача (Задача II)** заключается в исследовании *нелинейного (послекритического) деформирования материала с трещинами с учетом изменений конфигурации тела, возникшей за счет первоначальной потери устойчивости или первоначального деформирования*. Эти исследования относятся к однородным материалам при сжатии вдоль небольшого числа трещин, расположенных в параллельных плоскостях (расчетные схемы ( $\bar{b}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{d}$ ) на рис. 1.1), с учетом изменения конфигурации тела (типа на рис. 1.6), возникшей при первоначальной потере устойчивости. Эти же исследования относятся также к слоистым композитным материалам со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль границ раздела (interface) с небольшим числом взаимодействующих трещин (расчетные схемы ( $\bar{b}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{d}$ ) на рис. 1.2) с учетом измене-

ния конфигурации тела (типа на рис. 1.6), которая возникла при первоначальной потере устойчивости. Обсуждаемые исследования также относятся к проблеме отслоения в слоистых композитных материалах при нагрузках, которые отличаются от сжатия вдоль слоев (типа расчетных схем на рис. 1.7, *a – в*), при анализе дальнейшего развития отслоения; в этих случаях не выполняются условия (1.1) и исследования необходимо проводить с учетом существенного изменения исходной конфигурации тела. При анализе дальнейшего развития расслоений или отслоений, представленных на рис. 1.8, *a – д*, также необходимо проводить исследования с учетом существенного изменения исходной конфигурации, что предопределяет принадлежность таких исследований к **Задаче II**; анализ основных допущений, которые, по существу, применяются в современных публикациях при проведении исследований для расчетных схем (*a – д*) на рис. 1.8, представлен в заключительной части п. 1.4.3.

Целесообразно отметить, что **Задача II** является сугубо нелинейной задачей; в связи с этим при проведении соответствующих исследований нет необходимости разделять задачу на две задачи, первая из которых соответствует предварительной потере устойчивости, а уместно исследовать одну общую нелинейную задачу с учетом существенного изменения конфигурации тела в процессе деформирования. В заключение применительно к обсуждаемым исследованиям следует отметить, что *в настоящее время еще отсутствуют необходимые исследования в рамках Задачи II*; в связи с этим можно считать, что приведенные соображения относятся к перспективе развития исследований по анализируемой проблеме.

**Третья основная задача (Задача III)** заключается в исследовании механики расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах в рамках постановок и допущений, краткая информация о которых представлена выше в пп. 1.4.2 и 1.4.3. В связи с большим разнообразием постановок задач, принимаемых упрощениях и допущениях, а также полученных результатов применительно к **Задаче III** (дополнительно к сведениям в пп. 1.4.2 и 1.4.3) проводить обсуждение, по-видимому, нецелесообразно.

В виде заключительного замечания к информации, изложенной в настоящем пункте (п.1.5.1), необходимо отметить, что вышеизложенное выделение трех основных задач, по-видимому, не всегда может быть четко реализовано применительно ко всем анализируемым проблемам; все же такое выделение будет полезным при обсуждении полученных результатов. Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении основных задач.

**1.5.2. Общие подходы.** По рассматриваемым в настоящем обзоре проблемам предложены разнообразные подходы и развиты в рамках этих подходов многочисленные методы исследования конкретных классов задач; все же существуют два принципиально отличающихся общих подхода, краткое обсуждение которых приведем в настоящем пункте (п. 1.5.2).

**Первый общий подход. Балочное приближение или балочный подход. Beam approximation.** Балочный подход заключается в выделении части материала, находящегося между двумя соседними трещинами в параллельных плоскостях или между трещиной и граничной поверхностью материала, и применения для выделенной части материала прикладных теорий механики тонкостенных систем с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгофа – Лява, типа Тимошенко и других гипотез; при этом исследования для выделенных частей материала проводятся для случаев граничных условий жесткого защемления или шарнирного опирания на «торцах». Выделяемые или вычленяемые указанным способом части материала отмечены сравнительно «густой» штриховкой на расчетных простейших схемах, представленных на рис. 1.1, *в, г, д*; рис. 1.2, *в, г, д*, рис. 1.3, *а, б*, рис. 1.6, *б, в* и рис. 1.7, *б, в*; также отметим, что для исследования всех отслоенных частей материала, представленных на расчетных схемах на рис. 1.8, *а – д*, применяется балочный подход в современных публикациях.

Безусловно, балочный подход существенно упрощает исследование рассматриваемых проблем и дает возможность получить конкретные числовые результаты в законченном виде; в связи с этим балочный подход получил повсеместное распространение в ряде или большинстве случаев без надлежащего обоснования. Очевидно, анализ достоверности и точности результатов, получаемых с привлечением балочного

приближения (beam approximation), требует квалифицированного обсуждения; краткий анализ балочного подхода представлен в следующем пункте (п. 1.5.3) на уровне обсуждения качественного характера.

Как уже отмечалось в п. 1.4.2, впервые применение балочного подхода было реализовано в статье Обреимова [203], опубликованной в 1930 г.; таким образом, Обреимова можно считать инициатором создания балочного подхода (beam approximation). В последующие годы в публикациях [57, 66 – 69], по-видимому, впервые, за 1965 – 1970 гг. начала применяться терминология «балочный подход, балочное приближение»; в публикациях А.М.Михайлова [66 – 69] за 1966 – 1969 гг. вышеуказанная терминология начала применяться уже в названиях статей.

После 1970 г. балочный подход получил повсеместное распространение при исследовании различных проблем механики разрушения и механики композитных материалов; частично представление о таких исследованиях можно получить из списка литературы к настоящему обзору и указанных в этом списке обзорных публикаций. Следует отметить, что балочный подход (beam approximation) применяли в своих исследованиях такие известные ученые, как Л.М.Качанов ([59, 60] и другие публикации, начиная с 1974 г.), В.В.Болотин ([13, 14] и другие публикации, начиная с 1980 г.), Ю.Н.Работнов ([84, 85] – публикации за 1983 г.), Э.И.Григолюк ([22] – публикация за 1994 г.) и другие известные ученые. В настоящее время уже опубликован ряд монографий, результаты которых получены с привлечением балочного подхода; в качестве примера можно привести монографии, опубликованные на английском языке, В.В.Болотина [113], Л.М.Качанова [194] и R.Kienzler, G.Herrmann [196]. В следующем разделе настоящего обзора (Раздел 2) будет приведен краткий обзор результатов по механике разрушения, включая и механику расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах, которые получены с привлечением балочного подхода (beam approximation).

**Второй общий подход. Применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.** *Рассматриваемый подход заключается в привлечении трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (сокращенно ТЛТУДТ) к исследованию устойчивости локального состояния равновесия материала, примыкающего к трещинам; при этом рассматриваются в трехмерной постановке строгие уравнения устойчивости и соответствующие граничные условия, что исключает необходимость привлечения дополнительных гипотез.*

Сформулированный подход относится к однородным материалам при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, применительно к расчетным схемам, представленным на рис. 1.1, *a – д*. Этот же подход относится к слоистым композитным материалам со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль поверхностей раздела (interface), в которых расположены плоские трещины, применительно к расчетным схемам, представленным на рис. 1.2, *a – д*. Безусловно, второй общий подход также относится и к соответствующим задачам для элементов конструкций из однородных и слоистых композитных материалов, ослабленных трещинами, применительно к расчетным схемам, представленным на рис. 1.3 *a, б*. В вышеуказанных случаях (расчетные схемы на рис. 1.1, *a – д*, 1.2, *a – д* и 1.3, *a, б*) материал предполагается изотропным или ортотропным (плоскости симметрии свойств материала совпадают с горизонтальными плоскостями) для произвольных моделей (упругая, пластическая или вязко-упругая среда) деформируемых тел: при отмеченных условиях критическое состояние будет однородным и будут выполняться условия (1.1).

Для задач механики расслоения или отслоения слоистых композитных материалов, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.7, *б, в*, и на рис. 1.8, *a – д*, второй общий подход может применяться в виде основных соотношений трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел (без привлечения критерия разрушения). При этом второй общий подход должен быть объединен с энергетическим подходом Гриффитса [124] или с так называемым объединенным подходом Гриффитса [124] – Ирвина [192], в котором критерии разрушения формулируются с привлечением коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  или родственных величин.



Как представляется автору, *впервые второй общий подход* применительно к механике разрушения при сжатии вдоль плоских трещин в параллельных плоскостях был предложен в публикациях авторам обзора (в [30] – для плоской задачи и в [31] – для пространственной задачи); статьи [30, 31] опубликованы в 1981 г. и подготовлены в рамках трехмерной линеаризованной механики разрушения, например, статьи [28, 29] за 1980 г. Подход [30, 31] предложен в единой общей форме для изотропных и ортотропных (трещины расположены в плоскостях симметрии свойств) гиперупругих материалов с произвольной структурой упругих потенциалов для теории больших (конечных) докритических деформаций, а также первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций. Учитывая обобщенную концепцию продолжающегося нагружения в трехмерной теории устойчивости *пластических* материалов, достаточно подробно изложенную, например, в монографиях [26, 34, 135] и в других публикациях, **второй общий подход** распространен и на упруго-пластические материалы, например, в публикациях [125, 126] за 1982 г. Таким образом, исследования, соответствующие второму общему подходу, проводятся в единой общей форме для упругих материалов (хрупкое разрушение) и упруго-пластических материалов (пластическое разрушение).

При применении второго общего подхода *теоретический предел прочности определяется как критическое значение напряжений, соответствующее локальной потере устойчивости состояния равновесия возле трещин*; при этом для определения указанного критического значения применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел, различные аспекты которой изложены, например, в монографиях [24 – 27, 34, 135] автора обзора и в других публикациях. Следует отметить, что последовательный анализ построения различных вариантов трехмерной теории устойчивости деформируемых тел представлен в обзорной статье [137]; весьма краткий анализ для трехмерной теории упругой устойчивости со ссылкой на [137] также приведен в обзорной статье [144].

Необходимо отметить, что трехмерная линеаризованная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях применялась также (в рамках плоской задачи) для исследования устойчивости бесконечного тела при сжатии вдоль одной плоской трещины применительно к материалам с упругими потенциалами конкретной структуры. По-видимому, впервые результаты таких исследований опубликованы в статьях С.Н.Ву [213, 214]; так, в [213] за 1979 г. исследован случай сжимаемого тела с потенциалом гармонического типа и в [214] за 1980 г. исследован случай несжимаемого тела с упругим потенциалом конкретной структуры. В заключение следует отметить, что публикации С.Н.Ву [213, 214] за 1979 – 1980 гг. и публикации [28 – 31] автора обзора за 1980 – 1981 гг. появились независимо и в форме, существенно отличающейся по общности постановки задач.

**1.5.3. Краткий анализ балочного подхода (beam approximation).** При проведении обсуждаемого анализа будем исходить из следующих очевидных **позиций: первый общий подход** является *сугубо приближенным* и построен на применении прикладных двумерных теорий для тонкостенных систем, которые связаны с введением общеизвестных гипотез; **второй общий подход** построен на применении *трехмерной теории, не связанной с введением общеизвестных гипотез* и полученной с общепринятой в механике деформируемого тела точностью. Кроме того, учитывая сравнительно подробное обсуждение **первой основной задачи (Задача I), второй основной задачи (Задача II) и третьей задачи (Задача III)** в п. 1.5.1, в дальнейшем удобно провести краткий анализ балочного подхода (beam approximation) отдельно применительно к каждой вышеуказанной задаче. Ниже приведем результаты обсуждаемого анализа в виде ряда выводов для каждой вышеуказанной задачи.

**1.5.3.1. Краткий анализ балочного подхода (beam approximation) для первой основной задачи (Задача I, п. 1.5.1).** В этом случае строго выполняются условия (1.1) и теоретический предел прочности на сжатие определяется значением критической нагрузки, соответствующей локальной потере устойчивости состояния равнове-

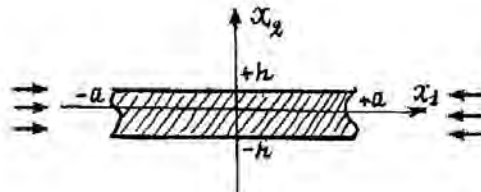


Рис. 1.9

вание проводится для выделенной или вычлененной части материала, которая на рис. 1.1 – 1.3 показана «густой» штриховкой, при определенных граничных условиях на «мысленно выделенных» торцах. В соответствии с обозначениями на рис. 1.1, в выделенная часть материала показана на рис. 1.9. Следует отметить, что собственные числа как бы «интегрально» характеризуют рассматриваемую задачу на собственные значения для всей области, а не поведение искомой функции в отдельных точках. В связи с вышеизложенным теоретический предел прочности на сжатие, полученный при рассматриваемом подходе, также является «интегральной» характеристикой для всей рассматриваемой задачи.

Целесообразно также остановиться на обсуждении граничных условий на «мысленно выделенных» торцах, т.е. при  $x_1 = \pm a$  при обозначениях на рис. 1.9. Рассмотрим с этой целью малую окрестность возле правой вершины трещины применительно, для конкретности изложения, к расчетным схемам на рис. 1.1, д и 1.2, д, соответствующим приповерхностному разрушению; при этом на рис. 1.10 малая окрестность правой вершины трещины, соответствующая точке  $+a$ , обозначена наиболее густой штриховкой. Отметим, что рис. 1.10, а относится к однородному материалу и соответствует расчетной схеме на рис. 1.1, д, а рис. 1.10, б относится к слоистому составному материалу и соответствует расчетной схеме на рис. 1.2, д; при этом обозначения на рис. 1.1, д и рис. 1.10, а согласованы между собой, также согласованы между собой обозначения на рис. 1.2, д и рис. 1.10, б.

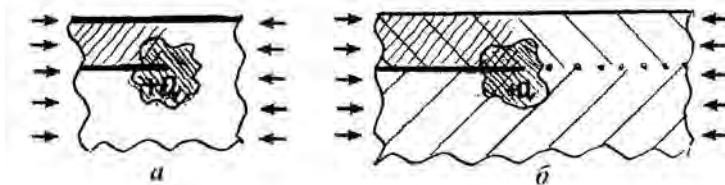


Рис. 1.10

Из рис. 1.10 представляется очевидным, что в малой окрестности возле кончика трещины возникает (при исследовании задачи устойчивости) *сугубо трехмерное напряженно-деформированное состояние*; при этом в рамках балочного подхода (beam approximation) в точке « $+a$ » на рис. 1.10 или при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.9 формулируются граничные условия, соответствующие прикладной теории тонкостенных систем и полученные с привлечением общеизвестных гипотез.

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, ниже сформулируем результаты краткого анализа балочного подхода (beam approximation) для **первой основной задачи (Задачи I п. 1.5.1)** в виде следующих выводов.

**Вывод 1.** При любом значении параметра тонкостенности  $h/a$  (рис. 1.9) в балочном подходе *возникает неустранимая погрешность* в связи с формулировкой граничных условий на торцах (при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.9) в рамках прикладной теории тонкостенных систем.

**Вывод 2.** В рамках балочного подхода *невозможно строго* сформулировать граничные условия на торцах (при  $x_1 = \pm a$  на рис. 1.9) в рамках прикладных теорий тонкостенных систем; указанные граничные условия должны как бы соответствовать «упругой заделке».

*Вывод 3.* В связи с Выводом 2 исследования при балочном подходе, как правило, проводят для граничных условий в торцах в виде жесткого защемления или шарнирного опирания; при этом результаты, полученные при указанных двух видах граничных условий, отличаются *в несколько раз*.

*Вывод 4.* В связи с Выводом 3 возникает проблема оценки результатов, полученных в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение), с точки зрения результатов, полученных в рамках **второго общего подхода**; указанная оценка *может определять вид граничных условий* в рамках балочного подхода для каждого конкретного класса задач.

*Вывод 5.* Первый общий подход (балочное приближение, beam approximation) является *сугубо приближенным подходом*. В связи с этим возникает проблема об оценке применимости результатов первого общего подхода в зависимости от значения параметра тонкостенности  $h/a$  (рис. 1.9). Указанная проблема может быть решена для каждой конкретной задачи посредством сравнения с результатами для этой же задачи, полученными при втором общем подходе (п. 1.5.2), который является достаточно строгим в силу применения трехмерной постановки.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при кратком анализе балочного подхода (beam approximation) для первой основной задачи (Задача I, п. 1.5.1).

**1.5.3.2. Краткий анализ балочного подхода (beam approximation) для третьей основной задачи (Задача III, п. 1.5.1).** Третья основная задача относится к исследованиям по механике расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.7,  $a - в$  и 1.8,  $a - д$ . В указанных задачах в силу несимметрии геометрической формы относительно границ раздела (interface) даже в случае сжатия вдоль границ раздела, например, расчетные схемы на рис. 1.8,  $a - д$ , уже не выполняются условия (1.1). В связи с невыполнением условий (1.1) для исследования указанных задач можно применять энергетический подход Гриффитса [124] или эквивалентный ему и повсеместно применяемый в настоящее время силовой подход Гриффитса – Ирвина [124, 192]. Достаточно подробная информация о постановках конкретных задач и специфике применения балочного подхода для рассматриваемой **Задачи III** представлена в пп. 1.4.2 и 1.4.3; в связи с этим ниже представим лишь основные аспекты обсуждаемого вопроса, учитывая также приведенную информацию для **Задачи I**.

Прежде всего, в соответствии с расчетными схемами, представленными на рис. 1.7 и 1.8, при рассматриваемом подходе исследование проводится для выделенной или вычлененной части отщепленного (отслоенного) слоя, которая, например, на рис. 1.7,  $б, в$ , показана «густой» штриховкой, при определенных граничных условиях на «мысленно выделенных» торцах. На рис. 1.11,  $a$  схематично показана выделенная или вычлененная часть отщепленного (отслоенного) слоя; в отличие от рис. 1.9 рассматриваемая часть слоя является криволинейной в соответствии с расчетными схемами на рис. 1.7 и 1.8, но по аналогии с рис. 1.9 также отмечена «густой» штриховкой. В соответствии с **Первым основным подходом** (п. 1.5.2) для исследования напряженно-деформированного состояния выделенного элемента (рис. 1.11,  $a$ ) применяются прикладные теории механики тонкостенных систем, построенные с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгофа – Лява, типа Тимошенко и т.п., для различных нагрузок, которые показаны для расчетных схем на рис. 1.7,  $a - в$  и 1.8,  $a - д$ .

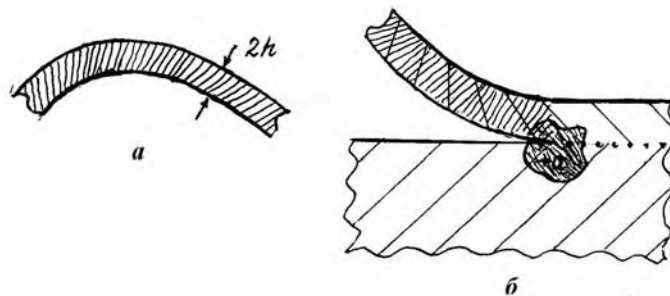


Рис. 1.11

Целесообразно также остановиться на обсуждении граничных условий на «мысленно выделенном» торце в вершине трещины (в точке « $+a$ » на рис. 1.11, б) для уже отщепленного слоя в слоистом композитном материале; для конкретности изложения рис. 1.11, б соответствует приповерхностному разрушению. Отметим, что рис. 1.11, б относится к оценкам энергии при анализе отщепляемого слоя применительно к расчетным схемам на рис. 1.7, а – в; рис. 1.11, б также относится к оценкам энергии при анализе развития *уже отщепленного ранее слоя* применительно к расчетным схемам на рис. 1.8, а – д. Из рис. 1.11, б представляется очевидным, что в малой окрестности возле вершины трещины (возле точки « $+a$ » на рис. 1.11, б) возникает (при исследовании напряженно-деформированного состояния в силу применения энергетического подхода Гриффитса [124] или эквивалентного ему силового подхода Гриффитса – Ирвина [124, 192]) *сугубо трехмерное (двумерное в случае плоской задачи) напряженно-деформированное состояние*; при этом малая окрестность точки « $+a$ » на рис. 1.11, б, как и на рис. 1.10, обозначена наиболее густой штриховкой. В то же время в соответствии с **Первым основным подходом** (балочное приближение, п. 1.5.2) возле точки « $+a$ » на рис. 1.11, б формулируются условия упругого сопряжения в виде граничных условий (соответствующих прикладным теориям тонкостенных систем и полученные с привлечением общеизвестных гипотез) для усилий, моментов, углов поворота и т.п. Обычно даже не рассматривают таким образом сформулированную задачу упругой заделки возле точки « $+a$ » (рис. 1.11, б) для отщепленного слоя, а применяют решение задачи для абсолютно жесткого защемления или шарнирного опирания для отщепленного слоя возле точки « $+a$ » (рис. 1.11, б); как уже отмечалось выше (*Вывод 3* применительно к первой основной задаче), указанные результаты для жесткого защемления и шарнирного опирания отличаются в несколько раз. Таким образом, *в результате вышеотмеченного рассмотрения в балочном подходе вводится неустраняемая погрешность при определении напряженно-деформированного состояния вблизи точки « $+a$ » (рис. 1.11, б)*. В последующем отмеченная *неустраняемая погрешность входит и в конечные результаты*, получаемые в рамках третьей основной задачи, поскольку конечные результаты этой задачи основаны на применении энергетического подхода Гриффитса [124] для определения значения разрушающей нагрузки (расчетные схемы на рис. 1.7, а – в) или нагрузки, вызывающей развитие расслоений (расчетные схемы на рис. 1.8, а – д). Энергетический же подход Гриффитса [124] можно считать, что имеет локальный характер, поскольку он определяется изменением энергии возле кончика трещины (возле точки « $+a$ » на рис. 1.11, б) с учетом трехмерного распределения напряжений (а не усилий и моментов). В отмеченной ситуации заключается принципиальное отличие результатов в рамках третьей основной задачи от результатов первой основной задачи, так как в последней задаче применяется критерий разрушения, имеющий *интегральный характер*; обсуждение *интегрального характера* критерия разрушения, применяемого в первой основной задаче, представлено в начале п. 1.5.3.1.

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, ниже сформулируем результаты краткого анализа балочного подхода (beam approximation) для **третьей основной задачи (Задачи III п. 1.5.1)** в виде следующих выводов.

*Вывод 1.* При любом значении параметра тонкостенности  $h/a$  (рис. 1.9) при балочном подходе *возникает неустраняемая погрешность* в связи с формулировкой граничных условий вблизи точки « $+a$ » (рис. 1.11, б) в рамках прикладной теории тонкостенных систем; отмеченная *неустраняемая погрешность* в последующем входит и в *конечные результаты*.

*Вывод 2.* В рамках балочного подхода *невозможно избежать* указанной в Выводе 1 неустраняемой погрешности, так как в рамках балочного подхода *невозможно строго* сформулировать граничные условия для сопряжения с торцом отщепленного слоя вблизи точки « $+a$ » (рис. 1.11, б); обсуждаемые граничные условия должны как бы соответствовать «упругой заделке».

Вышеизложенными сведениями ограничимся при кратком анализе балочного подхода (beam approximation) для третьей основной задачи (Задачи III п. 1.5.1).

**1.5.3.3. Общие выводы.** В предыдущих пунктах (п.1.5.3.1 и 1.5.3.2) сравнительно подробно изложен краткий анализ балочного подхода для первой основной задачи (п. 1.5.3.1) и для третьей основной задачи (п. 1.5.3.2). Целесообразно, по-видимому, от-

метить, что в настоящее время нет необходимости проводить соответствующий анализ для второй основной задачи (задачи о послекритическом деформировании, п. 1.5.1), так как существенные результаты для этой задачи еще не получены. В связи с этим ниже сформулируем общие выводы по анализу балочного подхода для первой и третьей основных задач.

*Вывод 1.* Балочное приближение является *сугубо приближенным подходом* и приводит к *неустранимым погрешностям*, которые в ряде случаев (например, в третьей основной задаче) входят и в *конечные результаты*. В связи с этим для определения достоверности (в рамках точности, принятой в механике материалов) результатов, получаемых с применением балочного подхода, необходимы, по крайней мере, дополнительные исследования.

*Вывод 2.* При ряде значений параметра тонкостенности  $h/a$  (рис. 1.9) для первой основной задачи *можно ожидать*, что результаты балочного подхода (первый общий подход) могут совпадать с результатами строгой трехмерной теории (второй общий подход), так как в первой основной задаче применяется критерий разрушения, имеющий «интегральный» характер и не определяемый только локальными напряжениями возле точки « $+a$ » на рис. 1.11, б.

*Вывод 3.* При любых значениях параметра тонкостенности  $h/a$  (рис. 1.9) для второй основной задачи *не логично ожидать*, что результаты балочного подхода (первый общий подход) могут совпадать с результатами строгой трехмерной теории (второй общий подход), так как во второй основной задаче применяется критерий образования или развития отслоений, имеющий «локальный» характер и определяемый локальными напряжениями возле точки « $+a$ » на рис. 1.11, б.

Вышеизложенными сведениями и соображениями ограничимся при кратком анализе балочного подхода (beam approximation). Безусловно, целесообразно отметить, что вышеизложенный анализ соответствует точке зрения автора настоящего обзора; в связи с этим указанный анализ может быть дополнен информацией, соответствующей точке зрения других авторов.

**1.6. О неклассических проблемах механики разрушения.** Рассматриваемая в настоящем обзоре механика разрушения материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, относится к неклассическим проблемам механики разрушения. Классификация проблем механики разрушения с выделением классических и неклассических проблем, по-видимому, впервые была опубликована в 1990 г. и изложена во Введении в 4-х томную монографию [77], которое включено в Т. 1 указанной коллективной монографии.

Как уже неоднократно отмечалось в настоящем обзоре, общеизвестная классическая публикация Гриффитса [124] за 1920 г. определила новое научное направление в естествознании – механику разрушения, которое явилось одним из наиболее активно разрабатываемых направлений фундаментального и прикладного характера в механике во второй половине XX века и в начале XXI века. Это направление по актуальности, фундаментальности и по применимости к инженерному делу в наше время может быть сравнимо, по-видимому, лишь с механикой композитов. Подтверждением этому служит тот факт, что в середине второй половины XX века созданы две 8-и томные коллективные монографии [117, 121] энциклопедического характера, которые посвящены двум вышеуказанным научным направлениям.

В настоящий пункт (п. 1.6) включена краткая информация о классификации проблем механики разрушения (классические и неклассические проблемы) применительно к проблемам и критериям разрушения. Целесообразность выделения классических и неклассических проблем механики разрушения может быть объяснена, например, хотя бы тем, что в рамках классической (обычно принятой) механики разрушения в ряде случаев получают физически некорректные результаты; примеры таких физически некорректных результатов в общедоступной форме представлены в статье [141]. Также в п. 1.6 приведена краткая информация о семи различных неклассических проблемах механики разрушения, разрабатываемых автором обзора и его коллегами в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины. По стилю изложения вышеизложенная информация, включенная в настоящий пункт (п. 1.6), соответствует аналогичной информации, которая включена в обзорную статью

[152 ]. Целесообразность включения рассматриваемой информации в настоящую обзорную статью определялась стремлением предоставить читателю более расширенную информацию о ряде неклассических проблем механики разрушения и о месте, которое занимает механика разрушения при сжатии вдоль трещин, среди отдельных неклассических проблем механики разрушения.

**1.6.1. О проблемах и критериях механики разрушения.** В настоящее время, по-видимому, можно считать, что в механике разрушения (в широком смысле) определились основные концепции и подходы к формулировке критериев разрушения. *К основным концепциям и подходам в механике разрушения (в широком смысле) можно отнести следующие результаты.*

1. Фундаментальная теория хрупкого разрушения Гриффитса.
2. Концепция квазихрупкого разрушения (Ирвин, Орован и другие).
3. Энергетический критерий разрушения Гриффитса или эквивалентный ему (но более легко реализуемый) силовой критерий Ирвина.
4. Концепция не зависящего от контура интегрирования интеграла (J-интеграл, G-интеграл, Эшелби, Черепанов, Райс).
5. Критерий критического раскрытия трещин.

Вышеуказанные концепции и подходы предполагают, что определенные условия выполняются или реализуются при определенных условиях, к которым можно отнести *следующие условия.*

*Условие 1.* Растяжение или сдвиг возникает в окрестности трещин, при этом **исключается действие сжатия.**

*Условие 2.* В процессе деформирования тела с трещинами не возникают резкие изменения конфигурации тела (например, явление потери устойчивости не предшествует явлению разрушения тела с трещинами).

*Условие 3.* В процессе деформирования тела с трещинами не возникают резкие изменения характера деформирования до разрушения (например, отсутствует изменение граничных условий в процессе деформирования).

Необходимо отметить, что **вышеуказанное Условие 1 является принципиальным, так как в случае сжатия вдоль трещин все вышеизложенные концепции и подходы не работают.**

В ситуации, соответствующей *Условию 2*, все вышеизложенные концепции и подходы могут работать, но предварительно необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние с учетом резкого изменения конфигурации тела в процессе деформирования. В настоящее время в подавляющем большинстве исследований по механике разрушения (в широком смысле) вышеуказанный анализ не проводится.

В ситуации, соответствующей *Условию 3*, все вышеизложенные концепции и подходы могут работать, но предварительно необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние тела с учетом резкого изменения характера деформирования до разрушения (например, с учетом изменения граничных условий в процессе деформирования). В настоящее время в подавляющем большинстве исследований по механике вышеуказанный анализ не проводится.

Учитывая вышеизложенные соображения, указанные результаты и проблемы, соответствующие отмеченным пяти концепциям или подходам и полученные при выполнении *Условий 1 – 3*, можно рассматривать как *классические проблемы механики разрушения*, к которым можно отнести в настоящее время следующие исследования.

1. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для тел сложной формы, содержащих трещины, при различных силовых, тепловых и электромагнитных воздействиях. При этом для получения указанных результатов применяются аналитические, численные (с привлечением ЭВМ), экспериментальные и экспериментально-теоретические методы. Результаты этих исследований (коэффициенты интенсивности напряжений) совместно с отмеченными критериями разрушения дают необходимую информацию о разрушении материалов и элементов конструкций в тех случаях, когда применимы эти критерии разрушения.

2. Экспериментальное исследование сложных случаев разрушения материалов и элементов конструкций, заканчивающееся в большинстве случаев результатами описательного характера без должного анализа и попыток формулировки новых критериев разрушения, соответствующих рассматриваемым явлениям.

Следует отметить, что в настоящее время подавляющее число публикаций относится к классическим проблемам механики разрушения в указанном выше смысле. По-видимому, в связи с отмеченной ситуацией многие ученые пришли к выводу о существовании идейного кризиса в механике разрушения на современном этапе ее развития. Также следует отметить, что второе направление в классических проблемах механики может служить первым этапом в исследованиях неклассических проблем механики разрушения.

К *неклассическим проблемам механики разрушения* можно условно отнести следующие исследования.

1. Изучение новых механизмов разрушения, которые не описываются в рамках основных пяти вышеуказанных концепций и подходов (с учетом выполнения *Условий 1 – 3*), при надлежащем анализе и попытке формулировки новых критериев разрушения, соответствующих рассматриваемым явлениям.

2. Исследование отдельных классов задач для материалов и элементов конструкций применительно к изучаемым новым механизмам разрушения и с привлечением соответствующих специально сформулированных критериев разрушения.

Как уже отмечалось, изложенная выше классификация (разделение на классические и неклассические проблемы) является достаточно условной и не всегда однозначной. Все же эта классификация сравнительно четко определяет направленность исследований и форму их новизны, что представляется весьма существенным при анализе результатов исследований. Также следует отметить, что число механизмов разрушения существенно расширяется при учете микроструктуры материалов на различном уровне ее описания. Эта особенность, прежде всего, относится к механике разрушения композитов, для которых характерным является учет микроструктуры на различных уровнях.

Для ученых, занимающихся исследованием неклассических проблем и механизмов разрушения, является характерным применение весьма приближенных расчетных схем и моделей; в случае композитных материалов такие приближенные расчетные схемы и модели применяются для анализа разрушения в микроструктуре композитов. Применение приближенных расчетных схем и моделей приводит к существенным количественным погрешностям, а во многих случаях и к качественным отличиям; следовательно, при помощи приближенных схем и моделей весьма затруднительно выполнить надежный анализ неклассических проблем и механизмов разрушения. Отмеченная ситуация определяет существенное значение результатов по исследованию неклассических проблем и механизмов разрушения, которые получены при достаточно строгих расчетных схемах и моделях.

**1.6.2. О разработке некоторых неклассических проблем механики разрушения.** Сотрудники отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ проводят исследования по неклассическим проблемам механики разрушения уже более 40 лет. Ниже в настоящем пункте кратко укажем основные результаты, полученные за 1967 – 2011 гг. по следующим 7-и направлениям неклассических проблем механики разрушения сотрудниками указанного отдела и их коллегами.

*1. Разрушение при сжатии вдоль армирующих элементов в композитных материалах.* Результаты получены для волокнистых и слоистых композитов при хрупком и пластическом разрушении в рамках моделей однородного и кусочно-однородного материалов, когда начало (старт) разрушения определяется потерей устойчивости во внутренней структуре материала. Основные результаты представлены в монографиях [24, 25, 36, 37] и в статьях, которые указаны в списках литературы в отмеченных монографиях. Исследования проведены с привлечением основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, изложенной, например, в монографиях [34, 135]. Результаты по рассматриваемому направлению исследования неклассических проблем механики разрушения также представлены в

ряде обзорных статей, из которых целесообразно, в виде примера, отметить обзорную статью [106] за 2001 г.; кроме того, еще в 1992 г. в специальном выпуске журнала «*Applied Mechanics Reviews*» (США) под названием «*Micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research*» (vol. 45, № 2. – P. 13 – 101) обсуждались полученные к тому времени результаты по этому направлению.

2. *Разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов.* Результаты получены для слоистых и однонаправленных волокнистых композитов, когда начало (старт) разрушения определяется механизмом локальной потери устойчивости возле нагруженного сжатием торца композита. Ряд результатов получен в рамках плоской задачи для слоистых композитов в рамках модели кусочно-однородного материала при хрупком разрушении, основные результаты получены в рамках модели однородного материала; информация об этих исследованиях представлена в монографиях [36, 37]. Исследования проведены с привлечением трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, изложенной, например, в монографиях [34, 135].

3. *Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии вдоль армирующих элементов в композитах.* В рамках модели композитных материалов с искривлениями во внутренней структуре в качестве критерия разрушения принято достижение внутренними напряжениями, которые являются самоуравновешенными в пределах каждого периода искривлений, пределов прочности для армирующих элементов или матрицы. Исследования проведены для слоистых и волокнистых композитов в рамках континуальных теорий и модели кусочно-однородной среды для хрупкого разрушения с привлечением основных соотношений трехмерной линейной теории упругости для статических задач. Основные результаты представлены в монографиях [36, 37, 95]; причем монография [95] всецело посвящена изложению механики композитов с искривленными структурами. Результаты по рассматриваемому направлению исследования неклассических проблем механики разрушения (в рамках механики композитов с искривленными структурами) также представлены в ряде обзорных статей, из которых целесообразно, в виде примера, отметить обзорную статью [96] за 2004 г.

4. *Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин.* Основные результаты получены с привлечением основных соотношений трехмерной линеаризованной теории упругости для сжимаемых и несжимаемых материалов с упругими потенциалами общей структуры. Сформулирован критерий разрушения, построены точные решения основных плоских (с привлечением аппарата теории функций специальным образом введенных комплексных переменных) и пространственных (с привлечением аппарата гармонического потенциала) статических задач. Разработана теория движущихся с постоянной скоростью трещин. При стремлении начальных (остаточных) напряжений к нулю вышеуказанные результаты переходят в общеизвестные результаты классической механики разрушения. Сформулированы новые качественные и количественные эффекты механического характера. Основные результаты представлены в монографиях [32, 36, 37] и во 2-м томе 4-х томной коллективной монографии [77]. Результаты по рассматриваемому направлению исследования неклассических проблем механики разрушения также представлены в ряде обзорных статей, из которых целесообразно отметить, в качестве примера, статью [142] за 2011 г. по обзору результатов по построению точных решений задач механики движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями; обзор результатов по построению точных решений смешанных задач линеаризованной механики деформируемого тела представлен в обзорной статье [151] за 2004 г.

5. *Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин.* По этой проблеме основные результаты и наиболее полный их анализ представлен в настоящем обзоре. Основные результаты также представлены в монографиях [32, 36, 37] и в 4-м томе (книга 1) 4-х томной коллективной монографии [77]. Кроме того, результаты по рассматриваемому направлению исследований неклассических проблем механики разрушения представлены в ряде обзорных статей, например, в [131] за 1992 г. и в [146] за 2004 г.



6. *Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещин)*. Осуществлена постановка указанных задач, которые рассматриваются как нелинейные задачи (линейные динамические уравнения теории упругости и нелинейные граничные условия, соответствующие учету взаимодействия берегов трещин) и разработаны методы их решения. Основные результаты изложены в монографии – Т. 4 (книга 2) 4-х томной коллективной монографии [77]. Также изложению и анализу результатов по рассматриваемому направлению исследований неклассических проблем механики разрушения посвящены обзорные статьи [170] за 2001 г. и [171] за 2002 г., а также частично обзорная статья [152] за 2013 г.

7. *Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости*. При построении механики разрушения в указанной ситуации было выделено два этапа. Первый этап состоит в исследовании потери устойчивости тонкостенного элемента конструкции с трещиной при растяжении; для исследования был предложен аналитический метод, основанный на применении для «бесконечной» области с трещиной линеаризованной прикладной теории устойчивости пластин и оболочек. Второй этап состоит в анализе влияния предварительной потери устойчивости на величину разрушающей нагрузки; на этом этапе результаты были получены с привлечением специально поставленных экспериментов двух типов. Основные результаты представлены в Т. 4 (книга 1) 4-х томной коллективной монографии [77]. Также изложению и анализу результатов по рассматриваемому направлению исследований неклассических проблем механики разрушения посвящена частично обзорная статья [146] за 2004 г.

Целесообразно отметить, что результаты по неклассическим проблемам механики разрушения композитов, кроме вышеуказанных публикаций, также представлены в Т. 5 коллективной 12-и томной монографии [70].

Результаты по проблемам 1 – 3 относятся только к механике разрушения композитных материалов, для которых характерно, как уже отмечалось, учет микроструктуры на различных уровнях ее описания; результаты по проблемам 4 – 7 в равной мере относятся к механике разрушения композитов и к механике разрушения металлов и сплавов.

Необходимо отметить, что для исследований сотрудников Института механики по вышеуказанным семи неклассическим проблемам механики разрушения (по сравнению с исследованиями других авторов) характерны следующие две особенности.

1. Исследования выполнены с привлечением наиболее строгих и точных постановок в рамках механики деформируемых тел. Так, в случае исследования явления потери устойчивости применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел (например, [34, 135]), а в случае исследования напряженно-деформированного состояния применялись трехмерные уравнения статики деформируемых тел. Это замечание полностью относится к проблемам 1 – 3, связанным с механикой разрушения композитов, и к проблемам 4 – 6, связанным с механикой разрушения композитов и механикой разрушения металлов и сплавов. Применительно к проблеме 7 строгость постановки и методов исследования определяется последовательным применением двумерной линеаризованной теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций.

2. Исследования по проблемам 1 – 3, относящимся к механике разрушения композитов, выполнены как в рамках континуального приближения (модель однородного ортотропного тела с приведенными постоянными – трехмерная постановка), так и в рамках модели кусочно-однородной среды (трехмерные уравнения для наполнителя и связующего, условия непрерывности на границах раздела). Необходимо отметить, что указанная модель кусочно-однородной среды (в трехмерной постановке) является наиболее строгой и точной в рамках механики деформируемых тел применительно к композитным материалам; некоторые уточнения (конкретизация результатов) возможны лишь за счет рассмотрения других граничных условий на поверхностях раздела и других определяющих уравнений для наполнителя и связующего.

Все же необходимо отметить, что вышеуказанные неклассические проблемы и соответствующие механизмы разрушения не получили надлежащего освещения в обобщающей монографической литературе энциклопедического характера по механике разрушения в широком смысле. Так, они вовсе не рассматривались в восьмитомной коллективной монографии энциклопедического характера по разрушению [121].

Необходимо отметить, что издательством Elsevier анонсировалось издание в 2006 г. 6-и томной коллективной монографии [118] по композитным материалам и 10-и томной коллективной монографии [119] по разрушению; к сожалению, с содержанием монографий [118, 119] автор настоящего обзора имел возможность ознакомиться только по рекламным материалам. Как представляется из вышеуказанного ознакомления, в монографиях [118, 119] неклассические проблемы механики разрушения также не нашли надлежащего отражения.

Анализ полученных результатов по вышеуказанным 7-ми неклассическим проблемам механики разрушения представлен в обобщающих обзорных статьях [136, 138, 140]; при этом статья [138] подготовлена по заказу журнала «ANNALS of the European Academy of Sciences» в связи с награждением BLAISE PASCAL MEDAL в области науки о материалах Европейской Академии наук в 2007 г. Лекция автора (written presentation) в связи с награждением медалью BLAISE PASCAL опубликована в виде статьи [139]; обобщающая обзорная статья [140] является расширенным вариантом статьи [138], подготовленной, как уже выше отмечалось, по предложению Редакционной коллегии журнала «ANNALS of the European Academy of Sciences». Наиболее полное изложение результатов, полученных по первым пяти неклассическим проблемам механики разрушения из 7-и вышеуказанных проблем, представлено в 2-х томной монографии [37]. Кроме того, обсуждаемые результаты по 7-и неклассическим проблемам механики разрушения, начиная с 1984 г., регулярно представлялись на Конгрессах по разрушению (ICF); в списке литературы к настоящей статье в качестве примеров указаны доклады [128] на ICF6, [130] на ICF7, [132] и [182] на ICF9.

Целесообразно отметить, что в статье [143] на основе приведенного анализа доказано, что результаты сотрудников Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ по неклассическим проблемам механики разрушения *уже признаны мировым научным сообществом.*

В настоящее время наряду с Институтом механики им. С.П.Тимошенко НАНУ исследования по 7-и вышеуказанным неклассическим проблемам механики разрушения также проводятся в следующих научных центрах:

Centre for Micro- and Nanomechanics, University of Aberdeen, (г. Абердин, Шотландия);

Yildiz Technical University (г. Стамбул, Турция);

Centro de Investigacion Cientifica de Yucatan (г. Мерида, Мексика);

Харьковский авиационный институт (г. Харьков, Украина).

Вышеизложенными (в п. 1.6 настоящей статьи) сведениями ограничимся при весьма краткой характеристике неклассических проблем механики разрушения, в которые также входит и научное направление (проблема 5), анализу результатов которого посвящена настоящая обзорная статья.

В заключение к сведениям, изложенным в первом разделе настоящего обзора, необходимо подчеркнуть, как уже отмечалось во вводной части, что целью первого раздела было изложение рассматриваемых вопросов без применения соответствующего математического аппарата, что дает возможность ознакомиться с рассматриваемыми проблемами представителям широких кругов специалистов.

## **2. Информация о полученных результатах.**

Во втором разделе в весьма краткой форме излагаются сведения о полученных результатах по рассматриваемым проблемам с привлечением первого общего подхода (балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2) и второго общего подхода (применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, п. 1.5.2). *Целью второго раздела является формирование общего представления о полученных результатах, учитывая количественную и, особенно, качественную стороны излагаемой информации; в связи с этим основные результаты представлены в аннотированной форме и лишь в отдельных случаях, при необходимости более конкретного изложения, приводятся конкретные сведения.* Применение аннотированной формы изложения предопределяется еще и той ситуацией, что по рассматри-

ваемым в настоящем обзоре проблемам имеется сравнительно большое число публикаций в периодических изданиях и трудах конференций, относящихся к ряду научных и научно-технических направлений. При изложении во втором разделе также используются сведения, представленные в первом разделе в достаточно общедоступной форме.

Во вводной части второго раздела целесообразно еще остановиться на терминологии, которая применяется при исследованиях в механике расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах. Так, применяется терминология «образование или возникновение расслоений или отслоений» и «развитие расслоений или отслоений»; все же в вышеуказанных двух (якобы различных на первый взгляд) случаях рассматривается начальный этап изучаемого явления расслоения или отслоения, которое возникает возле различного рода дефектов в границе раздела (interface) слоев. Отмеченный начальный этап расслоения или отслоения возникает, например, при разрушении слоя связующего (расчетная схема на рис. 1.7, б, в), возле трещин в границе раздела слоев (расчетные схемы на рис. 1.2, а – д) и возле границы ранее возникших расслоений или отслоений (расчетные схемы на рис. 1.8, а – д). Развитие расслоений или отслоений в четко определенном смысле в вышеуказанных трех случаях не рассматривается; для исследования развития расслоений или отслоений необходимо проводить анализ нелинейного деформирования материала с учетом резкого изменения конфигурации тела (по существу, в рамках второй основной задачи, сформулированной в п. 1.5.1). Учитывая вышеизложенное обсуждение применяемой терминологии, в дальнейшем этот вопрос обсуждать не будем.

**2.1. О результатах, полученных с привлечением первого общего подхода (балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2).** Как отмечалось в п. 1.5.2, создание балочного приближения (подхода) началось с публикации Обреимова [203] за 1930 г.; терминология «балочное приближение, балочный подход» в научных публикациях начала применяться, начиная с публикаций [57, 66 – 69] за 1965 – 1970 гг.

В настоящее время балочный подход получил повсеместное применение при исследовании различных проблем механики разрушения и механики композитных материалов; количество научных публикаций, результаты в которых получены с привлечением балочного подхода, действительно огромное. В списке литературы к настоящему обзору указаны лишь отдельные публикации, в которых применялся балочный подход; дополнительную информацию можно получить из списков литературы к монографиям и обзорным статьям, указанным в списке литературы к настоящему обзору.

Целесообразно отметить, что результаты анализа балочного подхода (балочного приближения, beam approximation) применительно к **первой основной задаче** (п. 1.5.3.1 и соответствующие *Выводы* 1 – 5), применительно к **третьей основной задаче** (п. 1.5.3.2 и соответствующие *Выводы* 1 и 2) и **Общие выводы** (п. 1.5.3.3) в равной мере относятся ко всем публикациям, которые рассматриваются в настоящем пункте (п. 2.1).

Из списка литературы к настоящему обзору можно указать публикации, в которых основные результаты получены с привлечением балочного подхода, это публикации [6 – 18, 20 – 23, 51, 57 – 63, 65 – 69, 71, 78 – 82, 84 – 87, 90, 103 – 105, 112 – 116, 120, 122, 193 – 196, 203]; приведенный список может быть существенно расширен, однако анализ основных публикаций с привлечением балочного подхода не является целью настоящего обзора. В вышеотмеченный перечень публикаций входят монографии [113, 194, 196], результаты которых получены с применением балочного подхода, и также монографии [23] (глава 5) и [86] (глава 1), отдельные результаты которых также получены с применением балочного подхода. В вышеотмеченный список публикаций также входят статьи [6, 8, 12, 18, 22, 81], которые имеют характер обзорных статей и содержат расширенные списки литературы. Условно все вышеотмеченные публикации можно разделить на две группы: первая группа включает публикации, относящиеся к механике материалов, а вторая группа включает публикации, относящиеся к механике элементов конструкций; ниже в настоящем пункте (п. 2.1) рассмотрим отдельно указанные публикации и соответствующие результаты.

**2.1.1. Публикации и результаты, относящиеся к механике материалов.** К механике материалов из вышеотмеченного списка можно отнести монографии [113, 196] и [86, глава 1], а также публикации в периодических изданиях [7 – 11, 15, 16, 20 – 21, 51, 57, 65 – 69, 78 – 82, 84, 112, 114, 116, 120, 122, 203].

Как уже отмечалось во Введении (п. 1.1) в настоящую обзорную статью и в п. 1.4.2, первой публикацией по рассматриваемому направлению была статья [203] Обреимова за 1930 г., в которой исследовано расслоение или отслоение слоя слюды вблизи торцевой трещины под действием раздирающей силы, приложенной перпендикулярно к образцу слюды; примерная расчетная схема, принятая в [203], представлена на рис. 1.7, а. В [203] оценена величина удельной работы межслойного разрушения (как бы следуя энергетическому подходу Гриффитса [124]); при этом при определении удельной работы с учетом отщепляемого слоя для определения напряженно-деформированного состояния слоя применялась приближенная теория пластин. Таким образом, в [203] для отщепляемого слоя применялась приближенная теория пластин, построенная с введением общеизвестных гипотез, и напряженно-деформированное состояние слоя в связи с этим характеризовалось величинами усилий, моментов и перерезывающих сил. Вышеприведенные сведения позволяют считать Обреимова [203] инициатором создания балочного подхода или балочного приближения (beam approximation) применительно к механике материалов; все же терминология «балочное приближение, балочный подход, beam approximation» в научную литературу была введена впервые, по-видимому, публикациями [57, 66 – 69] за 1965 – 1970 гг.

В последующие годы балочное приближение (первый общий подход), достаточно последовательно и в общей форме изложенное в п. 1.5.2, применялось многими исследователями применительно к различным задачам, результаты которых представлены в многочисленных публикациях. Все же можно сформулировать общую процедуру проведения таких исследований; для более четкого изложения рассмотрим обсуждаемую процедуру отдельно для первой основной задачи и третьей основной задачи, сформулированных в п. 1.5.1.

**Так, в случае первой основной задачи (Задача I, п. 1.5.1, исследование локальной потери устойчивости состояния равновесия части материала, окружающего трещину)** обсуждаемая процедура включает следующие позиции, соответствующие исследованию потери устойчивости при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях.

1. Возле трещин выделяется или вычленяется (условно) часть материала, которая считается или моделируется тонкостенным элементом. В случае однородных материалов такие тонкостенные элементы для примера отмечены штриховкой применительно к расчетным схемам на рис. 1.1, в – д. В случае слоистых композитных материалов такие тонкостенные элементы для примера отмечены более густой штриховкой применительно к расчетным схемам на рис. 1.2, в – д.

2. Для анализа устойчивости указанным выше способом выделенных тонкостенных элементов применяются различные прикладные теории устойчивости тонкостенных систем, построенные с привлечением общеизвестных гипотез; в связи с этим напряженно-деформированное состояние обсуждаемых выделенных элементов характеризуется величинами моментов, усилий, прогибов, углов поворота и т.п.

3. Анализ устойчивости указанным выше способом выделенного тонкостенного элемента проводится для случая граничных условий шарнирного опирания или граничных условий жесткого защемления на торцах этого тонкостенного элемента.

Три вышеизложенные позиции присущи всем публикациям, результаты которых применительно к **первой основной задаче (Задача I, п. 1.5.1)** получены на основании первого общего подхода (п. 1.5.2, балочный подход, балочное приближение, beam approximation) в случае механики материалов. Краткий и достаточно последовательный анализ такого рода результатов, включая и соображения об их достоверности, приведен в п. 1.5.3.1.

**В случае третьей основной задачи (Задача III, п. 1.5.1, исследование механики расслоения или отслоения в слоистых композитных материалах)** обсуждаемая процедура включает следующие позиции, соответствующие исследованиям при сжатии вдоль дефектов и других нагрузках.

1. Отслаиваемый или отщепляемый слой материала считается или моделируется тонкостенным элементом, который, для примера, на рис. 1.7, б, в указан штриховкой; заметим, что указанный тонкостенный элемент уже предполагается криволинейным, что и отмечено на рис. 1.7, б, в, а также на рис. 1.11, а, б.

2. Для определения напряженно-деформированного состояния и анализа устойчивости указанным выше способом выделенных криволинейных тонкостенных элементов применяются различные прикладные теории тонкостенных систем, построенные с привлечением общеизвестных гипотез; в связи с этим напряженно-деформированное состояние выделенных криволинейных элементов характеризуется величинами моментов, усилий, прогибов, углов поворота и т.п.

3. При определении напряженно-деформированного состояния и потенциальной энергии деформации выделенного криволинейного тонкостенного элемента анализ проводится для случаев граничных условий жесткого защемления или шарнирного опирания на торцах элемента; в современных публикациях, например, [12, стр. 590, 5-я строка снизу], применяются граничные условия жесткого защемления.

4. Для определения условий роста расслоения или отслоения (фактически условия роста трещины вдоль границы раздела) применяется в той или иной форме энергетический критерий разрушения Гриффитса [124]; при этом изменение потенциальной энергии деформации выделенного криволинейного элемента вычисляется (в соответствии с вышеизложенными позициями 1 – 3) через величины моментов, усилий, прогибов, углов поворота и т.п. – величины прикладных теорий тонкостенных систем.

Четыре вышеизложенные позиции присущи всем публикациям, результаты которых применительно к **третьей основной задаче (Задача Ш, п. 1.5.1)** получены на основании первого общего подхода (п. 1.5.2, балочный подход, балочное приближение, beam approximation) в случае механики материалов. Краткий и достаточно последовательный анализ такого рода результатов, включая и соображения об их достоверности, приведен в п. 1.5.3.2.

По-видимому, наиболее общую в настоящее время теорию расслоений в слоистых композитных материалах, которая построена на основе балочного подхода (балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2), предложил В.В.Болотин; эти результаты изложены в обобщающей статье [12], в списке литературы к которой указаны основные публикации, примыкающие к [12]. Из списка публикаций, указанных в начале настоящего пункта (п. 2.1.1), к результатам [12] примыкают публикации [7 – 11, 15, 65, 78 – 81, 112, 114] и ряд других публикаций. Необходимо отметить, что результаты анализа балочного подхода (балочное приближение, beam approximation) применительно к **третьей основной задаче** (п. 1.5.3.2 и соответствующие *Выводы* 1 и 2) и Общие выводы (п. 1.5.3.3) в равной мере относятся и к публикации [12], а также к примыкающим к ней публикациям.

**2.1.2. Публикации и результаты, относящиеся к механике элементов конструкций.** Из списка литературы к настоящей обзорной статье перед пунктом 2.1.1 указаны публикации, результаты которых получены с привлечением балочного подхода (балочного приближения, beam approximation, п. 1.5.2) применительно к механике материалов и механике элементов конструкций; указанные публикации представлены в виде примера, число их может быть существенно расширено. Условно из отмеченного перечня публикаций можно выделить публикации, относящиеся к механике элементов конструкций; условно по той причине, что в механике разрушения и в механике композитов вопросы механики материалов и механики элементов конструкций очень тесно связаны между собой. Учитывая вышеотмеченное, можно считать, что из перечня публикаций, указанных перед п. 2.1.1, публикации [6, 12 – 14, 17, 18, 22, 23, 58 – 63, 71, 78, 85, 87, 103 – 105, 114] относятся к механике элементов конструкций.

Исследования по механике разрушения элементов конструкций отличаются от исследований по механике разрушения материалов, по-видимому, наряду с рядом других позиций также следующими двумя позициями. Первая позиция заключается в том, что в механике разрушения элементов конструкций учитывается *конечная толщина*, т.е. рассматриваются расчетные схемы типа на рис. 1.3, а, б. Вторая позиция заключается в том, что в механике разрушения элементов конструкций учитывается их *геометрическая форма*, т.е. рассматриваются стержни, пластины, оболочки и т.д. конкретной геометрической формы. С учетом двух вышеуказанных позиций в механике разрушения элементов конструкций применительно к проблемам настоящей обзорной статьи также

рассматриваются вопросы, относящиеся к **первой основной задаче (Задача I, п. 1.5.1)** и к **третьей основной задаче (Задача III, п. 1.5.1)**, следуя процедурам п. 2.1.1. Ниже, принимая во внимание вышеизложенные соображения, рассмотрим ряд конкретных публикаций и результатов.

Для проблем, рассматриваемых в настоящей обзорной статье, применительно к механике элементов конструкций в хронологическом аспекте, по-видимому, первой была публикация Л.М. Качанова [60] за 1975 г., в которой исследовано отслоение внутреннего тонкого слоя в толстостенной слоистой цилиндрической трубе кругового поперечного сечения, которая нагружена равномерным внешним давлением. Расчетные схемы, применяемые в [60], схематически представлены на рис. 1.7, б, в.

В качестве дальнейшего шага в развитии рассматриваемых исследований, по-видимому, можно указать публикации [87] за 1979 г., [14] за 1980 г. и [84, 85] за 1983 г.; в этих публикациях рассмотрены вопросы устойчивости и расслоения сжатых стержней со сплошным и полым поперечным сечением. Следует отметить, что в этих исследованиях выполнен также анализ разрушения по типу «китайского фонарика», под которым понимается образование многих отслоений, выпучины которых расположены по периметру одного поперечного сечения. Также отметим публикацию [79] за 1980 г., в которой рассмотрен механизм разрушения слоистых композитов у свободного края.

В настоящее время по обсуждаемым проблемам в рамках механики элементов конструкций уже опубликован ряд обзорных и обобщающих статей, из которых целесообразно отметить следующие [12, 18, 22, 81, 114] и ряд других публикаций. Из указанных обзорных статей можно получить дополнительные сведения о публикациях, относящихся к рассматриваемому научному направлению.

Существенная часть публикаций посвящена исследованию устойчивости слоистых оболочек с межслоевыми трещинами и анализу роста расслоений или отслоений в этих оболочках; следует отметить, что в указанных исследованиях рассматриваются сферические и цилиндрические оболочки. Результаты таких исследований представлены, например, в публикациях [2, 13, 17, 58, 63, 71, 78, 104, 105] в периодических изданиях и в монографии [23] (глава 5, § 5); в краткой форме ниже рассмотрим эти публикации в хронологическом порядке.

В статье [13] исследована устойчивость сферических оболочек с расслоениями; по мнению авторов статьи [13], опубликованной в 1980 г., в ней впервые исследовано взаимодействие отслоения и основного элемента при их совместном выпучивании. В последующие годы с привлечением подхода, последовательно изложенного в [12], была рассмотрена устойчивость цилиндрических и сферических оболочек с расслоениями в статье [63], опубликованной в 1985 г., и в статье [78], опубликованной в 1988 г. Обзор такого типа результатов представлен в обзорных и обобщающих статьях [17, 114]; следует отметить, что исследования в этом направлении успешно развиваются, например, статья [17] за 2007 г.

В монографии [23], опубликованной в 1982 г., среди различных результатов в главе 5, §5, по-видимому, впервые исследована устойчивость круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, односторонне контактирующей со внутренней упругой средой, при внешнем равномерном давлении; указанная задача может моделировать устойчивость толстостенной оболочки с отсепленным внешним тонкостенным слоем. Внутренняя упругая среда моделируется винклеровым основанием, которое способно сопротивляться вдавливанию внешнего слоя, и не способно сопротивляться его отрыву. В силу моделирования взаимодействия отслоения односторонними связями возникает нелинейная задача устойчивости, для исследования которой применены численные методы. В списке литературы к монографии [23] указан ряд публикаций, результаты которых получены в рамках вышеизложенного подхода.

Исследования устойчивости сферических оболочек с расслоениями также были представлены в статьях [2, 58, 71], опубликованных в 1985 г. и в 1986 г., причем в [58] акцентировалось внимание на несущей способности таких оболочек.

В статье [105], опубликованной в 1988 г., исследовано влияние расслоений материала на устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки при осевом и радиальном давлении для случая кольцевых расслоений (трещин в границе раздела слоев, в interface). Необходимо отметить, что в [105] *не рассматривается* случай, когда при

потере устойчивости образовывается расслоение типа на рис. 1.6, б (нижняя граница слоя – близкое к симметричному деформированию); в [105] *рассматривается* случай, когда при потере устойчивости происходит деформирование по форме, близкой к изгибной типа на рис. 1.6, б (верхняя граница слоя – близкое к изгибному деформированию). В рассматриваемом в [105] случае для анализа «поврежденной» части оболочки применяется приближенная модель «суммарной жесткости»; в списке литературы к [105] указаны публикации [104, 193], относящиеся к формированию указанной приближенной модели.

Следуя [104,105, 193], в краткой форме представим основные положения приближенной модели «суммарной жесткости» в следующем виде. В области «повреждений»: приведенные жесткости на растяжение и сдвиг совпадают с соответствующими величинами для монолитной оболочки; изгибная жесткость и жесткость на кручение определяется суммой соответствующих жесткостей нескрепленных слоев, определяемых относительно срединных поверхностей каждого слоя; таким образом, в выражениях моментов инерции, определяющих изгибные и крутильные жесткости, отсутствуют слагаемые, которые появляются при переносе осей. При вышеизложенном подходе (в рамках модели «суммарной жесткости») на торцах каждого слоя из «поврежденной» части выбираются определенные граничные условия, как и **при первом общем подходе** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2).

Выше в достаточно краткой форме приведен анализ результатов по теории устойчивости оболочек с межслоевыми трещинами и по механике роста расслоений или отслоений возле межслоевых дефектов; анализ проведен, в качестве примера, для публикаций [2, 13, 17, 58, 63, 71, 78, 104, 105, 193] в периодических изданиях и монографии [23] (глава 5, §5). Несмотря на казалось бы различные постановки задач, применяемые модели и методы решения задач в указанных и всех родственных публикациях, все эти публикации выполнены на основе общего подхода – **первого общего подхода** (балочного подхода, балочного приближения, beam approximation, п. 1.5.2).

**2.1.3. Заключительные замечания к п. 2.1.** В настоящем пункте (п. 2.1) приведены общеизвестные публикации и изложенные в них результаты, относящиеся к механике материалов и элементов конструкций, применительно к механике разрушения и устойчивости для случаев: однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях или поверхностях; слоистых материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных в границах раздела слоев (interface); роста расслоений или отслоений в слоистых композитных материалах возле различных дефектов, расположенных в границах раздела слоев (interface) при различных нагрузках.

При различных моделях, постановках задач и используемых методах решения задач все вышеотмеченные публикации и результаты (наряду с весьма многочисленными публикациями и результатами, которые не рассматривались в настоящей обзорной статье) имеют принципиальную общность – все они получены на основе **первого общего подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2), хотя в значительном числе публикаций отмеченная ситуация и не отмечается при постановке задач. В связи с вышеизложенным весь анализ точности **первого общего подхода**, изложенный в п. 1.5.3 настоящей статьи, полностью относится и ко всем публикациям, рассмотренным в п. 2.1.

Основной вывод, относящийся к результатам, полученным с привлечением **первого общего подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2), заключается в том, что, по-видимому, **для определения степени достоверности таких результатов требуются дополнительные исследования.**

Дополнительно в заключительной части к рассматриваемому пункту (к п. 2.1) целесообразно еще раз подчеркнуть, что в этом пункте не ставилась цель – провести анализ и систематизацию всех основных публикаций, результаты которых получены с привлечением **первого основного подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation); да и реализация такой цели является весьма трудноосуществимой в силу достаточно большого числа подобного типа публикаций. Целью настоящего пункта (п. 2.1) было формирование общего вывода качественного характера применительно ко всем публикациям подобного типа, который сформулирован выше.

**2.2. О результатах, полученных с привлечением второго общего подхода (применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, п. 1.5.2).** Как отмечалось в п. 1.5.2, второй общий подход (применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел) в достаточно общей форме, по-видимому, впервые был предложен в публикациях [30, 31] за 1981 г. автора настоящего обзора, которые подготовлены в рамках трехмерной линеаризованной механики разрушения, например, статьи [28, 29] за 1980 г.; краткое описание и характеристика второго общего подхода представлены во второй части п. 1.5.2.

В настоящее время обсуждаемый второй общий подход получил применение, в основном, для двух классов задач: первый класс – сжатие однородных материалов вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, в рамках расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $a - \delta$ ; второй класс – сжатие вдоль слоев постоянной толщины слоистых композитных материалов, в поверхностях раздела (interface) которых расположены плоские трещины, в рамках расчетных схем, представленных на рис. 1.2,  $a - \delta$ . Обсуждаемые проблемы относятся к механике разрушения материалов и элементов конструкций, когда начало процесса разрушения (старт разрушения) определяется локальной потерей устойчивости состояния равновесия возле указанным образом расположенных трещин; при этом характер расположения трещин и плоскостей симметрии свойств материала отмечен также во второй части п. 1.5.2.

Безусловно, второй общий подход применим и к задачам механики расслоения или отслоения слоистых композитных материалов, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.7,  $b, в$  и на рис. 1.8,  $a - \delta$ . В этой ситуации второй общий подход может применяться в виде основных соотношений трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел, которые объединены с энергетическим подходом Гриффитса [124] или эквивалентным ему подходом Гриффитса [124] – Ирвина [192]. В настоящее время при вышеотмеченном подходе еще не получены конкретные результаты по механике расслоения или отслоения слоистых композитных материалов.

Таким образом, можно считать, что в настоящее время **второй общий подход** (п. 1.5.2) получил применение к различным проблемам **первой основной задачи (Задача 1)** в соответствии с терминологией п. 1.5.1; при этом основные результаты получены применительно к механике материалов и лишь отдельные публикации посвящены соответствующим проблемам механики элементов конструкций. В списке литературы к настоящему обзору указаны монографии и отдельные статьи, в которых изложены результаты, относящиеся к механике разрушения при сжатии вдоль трещин и полученные на основе **второго общего подхода**; безусловно, существуют отдельные статьи, относящиеся к обсуждаемому вопросу, которые по недосмотру автора обзора или по другой причине не попали в приведенный список литературы. Таким образом, можно считать, что основные результаты, относящиеся к механике разрушения при сжатии вдоль трещин и полученные с применением **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2), представлены в монографиях [32, 36, 37, 77 том 4 книга 2, 93] и в отдельных статьях [1, 3 – 5, 28 – 31, 35, 38 – 50, 52 – 56, 73 – 76, 94, 97 – 102, 107 – 111, 123, 125 – 132, 136, 138 – 140, 142, 143, 145 – 169, 172 – 190, 197 – 202, 204, 206 – 212].

В настоящем пункте (п. 2.2) ниже в *аннотированном виде* представлены основные результаты, которые получены в механике разрушения при сжатии вдоль трещин с привлечением **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2); при этом, в отличие от п. 2.1, *изложена систематизация и классификация* полученных результатов и *указаны ученые*, которые получили основные результаты по каждому разделу рассматриваемого научного направления.

**2.2.1. Общие вопросы.** В настоящем пункте (п. 2.2.1) в краткой форме рассмотрим ряд вопросов, которые имеют общий характер применительно ко **второму общему подходу** (вторая часть п. 1.5.2).

Прежде всего, необходимо отметить, что во **втором общем подходе** реализуется *рассмотрение в трехмерной постановке* напряженно-деформированного состояния во всем материале и в том числе, что является принципиально важным, *вблизи кончика трещины*. В связи с этим при применении **второго общего подхода** не возникают *неустраняемые погрешности* в окрестности вершины трещины (рис. 1.10,  $a, б$ ), которые характерны для **первого общего подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation) и которые отмечены в п. 1.5.3.



В механике разрушения при сжатии вдоль трещин в соответствии с **Общей концепцией** (п. 1.2.2) начало (старт) процесса разрушения материала определяется локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины. В связи с этим во **втором общем подходе** для реализации трехмерного рассмотрения вышеуказанного процесса разрушения (локальной потери устойчивости) применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел (сокращенно ТЛТУДТ).

В настоящее время существуют многочисленные публикации, в которых представлены различные варианты трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел; эти варианты также изложены и в ряде монографий, например, [24 – 27, 34, 135], автора настоящего обзора, в которых также проведен сравнительный анализ основных вариантов теории. Современный последовательный анализ построения различных вариантов трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел представлен в обзорной статье [137]; весьма краткий анализ для трехмерной линеаризованной теории упругой устойчивости со ссылкой на [137] также приведен в обзорной статье [144]. Из вышеуказанного сравнительного анализа [24 – 27, 34, 135, 137, 144] следует, что наиболее общим и строгим вариантом ТЛТУДТ является ТЛТУДТ при конечных (больших) докритических деформациях, который применим для высокоэластических материалов и сравнительно жестких материалов. В случае же сравнительно жестких материалов из сравнительного анализа следует, что наиболее строгими и последовательными вариантами ТЛТУДТ являются первый и второй варианты ТЛТУДТ при малых докритических деформациях по терминологии [24 – 27, 34, 135, 137, 144].

Следует отметить, что в механике разрушения при сжатии вдоль трещин возникает однородное докритическое состояние, для которого в случае упругих, пластических и вязко-упругих материалов имеют место условия (1.3); сравнительно последовательно обсуждение отмеченной ситуации представлено в п. 1.2.2. Для однородного докритического состояния в монографиях [34, 135] и в других публикациях автора обзора основные соотношения ТЛТУДТ изложены в единой общей форме для варианта ТЛТУДТ при конечных докритических деформациях, а также для первого и второго вариантов ТЛТУДТ при малых докритических деформациях. Учитывая вышеизложенные соображения и сведения, основные результаты по механике разрушения при сжатии вдоль трещин, полученные в рамках **второго общего подхода** и анализируемые в настоящем пункте (п. 2.2), построены с привлечением вышеуказанного общего варианта ТЛТУДТ (единая общая форма ТЛТУДТ для теории конечных (больших) докритических деформаций, а также первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций применительно к случаю однородных докритических состояний).

В дальнейшем, принимая во внимание вышеизложенные сведения по ТЛТУДТ частично исторического характера, при ссылке на ТЛТУДТ будем для сокращения объема только отмечать монографии [34, 135], хотя для полноты информации целесообразно было бы отмечать [24 – 27, 34, 135, 137, 144] и целый ряд других публикаций. Также целесообразно отметить, что в рамках **второго общего подхода** при получении результатов, анализируемых в настоящем пункте (п. 2.1), существенно использованы общие решения ТЛТУДТ при однородных докритических состояниях, которые изложены в монографиях [34, 135] и в других публикациях. Указанные общие решения ТЛТУДТ [34, 135] для антиплоских, плоских и пространственных задач построены для материалов с определяющими уравнениями достаточно общей структуры; в связи с этим и полученные на их основе конкретные результаты также построены для материалов с определяющими уравнениями соответствующей общей структуры и лишь при необходимости численного анализа полученных конкретных результатов возникает потребность использовать определяющие уравнения частной структуры.

В механике разрушения материалов при сжатии вдоль трещин при применении **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) проводятся исследования хрупкого, пластического и вязко-упругого разрушений.

Под *хрупким* разрушением понимается ситуация, когда начало (старт) процесса разрушения отождествляется с локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины, при упругих деформациях.

Под *пластическим* разрушением понимается ситуация, когда начало (старт) процесса разрушения отождествляется с локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины, *при пластических деформациях*. При этом в силу *однородности* докритического состояния в рассматриваемом варианте механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин естественно подразумевается, что *весь материал* переходит в пластическую стадию деформирования.

Под *вязко-упругим* разрушением понимается ситуация, когда начало (старт) процесса разрушения отождествляется с локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины, *при вязко-упругих деформациях*.

Процедуры исследования каждого из вышеуказанных типов разрушения в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) имеют свои характерные особенности; ниже в краткой форме рассмотрим некоторые из таких особенностей.

При *хрупком разрушении* (локальная потеря устойчивости при упругих деформациях при принятом критерии разрушения) применяются динамические уравнения ТЛТУДТ, построенные для соотношений упругости достаточно общего вида. Поскольку рассматривается нагружение вдоль трещин «мертвыми» нагрузками, то в общем случае доказываемое выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования (метода Эйлера) [34, 135] и, таким образом, приходим к бифуркационному подходу (исследованию статических задач на собственные значения). При таком подходе для материалов с соотношениями упругости достаточно общего вида имеют место различные вариационные принципы [34, 135] трехмерной линеаризованной теории упругой устойчивости и в силу однородности докритического состояния также имеют место общие решения [34, 135] для антиплоских, плоских и пространственных статических задач вышеуказанной теории.

При *пластическом разрушении* (локальная потеря устойчивости при пластических деформациях при принятом критерии разрушения) в силу однородности докритических деформаций учитывается, что в докритическом состоянии *весь материал* находится в пластической стадии деформирования. В рассматриваемом случае дополнительно принимается *обобщенная концепция продолжающегося нагружения* в форме, изложенной в монографиях [34,135]; таким образом, изменение зон разгрузки при потере устойчивости не учитывается. Таким образом, при рассматриваемом подходе в случае пластического разрушения получаем как бы задачу для физически нелинейного упругого тела, для которого линеаризованные определяющие уравнения вычислены из соответствующих определяющих уравнений теории пластичности. При таком подходе для пластического разрушения имеют место такие же результаты общего характера, как и для хрупкого разрушения (строго доказываемое выполнение достаточных условий применимости метода Эйлера – в результате получаем статическую задачу на собственные значения, имеют место вариационные принципы и общие решения) [34, 135].

Таким образом, в механике разрушения при сжатии вдоль трещин для *хрупкого и пластического* разрушения исследования можно проводить единообразно в *общем виде*. Так, при построении точных решений можно применять общие решения [34,135] соответствующих статических антиплоских, плоских и пространственных задач; в случае применения численных методов и при построении приближенных решений можно применять соответствующие вариационные принципы [34, 135] статических задач.

При *вязко-упругом* разрушении (локальная потеря устойчивости при вязко-упругих деформациях при принятом критерии разрушения) применяются динамические или статические соотношения ТЛТУДТ. В силу зависимости коэффициентов линеаризованных уравнений и соотношений от времени при вязко-упругом разрушении уже *нельзя строго доказать* выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования и, таким образом, нельзя свести к статической задаче на собственные значения. В этом случае применяются различные приближенные подходы и критерии устойчивости, краткий обзор ряда существующих критериев устойчивости приведен в статье [137].

Таким образом, из вышеизложенного следует, что в механике разрушения при сжатии вдоль трещин с привлечением **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) исследования при хрупком и пластическом разрушении, а также при вязко-упругом разрушении проводятся при различных ситуациях общего характера; в связи с этим анализ

этих результатов представлен отдельно. Так, в следующем пункте (п. 2.2.2) рассмотрены результаты при хрупком и пластическом разрушении, результаты же при вязко-упругом разрушении рассмотрены в п. 2.2.3.

Все же необходимо отметить, что, несмотря на вышеотмеченное различие ситуаций, при которых происходит исследование хрупкого, пластического и вязко-упругого разрушения при **втором общем подходе**, в этих исследованиях есть два общих момента. Первый общий момент заключается в том, что исследования для различных типов разрушения проводится в рамках *строгой ТЛТУДТ* (трехмерной линейаризированной теории устойчивости деформируемых тел). Второй общий момент заключается в том, что для различных типов разрушения *теоретический предел прочности определяется как критическое значение напряжений*, соответствующее локальной потере устойчивости состояния равновесия возле трещин, для вычисления которого *применяется аппарат ТЛТУДТ*.

**2.2.2. О результатах, полученных для хрупкого и пластического разрушений.** Обсуждаемые результаты для хрупкого и пластического разрушений, получены для однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, и для слоистых композитных материалов со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в границах раздела (interface) слоев; ниже результаты для однородных материалов с трещинами представлены в п. 2.2.2.1 и результаты для слоистых материалов представлены в п. 2.2.2.2. Рассматриваемые результаты представлены в монографиях [32, 36, 37, 77 (том 4 книга 1)] и в отдельных статьях, начиная с 1980 г., [1, 3 – 5, 28 – 31, 35, 38 – 50, 52 – 56, 73 – 76, 102, 107 – 111, 123, 125 – 132, 136, 138 – 140, 143, 145 – 151, 153 – 169, 172 – 190, 197 – 202, 206 – 212].

**2.2.2.1. О результатах для однородных материалов при хрупком и пластическом разрушении.** В настоящем пункте (п. 2.2.2.1) рассмотрим результаты по хрупкому и пластическому разрушению однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, в рамках расчетных схем, представленных на рис. 1.1, *a – d*. Полученные результаты относятся к изотропным и ортотропным материалам, при этом ортотропные материалы также моделируют в континуальном приближении и композитные материалы; для ортотропных материалов принимается, что трещины расположены в плоскостях симметрии свойств материала и сжатие, таким образом, осуществляется также вдоль осей симметрии свойств материала. Рассматриваемые результаты получены в единой общей форме для хрупкого и пластического разрушения, включая и получение характеристических уравнений при анализе статической задачи на собственные значения; лишь при аналитическом или численном исследовании указанных характеристических уравнений необходимо применять соотношения, относящиеся к конкретной модели хрупкого или пластического разрушения (конкретные соотношения варианта теории упругости или теории пластичности).

Краткая информация о всех полученных результатах (в рамках **второго общего подхода**, п. 1.5.2) для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с указанием ученых, которым принадлежат основные результаты, сгруппирована в следующих трех пунктах: п. 2.2.2.1.1 – результаты для материалов с трещинами, расположенными в одной плоскости; п. 2.2.2.1.2 – результаты для материалов с трещинами, расположенными в параллельных плоскостях; п. 2.2.2.1.3 – результаты для материалов с трещинами при сближении плоскостей, в которых расположены трещины. Целесообразно отметить, что в последний пункт (п. 2.2.2.1.3) включены и результаты, относящиеся к *предельным переходам к результатам, которые получены в рамках первого общего подхода* (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2). Также целесообразно отметить, что результаты при хрупком и пластическом разрушении однородных материалов получены для плоских и пространственных задач, а также в ряде случаев и для антиплоских задач.

### 2.2.2.1.1. Результаты для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в единой плоскости. Точные решения.

*Основные результаты получил А.Н.Гузь.* Рассматриваемые результаты представлены в монографиях [32, §§2 и 3, гл. 5], [36, §§2 – 4, гл. 6], [77, т. 4, книга 1, гл. 2] и [37, т. 2, гл. 8, §1 и гл. 9, §1] и в отдельных статьях, начиная с 1981 г., [30, 31, 35, 125 – 127, 129 – 132]; эти результаты также применялись и отражены в обзорных статьях [136, 138 – 140, 142, 146, 151, 162, 163].

Необходимо отметить, что обсуждаемые результаты были получены строго в наиболее общей форме лишь после исследования вопроса о порядке особенности в кончике трещины в рамках механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин. До решения указанного вопроса точные решения задач механики разрушения при сжатии вдоль плоских трещин, которые расположены в одной плоскости, были получены с некоторыми ограничениями на соотношения теории упругости при хрупком разрушении или теории пластичности при пластическом разрушении. В статьях [33, 35, 133, 134] было строго показано, что порядок особенности в кончике трещины в рамках механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, совпадает с порядком особенности в кончике трещины в рамках классической линейной механики разрушения; указанные результаты получены для соотношений теории упругости и пластичности достаточно общей структуры, что и учтено в монографиях [36, §§2 – 4, гл. 6], [77, т. 4, книга 1, гл. 2] и [37, т. 2, гл. 8, §1 и гл. 9, §1].

Целесообразно отметить, что задачи механики разрушения при сжатии вдоль плоских трещин, которые расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях, являются однородными задачами применительно к соответствующим задачам механики разрушения с учетом действия начальных (остаточных) напряжений, которые действуют вдоль трещин. В связи с этим информация о порядке особенности возле кончика трещин в рамках механики разрушения материалов с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин используется при построении точных решений.

Исследования проводились для антиплоских, плоских и пространственных задач.

Для антиплоских и плоских задач проводятся исследования для материала с системой (рис. 2.1, *a*) параллельных плоских трещин (бесконечных в направлении оси  $Ox_3$  и постоянной ширины вдоль оси  $Ox_1$ ), расположенных в одной плоскости (в плоскости  $x_2 = 0$ ), при сжатии вдоль осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$

$$\sigma_{11}^0 = \text{const}; \sigma_{22}^0 = 0; \sigma_{33}^0 = \text{const}. \quad (2.1)$$

В плоскости поперечного сечения при  $x_3 = 0$  в соответствии с рис. 2.1, *a* имеет место ситуация, представленная на рис. 2.1, *б*, где и ниже введены следующие обозначения:  $L_1$  – совокупность отрезков на оси  $Ox_1$ , соответствующих плоским трещинам;  $L_2$  – совокупность отрезков на оси  $Ox_1$ , соответствующих материалу (без трещин). В соответствии с рис. 2.1, *б* вместо выражений (2.1) можно рассматривать соотношения

$$\sigma_{11}^0 = \text{const}; \sigma_{22}^0 = 0; \sigma_{33}^0 = 0. \quad (2.2)$$

Результаты для плоских и антиплоских задач для случая на рис. 2.1, *a* получены в единой общей форме для изотропных и ортотропных материалов применительно к хрупкому и пластическому разрушению; в случае ортотропных материалов принимается, что плоскостями упругой симметрии свойств материала являются плоскости  $x_j = \text{const}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) на рис. 2.1, *a*.

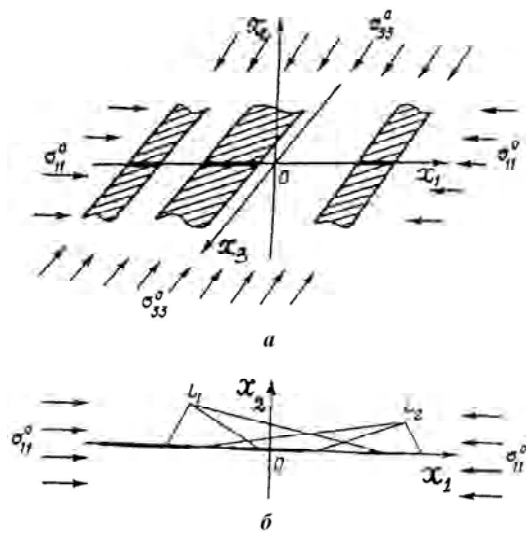


Рис. 2.1

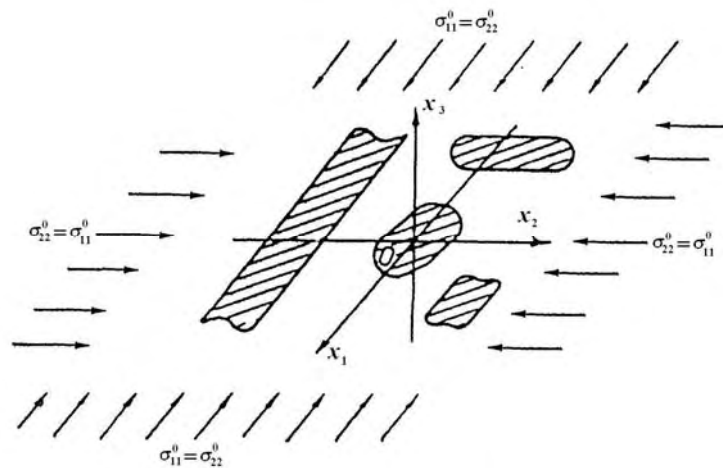


Рис. 2.2

Для пространственных задач проводятся исследования для материала с системой произвольного числа плоских трещин различной формы, которые расположены в плоскости  $x_3 = 0$  (рис. 2.2, трещины заштрихованы), при осесимметричном нагружении усилиями сжатия постоянной интенсивности; в связи с вышеизложенным имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \text{const}; \quad \sigma_{33}^0 \equiv 0. \quad (2.3)$$

Результаты для пространственных задач для случая на рис. 2.2 получены в единой общей форме для изотропных и трансверсально-изотропных материалов применительно к хрупкому и пластическому разрушению; в случае трансверсально-изотропных материалов принимается, что плоскости  $x_3 = \text{const}$  (рис. 2.2) являются плоскостями изотропии материала. Целесообразно отметить, что при вышеизложенной постановке докритическое состояние в окрестности трещин является однородным, что определяет возможность применения общих решений статических задач ТЛУДТ [34, 135].

Отметим еще методы, которые применялись для получения точных решений задач, рассматриваемых в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.1), в случае антиплоских, плоских и пространственных задач.

Для антиплоских и плоских задач применялся аппарат теории функций комплексных переменных; при этом вводились специальным образом комплексные переменные, в которые также входили параметры нагружения. С привлечением вышеуказанных комплексных переменных построены (для антиплоской и плоской задач ТЛТУДТ) представления напряжений и перемещений через аналитические функции этих комплексных переменных; отмеченные представления построены для статических и динамических задач трехмерной линеаризированной механики деформируемых тел, подробные сведения по этим результатам представлены в монографиях автора настоящей обзорной статьи [32, 34, 36, 37, 77 т. 2, 135]. В случае антиплоских задач существуют определенные аналогии, отмеченные в вышеуказанных монографиях; в связи с этим отметим лишь некоторые свойства полученных комплексных представлений для плоских задач ТЛТУДТ. Так, при стремлении начальных (приложенных, остаточных) напряжений к нулю, т.е. при выполнении условий

$$\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0 \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

из полученных представлений напряжений и перемещений плоских задач ТЛТУДТ через аналитические функции комплексных переменных приходим к классическим представлениям линейной теории упругости в случае статических задач – представлениям Колосова – Мухелишвили [72] для изотропных материалов и Лехницкого [64] для ортотропных материалов, а также в случае динамических задач – представлениям Галина [19]. Достаточно подробно обсуждаемые предельные переходы рассмотрены в монографиях [32, 34, 36, 37, 77 т. 2, 135]. В качестве примера приведем комплексные представления для плоских статических задач ТЛТУДТ в случае неравных корней (параметров)  $\mu'_1 \neq \mu'_2$ , в соответствии с вышеуказанными монографиями они имеют вид согласно обозначений монографии [37] (т. 2, стр. 7, выражения (1.29))

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re} [\Phi'_1(z_1) + \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{21} &= -2 \operatorname{Re} [\gamma_{21}^{(1)} \mu'_1 \Phi'_1(z_1) + \gamma_{21}^{(2)} \mu'_2 \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{12} &= -2 \operatorname{Re} [\mu'_1 \Phi'_1(z_1) + \mu'_2 \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{11} &= 2 \operatorname{Re} [\gamma_{11}^{(1)} \mu_1'^2 \Phi'_1(z_1) + \gamma_{11}^{(2)} \mu_2'^2 \Phi'_2(z_2)]; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$u_k = 2 \operatorname{Re} [\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2)]; \quad k = 1, 2; \quad z_j = x_1 + \mu'_j x_2; \quad j = 1, 2; \quad \mu'_1 \neq \mu'_2.$$

В (2.5) комплексные корни  $\mu'_j$  и величины  $\gamma_{21}^{(j)}$ ,  $\gamma_{11}^{(j)}$  и  $\gamma_k^{(j)}$  ( $j, k = 1, 2$ ) определяются через величины, характеризующие свойства материала, и приложенные напряжения (2.4). Через  $\Phi_1(z_1)$  и  $\Phi_2(z_2)$  в (2.5) обозначены произвольные аналитические функции комплексных переменных. Представления (2.5), приведенные выше в качестве примера, при предельном переходе (2.4) переходят в общеизвестные комплексные представления Лехницкого [64] классической линейной теории упругости ортотропного тела в случае неравных корней. Вышеотмеченные комплексные представления плоских задач ТЛТУДТ и аппарат теории функций комплексных переменных позволили получить точные решения рассматриваемых плоских задач механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных в одной плоскости (рис. 2.1, а, б).

Для рассматриваемых (рис. 2.2) пространственных задач применялся аппарат теории гармонического потенциала, общие решения пространственных статических задач ТЛТУДТ [34, 135] и методы исследования соответствующих задач классической линейной механики разрушения, изложенные в общеизвестных монографиях. Обсуждаемые

общие решения рассматриваемых пространственных задач, как и комплексные представления типа (2.5) для плоских задач, построены для сжимаемых и несжимаемых материалов. Ниже в качестве примера рассмотрим представления общих решений пространственных задач ТЛТУДТ [34, 135] для *сжимаемых* материалов, ориентируясь на их краткое изложение в двухтомной монографии [37], которая всецело посвящена механике разрушения. Учитывая возможность применения обсуждаемых общих решений для построения решений для материалов с плоскими трещинами различной формы в плоскости  $x_3 = 0$  (рис. 2.2), согласно [34, 37, 135] вводятся следующие обозначения:  $N$  и  $S$  – нормаль и касательная к произвольной кривой в плоскости  $x_3 = 0$ ;  $u_N$  и  $u_S$  – перемещения по нормали и касательной к произвольной кривой в плоскости  $x_3 = 0$ ,  $u_3$  – перемещения по нормали к плоскости  $x_3 = 0$ . Учитывая введенные обозначения, общее решение рассматриваемых пространственных задач ТЛТУДТ [34, 37, 135] для сжимаемых трансверсально-изотропных материалов в соответствии с обозначениями монографии [37] (т. 1, стр. 122, выражения (1.120)) имеет вид

$$u_N = \frac{\partial}{\partial S} \psi - \frac{\partial^2}{\partial N \partial x_3} \chi; \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial N} \psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3} \chi; \quad (2.6)$$

$$u_3 = (\omega_{1133} + \omega_{3133})^{-1} \left( \omega_{1111} \Delta_1 + \omega_{3113} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Для определения функций  $\psi$  и  $\chi$  получены следующие уравнения:

$$\left( \Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = 0; \quad \left( \Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left( \Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi = 0, \quad (2.7)$$

где величины  $\xi_j^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ) определяются выражениями

$$\xi_1^2 = \omega_{3113} \omega_{1221}^{-1}; \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left( c^2 - \omega_{3333} \omega_{3113} \omega_{1111}^{-1} \omega_{1331}^{-1} \right)^{1/2};$$

$$2c \omega_{1111} \omega_{1331} = \omega_{1111} \omega_{3333} + \omega_{1331} \omega_{3113} - (\omega_{1313} + \omega_{1133})^2. \quad (2.8)$$

В (2.6) – (2.8) через  $\omega_{ij\alpha\beta}$  обозначены составляющие тензора четвертого ранга, которые входят в линеаризированные определяющие уравнения для сжимаемых материалов.

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha, \quad (2.9)$$

где  $t_{ij}$  – составляющие несимметричного тензора напряжений Кирхгофа. В (2.6) – (2.9) величины  $\omega_{ij\alpha\beta}$  и  $\xi_j^2$  зависят от свойств сжимаемого материала и приложенных напряжений (2.4); аналогичные результаты в виде общих решений получены и для несжимаемых материалов. Конкретизация обсуждаемых результатов для различных моделей сжимаемых и несжимаемых упругих и пластических материалов представлена в монографиях [34, 135]. Общие решения типа (2.6) – (2.9) [34, 135] для сжимаемых и несжимаемых материалов являются исходными соотношениями для сведения рассматриваемых пространственных задач (рис. 2.2) механики разрушения при сжатии вдоль плоскости, в которой расположены плоские трещины различной формы, к смешанным задачам теории гармонического потенциала для полупространства. Достаточно подробная информация о вышеуказанных преобразованиях представлена в монографиях [32] (гл. 6, §3), [36] (гл. 6, §4), [37] (т. 2, гл. 9, §1) и [77] (т. 4, книга 1, гл. 2, §2); при этом для получения точных решений рассматриваемых задач использовались методы решения соответствующих задач классической линейной механики разрушения и аналогии с этими задачами.

Необходимо отметить, что при получении точных решений рассматриваемых *антиплоских, плоских и пространственных* задач механики разрушения материалов при сжатии вдоль плоских трещин различной формы, расположенных в одной плоскости (рис. 2.1 и 2.2), анализировались различные формы потери устойчивости, соответствующие различным условиям симметрии относительно плоскости, в которой расположены трещины (рис. 2.1 и 2.2). Отметим, что в случае антиплоских и плоских задач в соответствии с рис. 2.1 трещины расположены в плоскости  $x_2 = 0$  и в случае пространственных задач в соответствии с рис. 2.2 трещины расположены в плоскости  $x_3 = 0$ . Для конкретности обсуждения рассмотрим плоскую задачу в плоскости  $x_1 0x_2$  согласно рис. 2.1, *а*; кроме того, для простоты изложения ограничимся простейшей расчетной схемой для этого случая, когда материал имеет одну трещину, что соответствует расчетной схеме на рис. 1.1, *б*. Для обсуждаемого случая схема нагружения и возможные формы потери устойчивости с определенной симметрией представлены на рис. 2.3, *а – в*, где материал, окружающий трещину, заштрихован. Так, на рис. 2.3, *а* представлена схема нагружения для плоской задачи; в случае пространственной задачи аналогичная ситуация имеет место для любой плоскости, которая проходит через ось  $0x_3$  на рис. 2.2.

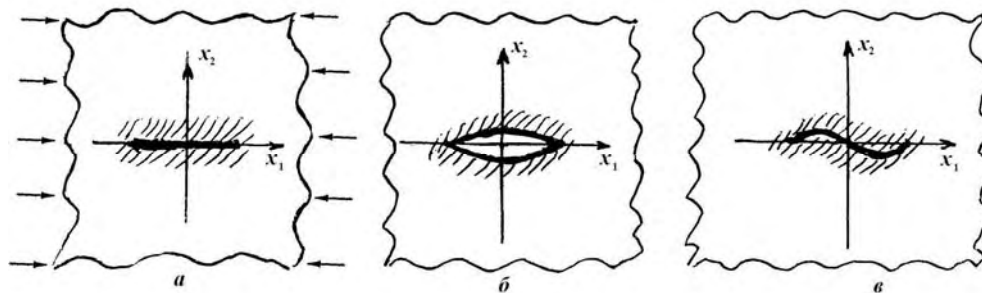


Рис. 2.3

На рис. 2.3, *б* схематически представлена *симметричная* (относительно плоскости, в которой расположена трещина, т.е. относительно плоскости  $x_2 = 0$ ) *форма потери устойчивости*. При такой форме потери устойчивости происходит расхождение противоположных берегов трещины в разные стороны, так как для этой формы потери устойчивости выполняются следующие условия симметрии:  $u_2(x_1, -x_2) = -u_2(x_1, x_2)$ . Симметричная форма потери устойчивости (рис. 2.3, *б*) соответствует явлению расслоения слоистого композитного материала, которое рассмотрено в п. 1.4.1 и схематически представлено на рис. 1.6, *а*, на рис. 1.6, *б* применительно к нижней трещине и на рис. 1.6, *в* применительно к приповерхностной трещине.

На рис. 2.3, *в* схематически представлена *изгибная форма потери устойчивости* или *антисимметричная* (относительно плоскости, в которой расположена трещина, т.е. относительно плоскости  $x_2 = 0$ ) *форма потери устойчивости*. При такой форме потери устойчивости противоположные берега трещины получают одинаковые перемещения вдоль вертикальной оси (вдоль оси  $0x_3$ ), так как для этой формы потери устойчивости выполняются следующие условия симметрии:  $u_2(x_1, -x_2) = u_2(x_1, x_2)$ .

Следует отметить, что в рамках линеаризованной постановки при изгибной форме потери устойчивости не происходит взаимодействие противоположных берегов трещины; для построения теории, учитывающей взаимодействие противоположных берегов трещины при изгибной форме потери устойчивости, необходимо привлечь нелинейную постановку.



Точные решения для *плоской и пространственной* задач механики разрушения при сжатии вдоль трещин, расположенных в одной плоскости (рис. 2.1 и 2.2), которые анализируются в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.1), получены при рассмотрении симметричных и изгибных форм потери устойчивости. В краткой форме рассмотрим обсуждаемые точные решения и выводы из них отдельно для антиплоских, плоских и пространственных задач, расчетные схемы для которых представлены на рис. 2.1 и 2.2.

*Антиплоская задача.* Форма потери устойчивости в виде антиплоской задачи (из плоскости  $x_3 = 0$  на рис. 2.1) соответствует Mode III (трещина продольного сдвига вдоль оси  $Ox_3$ ) в механике разрушения. В результате точного решения *строго доказано, что потеря устойчивости в виде антиплоской деформации (продольного сдвига в соответствии с рис. 2.1) не может возникнуть.*

*Плоская задача.* В случае плоской задачи (рис. 2.1, б) симметричная форма потери устойчивости (рис. 2.3, б) соответствует Mode I (трещина нормального отрыва) в механике разрушения и изгибная форма потери устойчивости (рис. 2.3, в) соответствует Mode II (трещина поперечного сдвига) в механике разрушения. В результате точного решения для плоской задачи (рис. 2.1, б) *строго доказано:*

*теоретические пределы прочности при симметричной и изгибной формах потери устойчивости совпадают;*

*теоретический предел прочности определяется критическим значением параметра нагружения, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства в рамках плоской деформации;*

*теоретический предел прочности не зависит от количества трещин, расположенных в одной плоскости (рис. 2.1, а, б).*

Последний вывод (независимость результата от количества трещин) не может быть получен из соображений физического характера; обсуждение этой ситуации представлено в Примечании 4 на стр. 167 т. 2 монографии [37].

Поскольку любая форма потери устойчивости для рассматриваемой ситуации (рис. 2.1, б) может быть представлена в виде симметричной (рис. 2.3, б) и изгибной (антисимметричной) (рис. 2.3, в) форм потери устойчивости в соответствии с выражением, например, для нормального перемещения  $u_2(x_1, x_2)$  (рис. 2.1, а, б), в виде

$$u_2(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2} [u_2(x_1, x_2) - u_2(x_1, -x_2)] + \frac{1}{2} [u_2(x_1, x_2) + u_2(x_1, -x_2)], \quad (2.10)$$

то вышеизложенные результаты для плоской задачи имеют общий характер и полученное значение теоретического предела прочности относится ко всем возможным формам потери устойчивости.

*Пространственная задача.* В случае пространственной задачи при нагружении в виде (2.3) исследованы симметричная и изгибная (антисимметричная) формы потери устойчивости относительно плоскости  $x_3 = 0$  (рис. 2.2), в которой расположены трещины; при этом симметричная форма потери устойчивости сведена к смешанной задаче на собственные значения для одной гармонической функции для полупространства и изгибная форма потери устойчивости сведена к смешанной задаче на собственные значения для двух гармонических функций. В результате анализа точных решений *строго доказано, что для пространственной задачи при нагружении в виде (2.3) теоретический предел прочности на сжатие не больше критического значения параметра нагружения (2.3), соответствующего поверхностной неустойчивости полупространства при нагружении в виде (2.3) (пространственная задача).*

Выше применительно к результатам для пространственной задачи использована оценка «не больше» в связи с тем, что кроме вышеизложенных результатов, которые получены из анализа точных решений, для изгибной формы потери устойчивости также получена еще одна смешанная задача на собственные значения для двух гармонических функций для полупространства, которая в *общем случае определяющих уравнений осталась не исследованной.* Для конкретных моделей теории упругости и пластичности в монографиях [32, 36, 37, 77 т. 4, книга 1] показано, что исследование

вышеуказанной смешанной задачи для двух гармонических функций на собственные значения *не вносит* новой информации о величине теоретического предела прочности.

**Примечание.** В настоящем пункте (п. 2.2.2.1.1) при хрупком и пластическом разрушении однородных материалов в случае сжатия вдоль системы плоских трещин, расположенных *в одной плоскости* (рис. 2.1 и 2.2), получены точные решения антиплоских, плоских и пространственных задач при рассматриваемом критерии разрушения. Из анализа полученных точных решений для вышеуказанной ситуации *определен теоретический предел прочности* при определяющих уравнениях теории упругости и пластичности достаточно общей структуры; как и подавляющее число теоретических пределов прочности, полученные теоретический предел прочности применительно к большинству конструкционных материалов имеет существенно завышенное значение. Все же существуют конструкционные материалы, так называемые композитные материалы с существенно пониженной сдвиговой жесткостью, для которых полученные теоретические пределы прочности сопоставимы с результатами экспериментальных исследований.

Также необходимо отметить, что результаты настоящего пункта (п. 2.2.2.1.1) дали возможность построить один из вариантов объяснения пинч-эффекта (монография [32] стр. 278 – 279).

**2.2.2.1.2. Результаты для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в параллельных плоскостях.** *Основные результаты получили В.М.Назаренко, В.Л.Богданов и А.Н.Гузь.* *A priori* понимается, что при учете взаимодействия трещин, расположенных в различных параллельных плоскостях, должно наблюдаться снижение теоретического предела прочности, вычисленного в предыдущем пункте (п. 2.2.2.1.1) без учета взаимовлияния трещин в различных параллельных плоскостях; отмеченная ситуация, по существу, определяет актуальность и целесообразность исследований, результаты которых рассматриваются в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.2). Рассматриваемые результаты представлены в монографиях [36, §§5 и 6, гл. 6], [77, гл. 3 и 4, т. 4, книги 1] и [37, §§2 – 5, гл. 9, т. 2] и в отдельных статьях, начиная со статьи [40] за 1984 г., [3 – 5, 38 – 44, 73 – 76, 107 – 111, 130 – 132, 146, 153 – 169, 197 – 202].

В рамках рассматриваемой механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях при учете взаимодействия этих трещин, рассматриваются плоские и пространственные задачи для расчетной схемы, представленной на рис. 1.1, *a*; при этом для плоских задач исследуется нагружение в виде (2.1) и для пространственных задач исследуется нагружение в виде (2.3). Следует отметить, что расчетная схема, представленная на рис. 1.1, *a*, соответствует различным классам задач (проблем), которые определяются количеством трещин, их относительными размерами, формами трещин и их расположением в параллельных плоскостях; в связи с этим при исследовании необходима конкретизация постановок задач применительно к расположению и размерам плоских трещин в параллельных плоскостях. В настоящее время получены конкретные результаты лишь для характерных простейших случаев расположения трещин в параллельных плоскостях, в которых проявляются основные закономерности, относящиеся к взаимодействию трещин, расположенных в параллельных плоскостях, в механизме разрушения материала при сжатии вдоль этих трещин. Характерные случаи (расчетные схемы), для которых в настоящее время получены точные решения, относятся к трещинам одинаковой формы, которые расположены друг над другом в параллельных плоскостях; таким образом, постановка и исследование новых родственных классов задач по рассматриваемой проблеме представляется очевидным, изменяя взаимное расположение трещин, форму отдельных трещин и их количество в параллельных плоскостях.

Характерные простейшие расчетные схемы механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях, для которых получены конкретные результаты, представлены на рис. 1.1, *в – д*. Так, на рис. 1.1, *в* представлена расчетная схема для двух одинаковых трещин, которые расположены друг над другом в соседних параллельных плоскостях; рассматриваемая ситуация

относится к материалу с большим числом трещин, которые расположены таким образом, что не происходит взаимодействие (взаимовлияние) различных «пар трещин». На рис. 1.1, *г* представлена расчетная схема для материала с большим числом взаимодействующих трещин, расположенных в параллельных плоскостях; рассматриваемая ситуация моделируется периодическим (вдоль вертикальной оси) рядом одинаковых трещин, которые расположены друг над другом в параллельных плоскостях и взаимодействуют между собой. На рис. 1.1, *д* представлена расчетная схема для одной приповерхностной трещины, которая расположена в параллельной плоскости к поверхности материала; рассматриваемая ситуация относится к случаю, когда приповерхностная трещина расположена на достаточно малом расстоянии от поверхности материала, что вызывает необходимость при исследовании учитывать взаимовлияние (взаимодействие) приповерхностной трещины и поверхности материала.

Для расчетных схем, представленных на рис. 1.1, *в* – *д*, получены конкретные результаты для плоских и пространственных задач. Для плоских задач исследования проведены в плоскости  $x_1 0x_2$ , где по аналогии с рис. 2.1, *а*, *б* принимается, что плоские трещины являются бесконечными в направлении оси  $0x_3$  и имеют постоянную ширину вдоль оси  $0x_1$ ; таким образом, для плоской задачи по аналогии с рис. 2.1, *б* в плоскости  $x_1 0x_2$  получаем трещины одинаковой длины вдоль оси  $0x_1$ , которые расположены друг над другом (в направлении оси  $0x_2$ ). Для пространственных задач исследования проведены для одинаковых плоских трещин круговой формы (в виде круговых дисков, penny-shaped cracks), которые расположены друг над другом в направлении оси  $0x_3$  в плоскостях  $x_3 = \text{const}$  (рис. 2.2). Результаты для вышеуказанных плоских и пространственных задач получены для хрупкого и пластического разрушения сжимаемых и несжимаемых материалов в случае определяющих уравнений теории упругости и пластичности достаточно общего вида в единой форме для теории конечных (больших) докритических деформаций и двух вариантов теории малых докритических деформаций; лишь при последующем численном анализе полученных характеристических уравнений необходимо выбирать конкретные определяющие уравнения теории упругости или пластичности.

Для исследования обсуждаемых задач применяются различные представления общих решений статических задач ТЛУДТ (типа представлений в виде (2.6) – (2.9)), которые изложены в ряде монографий автора настоящего обзора, например, монографии [34, 135], а также методы решения родственных статических задач классической линейной механики разрушения, изложенные в общеизвестных монографиях (также и применительно к смешанным задачам теории упругости).

**В.М.Назаренко** разработал методы исследования обсуждаемых плоских и пространственных задач механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях с учетом взаимодействия между этими трещинами. Эти методы основаны на применении интегральных преобразований (преобразований Фурье для плоских задач и преобразований Ханкеля для пространственных задач), на сведении задач к парным интегральным уравнениям и на последующем сведении последних к интегральным уравнениям следующего типа:

в случае плоских задач – к интегральным уравнениям первого рода с интегрируемой особенностью логарифмического типа;

в случае пространственных задач – к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Следует отметить, что разработанные *В.М.Назаренко* методы исследования задач механики разрушения материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, относятся к исследованию соответствующих задач математической физики *на собственные значения*. При разработке вышеуказанных методов существенно использованы подходы *Я.С.Уфлянда*, изложенные в монографиях [88, 89] и относящиеся к соответствующим *краевым* смешанным задачам статики классической линейной теории упругости. На заключительном этапе разработки мето-

дов исследования задач механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, *В.М.Назаренко* свел указанные задачи, применяя отмеченные подходы, к задачам на собственные значения для одномерных интегральных уравнений. Строго доказано, что полученные одномерные интегральные уравнения имеют непрерывные ядра в интервале от нулевых значений параметров нагружения до значений параметров нагружения, соответствующих теоретическим пределам прочности для случая сжатия однородного материала вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин. Отмеченное доказательство непрерывности ядер одномерных интегральных уравнений дает возможность эффективно применять различные численные и приближенные методы для исследования собственных значений рассматриваемых одномерных интегральных уравнений, через которые определяются теоретические пределы прочности для расчетных схем на рис. 1.1,  $\nu - \delta$  применительно к анализируемым механизмам разрушения. В рассматриваемых в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.2) результатах для определения собственных значений полученных одномерных интегральных уравнений применялся метод Бубнова – Галеркина; при этом в качестве координатных функций выбирались степенные функции или ортонормированные на  $[0, 1]$  смещенные полиномы Лежандра и анализировалось изменение значений собственных чисел при увеличении числа координатных функций. Так, в общих чертах можно описать разработанный метод решения задач механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин. *Обсуждаемый метод решения является точным методом с точки зрения удовлетворения уравнений и граничных условий; точность же полученных конкретных результатов определяется лишь точностью решения задачи на собственные значения полученных одномерных интегральных уравнений.*

**В.Л.Богданов** разработал объединенный метод исследований задач механики однородных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин для расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $\nu - \delta$ , и задач механики разрушения однородных материалов с системой плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль таким образом расположенных трещин. Необходимо отметить, что в силу применения основных соотношений трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел (ТЛМДТ) первые из вышеуказанных задач являются задачами на собственные значения и вторые из вышеуказанных задач являются краевыми задачами для одних и тех же уравнений, а также для одних и тех же областей, соответствующих расчетным схемам на рис. 1.1,  $\nu - \delta$ . Таким образом, исследуя соответствующие краевые задачи при непрерывном изменении параметров нагружения, можно подойти к значениям параметров нагружения, когда амплитудные величины (напряжения и перемещения) стремятся «к бесконечности» (все амплитудные величины или часть из них); в связи с этим обнаруженные таким образом значения параметров нагружения соответствуют собственным числам соответствующих задач на собственные значения. Вышеизложенная ситуация является аналогичной ситуации в теории колебания – для определения частот собственных колебаний можно исследовать вынужденные колебания при непрерывном изменении частоты внешней нагрузки; в этом случае при существенном изменении амплитудной величины и стремлении ее к «бесконечности» определяется частота собственных колебаний.

Выше в аннотированном виде изложены сведения о разработанных методах исследования задач механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях (расчетные схемы на рис. 1.1,  $\nu - \delta$ ), с учетом взаимодействия этих трещин; более подробное краткое изложение обсуждаемых методов не представляется возможным и целесообразным ввиду сложности и громоздкости математической стороны вопроса. С привлечением обсуждаемых методов исследованы различные классы плоских и пространственных задач рассматриваемой механики разрушения и полученные результаты пред-

ставлены в публикациях, которые указаны в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2). Рассматриваемые методы являются достаточно эффективными; ниже в краткой форме приведем сведения, свидетельствующие об эффективности обсуждаемых методов исследования плоских и пространственных задач.

Подтверждением эффективности обсуждаемых методов исследования можно считать достаточно точное определение минимального собственного числа полученной задачи на собственные значения, через которые определяется *теоретический предел прочности* и соответствующее ему *теоретическое значение предельного укорочения* вдоль осей нагружения, при сравнительно небольшом числе координатных функций в применяемом на заключительном этапе исследования методе Бубнова – Галеркина. При вышеизложенном подходе и оценке эффективности обсуждаемых методов исследования ниже приведем ряд конкретных числовых результатов для рассматриваемых плоских и пространственных задач анализируемого варианта механики разрушения материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, находящихся в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин, следуя результатам публикаций, которые указаны в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2).

Представим принятые обозначения

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i(\xi); \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad (2.11)$$

где  $g(\xi)$  – искомая функция в полученном одномерном интегральном уравнении при  $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $a_i$  – неизвестные коэффициенты;  $\{\zeta_i(\xi)\}$  – полная на интервале  $[0, 1]$  система функций; числовые результаты получены при степенных функциях  $\zeta_i(\xi) = \xi^i$ ;  $\beta$  – безразмерный параметр, характеризующий трещины на рис. 1.1,  $a - \delta$ ; при  $\beta = \infty$  получаем случай одной трещины (рис. 1.1, б), что соответствует результатам предыдущего пункта (п. 2.2.2.1.1);  $2a$  – длина трещины вдоль оси  $0x_1$  на рис. 2.1,  $b$  в случае плоской задачи и  $2a$  – диаметр круговой трещины в случае пространственной задачи;  $2h$  – расстояние между трещинами в случае двух трещин (рис. 1.1, в) и в случае периодической системы трещин (рис. 1.1, з);  $h$  – расстояние между трещиной и поверхностью материала в случае приповерхностной трещины (рис. 1.1, д);  $N$  – число координатных трещин в первом выражении (2.11);  $\sigma_T$  – теоретический предел прочности на сжатие вдоль оси  $0x_1$  (рис. 1.1) в случае плоской задачи и вдоль радиального направления при нагружении в виде (2.3) в случае пространственной задачи;  $\varepsilon_T$  – теоретическое значение предельного укорочения вдоль оси  $0x_1$  в случае плоской задачи (рис. 1.1, б) и вдоль радиального направления при нагружении в виде (2.3) в случае пространственной задачи, соответствующее теоретическому пределу прочности на сжатие  $\sigma_T$ .

В качестве примера рассмотрим полученные числовые результаты для пространственной задачи при нагружении в виде (2.3) для круговых дискообразных трещин в высокоэластическом изотропном несжимаемом материале с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича (как для эталонной задачи); эти результаты получены для  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения для расчетных схем, представленных на рис. 1.1, в – д, при различном числе координатных функций в выражении (2.11).

В табл. 2.1 приведены результаты для случая приповерхностной трещины, соответствующая расчетная схема представлена на рис. 1.1, д; эти результаты первоначально получены в публикации [40] и в последующие годы вошли в монографии [36, стр. 464] и [37, т. 2, стр. 260]. Необходимо отметить, что величины  $\varepsilon_T$ , приведенные в табл. 2.1 – 2.3, вычислялись с точностью до трех знаков. Также следует отметить, что в случае  $\beta = \infty$  получаем случай одной трещины, для которого в соответствии с точным решением, изложенным в предыдущем пункте (п. 2.2.2.1.1), имеет место  $\varepsilon_T \approx 0,307$ .

Таблица 2.1

$\beta = h/a$	Значения $\varepsilon_T$ при различных $N$			
	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4, 5, 6, 7, 8$
1/8	0,194	0,115	0,015	0,010
1/4	0,181	0,042	0,042	0,039
1/2	0,191	0,117	0,117	0,117
1	0,238	0,224	0,224	0,224
$\infty$	0,306	0,306	0,306	0,306

В табл. 2.2 приведены результаты для случая двух равных трещин, соответствующая расчетная схема представлена на рис. 1.1, в; эти результаты первоначально получены в публикации [156] и в последующие годы вошли в монографии [36, стр. 479] и [37, т. 2, стр. 276].

Таблица 2.2

$\beta = h/a$	Значения $\varepsilon_T$ при различных $N$			
	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4, 5, 6$
1/8	0,250	0,050	0,050	0,044
1/4	0,257	0,141	0,142	0,139
1/2	0,282	0,260	0,26	0,260
1	0,300	0,299	0,299	0,299
$\infty$	0,307	0,307	0,307	0,307

В табл. 2.3 приведены результаты для периодической системы одинаковых трещин, соответствующая расчетная схема представлена на рис. 1.1, г; эти результаты первоначально получены в публикации [161] и в последующие годы вошли в монографии [77, т. 4, книга 1, стр. 234] и [37, т. 2, стр. 303].

Таблица 2.3

$\beta = h/a$	Значения $\varepsilon_T$ при различных $N$	
	$N = 1$	$N = 3, 4, 5, 6$
1/8	0,007	0,005
1/4	0,076	0,070
1/2	0,203	0,202
1	0,288	0,288

Целесообразно отметить, что результаты, представленные в табл. 2.1 – 2.3, получены применительно к высокоэластическому изотропному несжимаемому материалу с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича, которые относятся как бы к эталонной задаче (простейший материал), с той целью, чтобы удобно было оценить эффективность разработанного метода исследования задач механики разрушения при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия трещин. Изложенные результаты для указанного материала получены в рамках ТЛТУДТ при конечных (больших) докритических деформациях.

Из результатов, представленных в табл. 2.1 – 2.3, следуют два важных вывода.

1. Предложенный метод является достаточно эффективным, так как он позволяет с точностью до трех знаков определить  $\varepsilon_T$  – теоретическое значение предельного укорочения при помощи не более четырех координатных функций в случае изменения параметра  $\beta$  в пределах  $1/8 \leq \beta < +\infty$ . При минимальном рассмотренном значении  $\beta = 1/8$  получается весьма малое расстояние между трещинами в расчетных схемах на рис. 1.1, в – д; так, в случае приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) диаметр трещины в 16 раз больше расстояния от трещины к поверхности материала.

2. При высокой эффективности метода получаемые результаты при минимальном значении  $\beta$  ( $\beta = 1/8$ ) на порядок и более меньше результатов для одной изолированной трещины. Так, например, для приповерхностной трещины при  $\beta = 1/8$  получаем значение  $\varepsilon_T$  (табл. 2.1) в **30 раз меньше** значения  $\varepsilon_T$  для одной изолированной трещины (без учета взаимодействия с поверхностью материала).

Вышеформулированные выводы определяют значимость разработанного метода и получаемых с его применением конкретных результатов механики разрушения при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин.

Для конструкционных материалов при хрупком и пластическом разрушении многочисленные результаты для плоских и пространственных задач представлены в публикациях, которые указаны в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2). При хрупком разрушении (в рамках модели линейного упругого тела) конкретные результаты получены для слоистых и волокнистых композитных материалов, которые в континуальном приближении моделируются однородным трансверсально-изотропным материалом (на рис. 2.2 плоскости  $x_3 = \text{const}$  – плоскости изотропии) с усредненными постоянными, определяемыми общеизвестными выражениями. При пластическом разрушении применяются соотношения деформационной теории пластичности для изотропного несжимаемого материала со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций в следующем виде:

$$\sigma_u = A\varepsilon_u^k; A, k = \text{const.} \quad (2.12)$$

В силу сравнительной жесткости конструкционных материалов при получении конкретных числовых результатов для исследования хрупкого и пластического разрушения применяется ТЛТУДТ применительно ко второму варианту теории малых докритических деформаций по терминологии монографий [34, 135] и обзорной статьи [137]. Как и в табл. 2.1 – 2.3 применительно к иллюстрации эффективности разработанного обсуждаемого метода исследования анализируемых задач механики разрушения, так и ниже применительно к изложению конкретных полученных результатов для хрупкого и пластического разрушения конструкционных материалов ограничимся представлением результатов для пространственных задач в случае расчетных схем на рис. 1.1, в – д для одинаковых трещин в виде кругового диска (penny-shaped cracks), которые расположены друг над другом.

Для рассматриваемых конструкционных композитных материалов, наряду с ранее введенными величинами  $\sigma_T$  (теоретический предел прочности на сжатие) и  $\varepsilon_T$  (теоретическое значение предельного укорочения), удобно также ввести следующие безразмерные величины  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  при помощи соотношений:

$$\sigma = \sigma_T / \sigma_T^{oo}; \bar{\sigma} = \sigma_T / E, \quad (2.13)$$

где  $\sigma_T^{oo}$  – теоретический предел прочности для материала с одной изолированной трещиной;  $E$  – усредненный модуль Юнга в плоскости изотропии материала (в плоскости  $x_3 = \text{const}$  на рис. 2.2). Для композитных материалов приведем результаты только для слоистого композита, составленного из изотропных слоев постоянной толщины, которые чередуются в направлении оси  $0x_3$  на рис. 2.2; как уже отмечалось, в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.2) композитный материал рассматривается в континуальном приближении как однородный трансверсально-изотропный материал. Как и в монографиях [36, 37], будем применять обозначения:  $E_a, \nu_a, E_m$  и  $\nu_m$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов армирующих элементов (наполнителя) и матрицы (связующего);  $s_a$  и  $s_m$  – объемные концентрации наполнителя и связующего.

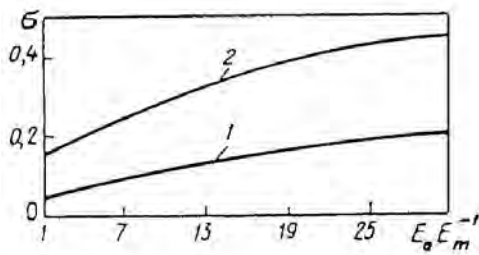


Рис. 2.4

Приповерхностная трещина (рис. 1.1, д). Хрупкое разрушение. Для вышеуказанного материала на рис. 2.4 приведена зависимость величины  $\sigma$  (2.3) от параметра  $E_a E_m^{-1}$  при  $\nu_a = \nu_m = 0,3$  и  $s_a = 0,3$ ; при этом кривая с цифрой 1 соответствует значению величины  $\beta$  (2.11)  $\beta \equiv h/a = 1/8$  и кривая 2 – значению  $h/a = 1/4$  в соответствии с рис. 1.1, д. Результат на рис. 2.3 получен в публикации [42], в последующие годы этот результат вошел в монографии [36, 37].

Приповерхностная трещина (рис. 1.1, д). Пластическое разрушение. Результаты получены для чистого алюминия, для которого в (2.12) принималось  $k = 0,23$ ; в этом случае для материала с одной изолированной трещиной согласно монографии [34] (стр. 438, формула (4.30)) имеет место  $\varepsilon_T^{oo} \approx 10\%$ . На рис. 2.5 для приповерхностной трещины в чистом алюминии (рис. 1.1, д) представлена зависимость величины  $\varepsilon_T$  от параметра  $\beta$  (2.11) при его изменении в пределах  $0,10 \leq \beta \equiv h/a \leq 0,25$ . Этот результат получен в публикации [41] и в последующие годы был включен в монографии [36, 37].

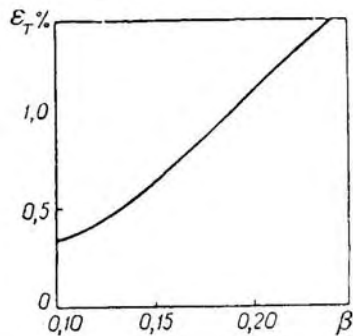


Рис. 2.5

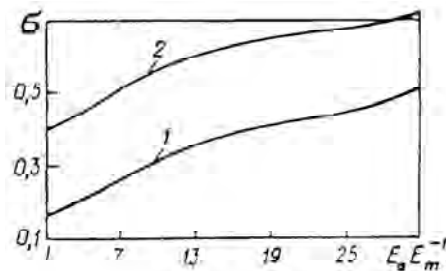


Рис. 2.6

Две равные трещины (рис. 1.1, в). Хрупкое разрушение. В случае двух равных трещин (рис. 1.1, в) при хрупком разрушении для вышеописанного слоистого композитного материала приведена зависимость величины  $\sigma$  (2.3) от параметра  $E_a E_m^{-1}$ ; при этом, как и на рис. 2.4, кривая с цифрой 1 соответствует значению величины  $\beta$  (2.11)  $\beta = 1/8$  и кривая 2 – значению  $h/a = 1/4$  в соответствии с расчетной схемой на рис. 1.1, в. Результат на рис. 2.6 получен в публикации [39] и в последующие годы был включен в монографии [36, 37].

Периодическая система одинаковых трещин (рис. 1.1, з). Хрупкое разрушение. В случае периодической системы одинаковых трещин (рис. 1.1, з) при хрупком разрушении результаты представим для конкретного слоистого композита, в котором армирующими элементами (наполнителем) являются слои алюмоборосиликатного стекла (стекла С) и матрицей (связующим) являются слои из эпоксиэпоксидномалеиновой смолы; механические свойства указанных стекла и смолы приведены в многочисленных монографиях, в частности, в [36 и [37] (т. 1). Для вышеуказанного конкретного слоистого композитного материала, который в континуальном приближении моделируется однородным линейно-упругим материалом с усредненными постоянными, применительно к хрупкому разрушению приведена зависимость величин  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$ ,



вычисленных согласно выражениям (2.13), от параметра  $\beta$  (2.11) при изменении  $\beta$  в интервале  $0,063 \leq \beta \leq 0,25$ . Так, на рис. 2.7 приведены результаты для величины  $\sigma$  и на рис. 2.8 приведены результаты для величины  $\bar{\sigma}$ ; при этом кривые 1, 2, 3 и 4 на рис. 2.7 и 2.8 соответствуют объемной концентрации армирующих элементов (наполнителя в виде слоев из стекла С) – величины  $s_a = 0,0; 0,3; 0,6$  и  $0,9$ . Результат на рис. 2.7 и 2.8 получен в публикации [161] и в последующие годы был включен в монографии [36], [37, т. 2] и [77, т. 4, книга 1].

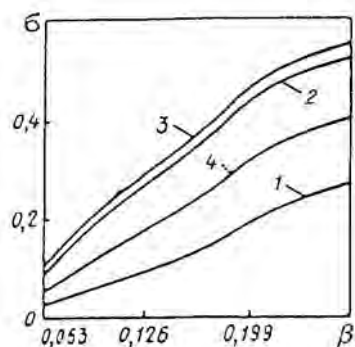


Рис. 2.7

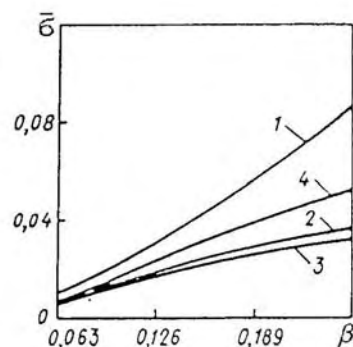


Рис. 2.8

Следует отметить, что в публикациях, перечень которых указан в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2), изложены многочисленные новые результаты механики разрушения при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин; результаты, представленные на рис. 2.4 – 2.8, приведены лишь в качестве характерных новых результатов. В связи с вышеотмеченным общие выводы, сформулированные ниже и относящиеся к механике разрушения при сжатии вдоль взаимодействующих трещин, сформулированы на основании всех результатов, изложенных в публикациях, указанных в начале настоящего пункта; эти же общие выводы также приведены в монографиях [36], [37, т. 2] и [77, т. 4, книга 1].

Учитывая вышеизложенные сведения, обсуждаемые *общие выводы* можно сформулировать следующим образом.

1. При сближении плоскостей, в которых расположены трещины, происходит существенное уменьшение теоретического предела прочности  $\sigma_T$  по сравнению со случаем трещин, расположенных в одной плоскости, когда не происходит взаимодействие с трещинами в соседних плоскостях (случай п. 2.2.2.1.1). Так, при достижении параметром  $\beta$  (2.11)  $\beta \approx 1/8$  может наблюдаться отмеченное уменьшение теоретического предела прочности **на порядок и более**; указанный вывод следует, например, при хрупком разрушении из рис. 2.4 и 2.7 и при пластическом разрушении – из рис. 2.5 и отмеченных возле него сведений. Можно считать в соответствии с рис. 1.1, в – д, что значение параметра  $\beta = 0,8$  соответствует ситуации, когда диаметр трещины приблизительно в 10 раз больше расстояния между плоскостями, в которых расположены трещины, или между трещиной и поверхностью материала.

2. При значениях параметра  $\beta > 4$  можно не учитывать взаимодействия трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с точностью до 5% при проведении исследований пространственных задач; в случае плоских задач отмеченный вывод имеет место при несколько больших значениях параметра  $\beta$ .

Целесообразно отметить, что в публикациях, указанных в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2), в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) получены многочисленные практически точные конкретные результаты для  $\sigma_T$  – теоретического предела прочности для плоских и пространственных задач механики разрушения при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, при

учете взаимодействия этих трещин применительно к хрупкому и пластическому разрушению однородных материалов для случая, когда параметр  $\beta$  (2.11) для расчетных схем на рис. 1.1,  $\epsilon - \delta$  изменяется в пределах

$$0,063 \leq \beta \leq \infty. \quad (2.14)$$

Выше в настоящем пункте в качестве примера приведены конкретные результаты только для пространственных задач применительно к хрупкому и пластическому разрушению однородных материалов, когда параметр  $\beta$  (2.11) изменяется в пределах

$$0,063 \leq \beta \leq 0,25, \quad (2.15)$$

в которых уменьшение  $\sigma_T$  – теоретического предела прочности (за счет учета взаимодействия трещин в соседних плоскостях) может достигать *одного порядка и больше*. Вышеотмеченные практически точные конкретные результаты (точные в силу применения **второго общего подхода**, основанного на ТЛТУДТ) дают возможность оценить результаты, получаемые с применением **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2, балочный подход, балочное приближение, beam approximation), при изменении параметра  $\beta$  (2.11) в пределах (2.15). Ниже вышеотмеченные оценки проведем для пространственных задач, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.1,  $\epsilon - \delta$ , для одинаковых круговых трещин (penny-shaped cracks) в случае хрупкого разрушения уже рассматриваемого ранее слоистого композитного материала, который в континуальном приближении моделируется линейно-упругим трансверсально-изотропным однородным материалом, плоскости изотропии которого совпадают с плоскостями  $x_3 = \text{const}$  на рис. 2.2. Поскольку рассматриваемые конкретные числовые результаты относятся к сравнительно жестким конструкционным материалам, то при их вычислении применялся второй вариант теории малых докритических деформаций в рамках ТЛТУДТ в соответствии с терминологией монографии [34, 135] и обзорной статьи [137]; результаты обсуждаемого сравнения для значений параметра  $\beta$  (2.11), входящих в интервал его изменения (2.15), представлен на рис. 2.9 – 2.11 для величины  $\bar{\sigma}$  (2.13).

При применении **первого общего подхода** для расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $\epsilon - \delta$ , приходим к определению  $\sigma_T^I$  (теоретический предел прочности, вычисленный с привлечением **первого общего подхода**) через критическую нагрузку, соответствующую потере устойчивости круговой пластины при сжатии равномерной нагрузкой; в соответствии с вышеизложенным, учитывая общеизвестные выражения для определения критической нагрузки в указанном случае, можно записать соотношение

$$\sigma_T^I = A \frac{E\beta^2}{3(1-\nu^2)}. \quad (2.16)$$

В (2.16) и ниже введены следующие обозначения:  $E$  и  $\nu$  – усредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии (при  $x_3 = \text{const}$  на рис. 2.2);  $\beta$  – параметр, определяемый из второго выражения (2.11);  $A$  – числовой коэффициент ( $A = 14,68$  – при жестком закреплении круговой пластины,  $A = 4,196$  – для шарнирного опирания круговой пластины). В связи с этим с учетом (2.16) для результатов, полученных в рамках **первого общего подхода**, можно ввести величину

$$\bar{\sigma}^I = \sigma_T^I \cdot E^{-1} = A \frac{\beta^2}{3(1-\nu^2)} \quad (2.17)$$

по аналогии со вторым выражением (2.13), соответствующем результатам, которые получены при **втором общем подходе**.

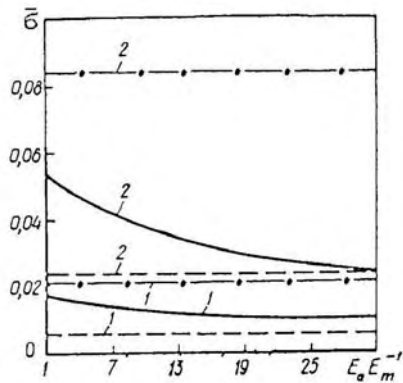


Рис. 2.9

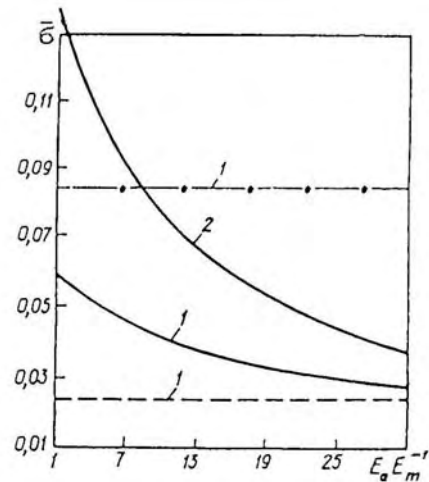


Рис. 2.10

На рис. 2.9 – 2.11 приведены зависимости величин  $\bar{\sigma}$  из (2.13) и  $\bar{\sigma}^I$  из (2.17) от различных параметров (на рис. 2.9 и 2.10 – от параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$ , на рис. 2.11 – от параметра  $s_a$ ); при этом на рис. 2.9 – 2.11 штрихпунктирные линии (- · -) относятся к величине  $\bar{\sigma}^I$  (2.17) при жесткой заделке ( $A=14,68$  в (2.16) и (2.17)) и штриховые линии (- -) относятся к величине  $\bar{\sigma}^I$  (2.17) при шарнирном опирании. Как уже отмечалось выше, выражение (2.16), а следовательно и штрихпунктирные и штриховые линии на рис. 2.9 – 2.11, являются общими для всех расчетных схем, представленных на рис. 1.1 в – д (две трещины, периодическая система трещин и приповерхностная трещина).

На рис. 2.9 представлены результаты для *приповерхностной* трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) в слоистом композитном материале, соответствующем рис. 2.4; в связи с этим на рис. 2.9 представлена зависимость от параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$ . Кривые (сплошные, штриховые и штрихпунктирные) на рис. 2.9 с цифрами 1 и 2 относятся к случаям  $\beta=1/8$  и  $\beta=1/4$ , соответственно.

На рис. 2.10 представлены результаты для *двух равных* трещин (расчетная схема на рис. 1.1, в) в слоистом композитном материале, соответствующем рис. 2.4 и 2.6; в связи с этим на рис. 2.10 представлена зависимость от параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$ . Кривые (сплошные, штриховые и штрихпунктирные) на рис. 2.10 с цифрами 1 и 2 относятся к случаям  $\beta=1/8$  и  $\beta=1/4$ .

На рис. 2.11 приведена зависимость величин  $\bar{\sigma}$  (2.13) и (2.17) от параметра  $s_a$  – объемной концентрации наполнителя (армирующих элементов) для конкретного слоистого материала, в котором армирующими элементами (наполнителем) являются слои алюмоборосиликатного стекла (стекла С) и матрицей (связующим) являются слои эпоксида малеинового смолы; ме-

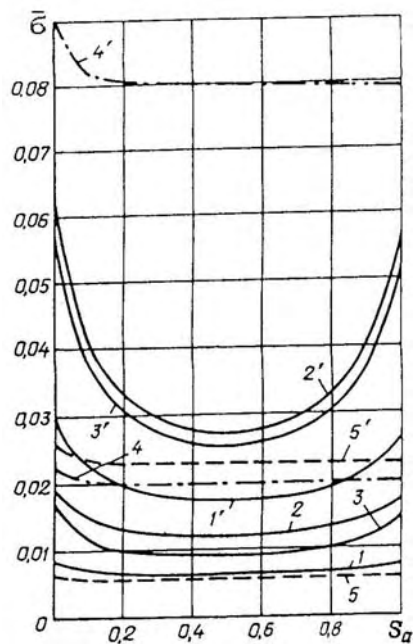


Рис. 2.11

ханические свойства указанных стекла и смолы приведены в многочисленных монографиях, например, [36] и [37] (т. 1). Для вышеуказанного конкретного слоистого материала, который в континуальном приближении моделируется однородным трансверсально-изотропным материалом, плоскостями изотропии являются плоскости  $x_3 = \text{const}$  на рис. 2.2. Все кривые на рис. 2.11, отмеченные цифрами 1, 2, 3, 4 и 5 без штрихов, относятся к случаю  $\beta = 0,0625$  и все кривые на рис. 2.11, отмеченные цифрами 1', 2', 3', 4' и 5' со штрихами, относятся к случаю  $\beta = 0,125$  применительно к расчетным схемам на рис. 1.1, в – д, где параметр  $\beta$  определяется вторым выражением (2.11). Кривые с номерами 1 и 1' относятся к *периодической системе трещин* (расчетная схема на рис. 1.1, з) и соответствуют результатам публикации [167], кривые с номерами 2 и 2' относятся к *двум одинаковым трещинам* (расчетная схема на рис. 1.1, в) и соответствуют результатам публикаций [39, 156 – 158] и кривые с номерами 3 и 3' относятся к *приповерхностной трещине* (расчетная схема на рис. 1.1, д) и соответствуют публикации [42]. На рис. 2.11 так же приведены кривые, соответствующие **первому общему подходу** (выражению (2.17)); так штрихпунктирные (- · -) кривые 4 и 4' относятся к жесткому защемлению и штриховые кривые (- - -) 5 и 5' относятся к шарнирному опиранию.

Результаты, представленные на рис. 2.9 – 2.11, дают возможность для рассматриваемых случаев оценить результаты, получаемые при **первом общем подходе**. В первую очередь целесообразно подчеркнуть неточность результатов при жестком защемлении (штрихпунктирные кривые (- · -) на рис. 2.9 – 2.11); слишком далеки эти результаты от соответствующих сплошных кривых, представляющих результаты при **втором общем подходе**, хотя условия жесткости защемления особенно популярны в исследованиях, выполненных с привлечением **первого общего подхода** (балочное приближение). На основании анализа результатов, представленных на рис. 2.9 – 2.11, и других аналогичных результатов сформулированы общие выводы о величине погрешности, которая возникает при применении **первого общего подхода** даже при сравнительно малых расстояниях между трещинами, определяемых значением параметра  $\beta$  (2.11). Следуя монографии [37] (т. 2, стр. 308), приведем эти выводы в виде следующей таблицы.

Таблица 2.4

Варианты задач	Периодическая система трещин		Приповерхностная трещина		Две параллельные трещины	
	$\beta = 0,0625$	$\beta = 0,125$	$\beta = 0,0625$	$\beta = 0,125$	$\beta = 0,0625$	$\beta = 0,125$
Величина относительной ошибки	170 – 230%	200 – 370%	35 – 120%	60 – 215%	17 – 67%	45 – 130%

Существенный разброс в величинах относительных ошибок в табл. 2.4 связан с тем, что рассматривались различные материалы.

Необходимо отметить, что в табл. 2.4 приведены оценки для сравнительно *длинных трещин*; так, для случая приповерхностной трещины в случае  $\beta = 0,065$  (в соответствии с расчетной схемой на рис. 1.1, д) *диаметр трещины в 32 раза больше* расстояния между трещиной и поверхностью материала. При дальнейшем увеличении параметра  $\beta$  (2.11) (по сравнению со значениями  $\beta$  в табл. 2.4) будет происходить увеличение относительной ошибки (по сравнению со значениями в табл. 2.4), так как при  $\beta \rightarrow \infty$  получаем случай изолированной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, б). Для изолированной трещины **первый общий подход** уже совершенно неприменим, так как тонкостенная полоса уже не может быть выделена.

Учитывая вышеизложенные соображения и сведения в табл. 2.4 о величине относительной погрешности, по-видимому, можно прийти к следующему выводу.

*При изменении параметра  $\beta$  (2.11) в интервале (2.14) неприменим первый общий подход (балочный подход, балочное приближение, beam approximation) для исследования ситуаций, расчетные схемы для которых представлены на рис. 1.1, в – д.*

В настоящем пункте ограничимся вышеизложенными краткими сведениями о результатах для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин; указанные результаты получены в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2). Дополнительные сведения по обсуждаемому научному направлению можно получить из публикаций, указанных в начале настоящего пункта (п. 2.2.2.1.2). Вышеизложенные сведения лишь дополним двумя краткими примечаниями.

**Примечание 1.** Вышеизложенные сведения относятся к механике разрушения материалов. В настоящее время уже получены отдельные результаты в механике разрушения элементов конструкций при родственном подходе, например, публикация [123].

**Примечание 2.** Вышеизложенные сведения относятся к механике разрушения материалов при сжатии вдоль плоских трещин. В настоящее время уже получен ряд результатов по механике разрушения материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных на круговой цилиндрической поверхности, например, публикации [45, 153 – 155].

**2.2.2.1.3. Результаты для хрупкого разрушения однородных материалов с трещинами в близко расположенных параллельных плоскостях. Предельные переходы.** Основные результаты получили В.М.Назаренко и М.В.Довжик. Рассматриваемые результаты являются достаточно новыми и представлены в статьях [52 – 56, 145], начиная с 2011 г. В этих публикациях развит подход, обеспечивающий получение значений  $\varepsilon_T$  – теоретического предельного укорочения и, следовательно, значений  $\sigma_T$  – теоретического предела прочности при сжатии однородных материалов вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, для характерных расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $v - d$ , при изменении параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$  (2.11) во всем следующем интервале:

$$0 \leq \beta \leq \infty. \quad (2.18)$$

Поскольку в исследованиях, рассмотренных в предыдущем пункте (п. 2.2.2.1.2), результаты были получены при изменении параметра  $\beta$  (2.11) в интервале (2.14), то в вышеуказанных публикациях достаточно было получить результаты при изменении параметра  $\beta$  (2.11) в следующем интервале:

$$0 \leq \beta \leq 0,1, \quad (2.19)$$

соответствующем весьма близко расположенным трещинам, т.е. при малых значениях расстояний между трещинами в расчетных схемах на рис. 1.1,  $v, z$  по вертикальной оси и малых расстояниях между трещиной и поверхностью материала в расчетной схеме на рис. 1.1,  $d$ . Вышеотмеченная ситуация нашла отражение и в названии настоящего пункта.

Конкретные числовые результаты в публикациях [52 – 56, 145] получены лишь для *хрупкого* разрушения применительно к пространственным задачам для одинаковых круговых трещин (penny-shaped cracks) в соответствии с расчетными схемами на рис. 1.1,  $v - d$ , но изложенный подход позволяет получить соответствующие результаты и при *пластическом* разрушении. Отметим, что в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.3) приведена лишь краткая информация (в аннотированном виде) о полученных в [52 – 56, 145] результатах, так как более подробная информация об этих результатах представлена в разделе 3 настоящей обзорной статьи, который полностью посвящен этим результатам.

Таким образом, можно считать, что в вышеуказанных публикациях изложен подход, обеспечивший получение следующих трех основных результатов.

1. Получены результаты в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) применительно к интервалу (2.18), включая и предельные переходы при  $\beta \rightarrow 0$ .

2. Определены пределы применимости **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2, *beat approximation*) для расчетных схем на рис. 1.1,  $v - d$ .

3. Определены граничные условия на торцах (*жесткое защемление или шарнирное опирание*) в рамках **первого общего подхода** для каждой из расчетных схем на рис. 1.1,  $v - d$ , при которых получаются результаты, наиболее близкие к результатам точного **второго общего подхода**.

Выше в настоящем пункте (п. 2.2.2.1.3) приведена краткая информация (в аннотированном виде) о полученных в публикациях [52 – 56, 145] результатах с той целью, чтобы в п. 2.2.2.1 была представлена полная классификация результатов для однородных материалов при хрупком и пластическом разрушении при сжатии вдоль плоских трещин, которые получены в рамках строгого **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2).

**2.2.2.2. О результатах для слоистых композитных материалов при хрупком и пластическом разрушении.** В настоящем пункте (п. 2.2.2.2) рассмотрим результаты по хрупкому и пластическому разрушению слоистых композитных материалов, составленных из слоев постоянной толщины, при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в границах раздела (interface) слоев, для расчетных схем, представленных на рис. 1.2, *a – д*. Результаты получены в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2), в основном, для плоской задачи в плоскости  $x_1 0x_2$  в соответствии с рис. 2.1, *a, б* для сжимаемых и несжимаемых изотропных и ортотропных материалов с привлечением основных соотношений ТЛТУДТ, изложенных, например, в монографиях [34, 135], для теории конечных (больших) докритических деформаций, а также для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций. В случае ортотропных материалов принимается, что плоскость свойств материала совпадают с плоскостями  $x_j = \text{const}$  на рис. 2.1, *a, б*.

Как уже отмечалось в п. 1.2.1, в случае слоистых композитных материалов (расчетные схемы на рис. 1.2, *a – д*) дополнительно (по сравнению с однородными материалами, расчетные схемы на рис. 1.1, *a – д*) принимается, что сжатие «на бесконечности» осуществляется таким образом, что обеспечивается *одинаковое укорочение вдоль всех слоев*. Указанное нагружение осуществляется как бы через абсолютно жесткие диски, которые обеспечивают одинаковые перемещения вдоль слоев для всех слоев; в этом случае в каждом из слоев возникает однородное напряженно-деформированное докритическое состояние с различными докритическими напряжениями в каждом из слоев. Представляется очевидным, что лишь вышеотмеченная постановка задач обеспечивает возможность исследования явлений внутри композитного материала.

В силу вышеотмеченной постановки задач в каждом слое возникает однородное напряженно-деформированное докритическое состояние; в связи с этим для каждого слоя можно применять общие решения для статических задач ТЛТУДТ при однородных докритических состояниях, которые представлены в ряде монографий автора настоящей обзорной статьи, например, в монографиях [34, 135] и имеют вид типа комплексных представлений (2.5) для плоских задач и типа (2.6) – (2.9) – для пространственных задач.

В соответствии с вышеизложенной постановкой задач для слоистых композитных материалов с трещинами в границах раздела (interface) учитывается внутренняя структура рассматриваемого композита, которая характеризуется параметром  $h$  в расчетных схемах на рис. 1.1, *a, в – д*. В связи с этим возможны различные постановки задач, определяемые соотношениями между параметрами  $h$  и  $a$  на рис. 1.1, *в – д*, т.е. очевидно целесообразна классификация рассматриваемых задач. Классификация постановок задач для композитных материалов с трещинами рассматривалась в монографиях [36, 37]. Применительно к механике разрушения при сжатии слоистых композитных материалов вдоль границ раздела слоев (interface), в которых расположены плоские трещины, классификация постановок рассмотрена в публикациях [47, 172], которым будем следовать ниже, выделяя *микротрещины* и *макротрещины*.

*Микротрещинами* в плоскостях раздела (interface) слоистых композитных материалов (для расчетных схем на рис. 1.2, *a, в – г*) будем называть трещины, для которых выполняются следующие условия:

$$h \cdot a^{-1} \gg 1, \text{ включая } h \cdot a^{-1} \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

В этом случае приходим к задаче для двух соединенных между собой полупространств из различных материалов, в поверхности раздела которых расположены плоские трещины; расчетная схема для анализируемой ситуации в случае одной трещины представлена на рис. 1.2, *б*.

*Макротрещинами* в плоскостях раздела (interface) слоистых композитных материалов (для расчетной схемы на рис. 1.2, а) будем называть трещины, для которых *не выполняются условия (2.20)*. В этом случае макротрещины, расположенные в соседних поверхностях раздела, *взаимодействуют* между собой; таким образом приходим к исследованию ситуаций, для которых характерные простейшие расчетные схемы представлены на рис. 1.2, в – д.

Необходимо отметить, что в [47, 172] также выделены еще структурные трещины, которые имеет смысл рассматривать для слоистых композитных материалов, которые составлены из наполнителя в виде слоев существенно различной толщины и связующего (матрицы) в виде слоев существенно различной толщины. В настоящем же обзоре анализируются результаты, полученные в рамках **второго общего подхода**, для слоистых композитных материалов, которые составлены из слоев наполнителя (армирующих элементов) одинаковой толщины  $h_a$  и слоев связующего (матрицы) одинаковой толщины  $h_m$ , чередующихся вдоль вертикальной оси; в связи с вышеизложенным для рассматриваемых слоистых композитных материалов не имеет смысла выделять структурные трещины.

Результаты по механике разрушения слоистых композитных материалов при сжатии вдоль микро- и макротрещин, расположенных в поверхностях раздела (interface) слоев, представлены в монографии [37, т. 2, гл. 8, §2] и в отдельных публикациях [46 – 50, 147 – 151, 173 – 190, 208 – 212]. Краткая информация о всех полученных результатах (в рамках **второго общего подхода**, п. 1.5.2) для хрупкого и пластического разрушения слоистых композитных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в плоскостях раздела (interface), с указанием ученых, которым принадлежат основные результаты, сгруппированы в следующих двух пунктах: п. 2.2.2.2.1 – результаты для слоистых композитных материалов с *микротрещинами* в границах раздела; п. 2.2.2.2.2 – результаты для слоистых композитных материалов с *макротрещинами* в границах раздела.

**2.2.2.2.1. Результаты для хрупкого и пластического разрушения слоистых материалов с микротрещинами в границах раздела (interface).** Основные результаты получили И.А.Гузь и А.Н.Гузь. Анализируемые результаты получены в публикациях [46, 48, 49, 147 – 150, 173, 189, 190] и представлены также в монографии [37] (т. 2, гл. 8, §2).

Первые результаты в этом научном направлении были получены в публикациях [46, 173, 190], начиная с 1992 г., для хрупкого разрушения в случае *одной микротрещины* в границе раздела слоистого композитного материала; расчетная схема для рассматриваемой ситуации представлена на рис. 1.2, б. В этом случае для  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения для композитного слоистого материала с одной микротрещиной в границе раздела получено следующее соотношение:

$$\varepsilon_T = \min \{ \varepsilon_T^a, \varepsilon_T^m \}, \quad (2.21)$$

где  $\varepsilon_T^a$  и  $\varepsilon_T^m$  – теоретические значения предельного укорочения, соответственно, материала наполнителя (армирующих элементов) и связующего (матрицы), которые соответствуют критическим значениям укорочения применительно к поверхностной неустойчивости полупространства в рамках плоской задачи. Исследования [46, 173, 190] выполнены в рамках ТЛТУДТ применительно ко второму варианту теории малых докритических деформаций для модели линейного упругого изотропного тела с привлечением численных методов (методы конечных разностей с применением базовых схем, предложенных Ю.В.Коханенко).

Для хрупкого и пластического разрушения изотропных и ортотропных сжимаемых и несжимаемых материалов наполнителя (армирующих элементов) и связующего (матрицы) в единой общей форме результаты получены для случая *конечного числа микротрещин* в границе раздела слоистого композитного материала; расчетная схема для рассматриваемого случая представлена на рис. 2.12, где введены следующие обо-

значения:  $D^{(\pm)}$  – полуплоскости из различных материалов;  $L_1$  – совокупность отрезков на границе раздела, соответствующих трещинам;  $L_2$  – совокупность отрезков на границе раздела, соответствующих полному соединению двух материалов. Указанные результаты также в единой общей форме для теории конечных (больших) докритических деформаций, а также первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций получены в публикациях [147 – 151, 189]; в этих статьях также указаны другие публикации, которые способствовали формированию математического метода исследования задач, соответствующих расчетной схеме на рис. 2.12. Этот метод заключается в сведении к однородной задаче сопряжения двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости, которая соответствует вышесформулированной задаче ТЛТУДТ на собственные значения; рассматриваемый метод является развитием (на задачи на собственные значения) метода Мусхелишвили [72], разработанного для краевых задач статики классической линейной теории упругости.

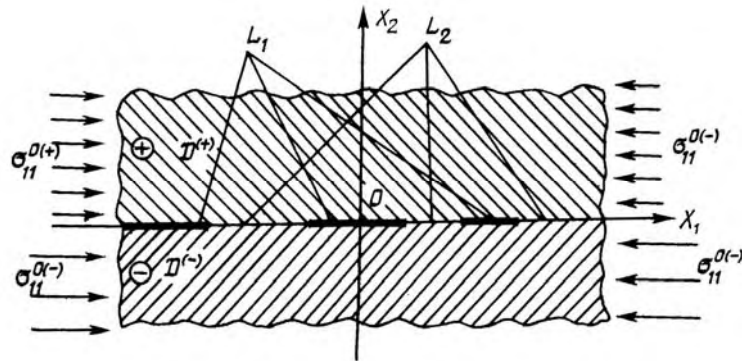


Рис. 2.12

Для реализации вышеуказанного построения метода исследования применительно к расчетной схеме на рис. 2.11 используются представления напряжений и перемещений плоской статической задачи ТЛТУДТ через аналитические функции комплексных переменных, например, в виде (2.5) для случая неравных корней  $\mu_1' \neq \mu_2'$ . Поскольку материалы полуплоскостей  $D^{(\pm)}$  на рис. 2.12 различные, то в указанных представлениях типа (2.5) функции типа  $\Phi_1^{(\pm)}(z_1)$  и  $\Phi_2^{(\pm)}(z_2)$  являются аналитическими и определенными в соответствующих полуплоскостях  $D^{(\pm)}$  на рис. 2.12. Для сведения рассматриваемых задач к однородным задачам сопряжения для двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости, необходимо получить соответствующие представления напряжений и перемещений плоских статических задач ТЛТУДТ для полуплоскости через аналитическую функцию, которая задана во всей плоскости и является аналитической во всей плоскости, по аналогии с представлениями Мусхелишвили [72].

В публикациях [147 – 151, 189] для статических плоских задач ТЛТУДТ получено представление напряжений и перемещений для произвольной полуплоскости  $D^{(\pm)}$  через функции комплексных переменных, которые являются аналитическими и определенными для всей плоскости, для случаев неравных и равных корней  $\mu_1'$  и  $\mu_2'$ . С привлечением вышеуказанных представлений для плоской статической задачи ТЛТУДТ применительно к расчетной схеме, представленной на рис. 2.12, получена однородная задача сопряжения для двух голоморфных во всей плоскости функций для следующих трех случаев компоновки слоистого композитного материала:

для материала верхней полуплоскости  $D^{(+)}$  имеет место случай *неравных* корней и для материала нижней полуплоскости  $D^{(-)}$  имеет место случай *неравных* корней;



для материала верхней полуплоскости  $D^{(+)}$  имеет место случай *равных* корней и для материала нижней полуплоскости  $D^{(-)}$  имеет место случай *равных* корней;

для материала верхней полуплоскости  $D^{(+)}$  имеет место случай *неравных* корней и для материала нижней полуплоскости  $D^{(-)}$  имеет место случай *равных* корней.

Целесообразно отметить, что три вышеуказанных случая компоновки слоистых композитных материалов исчерпывают *все возможные* случаи компоновок слоистых композитных материалов применительно к исследованию микротрещин.

В публикациях [147 – 151, 189] получено **точное** решение однородной задачи сопряжения двух голоморфных во всей плоскости функций в общей вышеизложенной постановке для трех вышеуказанных компоновок слоистого композитного материала. Из этого **точного** решения *независимо от количества трещин* (рис. 2.12) для  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения для слоистого композитного материала получено выражение (2.5), где  $\varepsilon_T^a$  и  $\varepsilon_T^m$  соответствуют достаточно общим моделям теории упругости и пластичности при общей постановке задач ТЛТУДТ, отмеченной выше в настоящем пункте (п. 2.2.2.1).

Вышеизложенные результаты по **точному** определению  $\varepsilon_T$  для слоистого композитного материала с микротрещинами в границе раздела (рис. 2.12) достаточно подробно представлены в монографии [37] (т. 2, гл. 8, §2).

**Примечание.** Предположение о *независимости результатов от количества трещин* применительно к ситуации на рис. 2.12 *нельзя* получить а priori из соображений физического характера в силу следующего факта. Дело в том, что в постановку задач для ситуации на рис. 2.12 входит безразмерный геометрический параметр, соответствующий отношению длины одной из перемычек между трещинами к длине одной из трещин; в связи с этим из соображений физического характера следовало бы ожидать зависимость конечного результата от указанного безразмерного геометрического параметра.

**2.2.2.2.2. Результаты для разрушения слоистых материалов с макротрещинами в границах раздела (interface).** Основные результаты получил И.А.Гузь. Обсуждаемые результаты представлены в публикациях [50, 174 – 188, 208 – 212], начиная с 1994 г. В указанных публикациях излагаются результаты исследований для макротрещин в границах раздела слоев (interface) в рамках расчетных схем, представленных на рис. 1.2,  $\sigma - \delta$  для характерных простейших случаев. Эти исследования выполнены, в основном, для плоской задачи в плоскости  $x_1 0x_2$  применительно к хрупкому разрушению; при этом применяется второй вариант теории малых докритических деформаций ТЛТУДТ для сравнительно жестких конструкционных материалов и теория конечных (больших) докритических деформаций ТЛТУДТ для высокоэластических материалов.

Следует отметить, что результаты настоящего пункта (п. 2.2.2.2.2) получены *исключительно с применением численных методов* исследования – методов конечных разностей и конечных элементов. Для получения обсуждаемых результатов не представляется возможным применение аналитических методов исследования по аналогии с подходами, изложенными в предыдущем пункте (п. 2.2.2.2.1).

Ниже рассмотрим ряд конкретных результатов, которые представлены в публикациях [50, 174 – 188, 208 – 212]. Следует отметить, что конкретные результаты в указанных публикациях, в основном, получены для *структурных* трещин. Как уже отмечалось перед п. 2.2.2.1, в соответствии с классификацией, изложенной в [47, 172], структурные трещины в слоистых композитных материалах имеет смысл выделять, когда слоистый материал составлен из наполнителя (армирующих элементов) в виде слоев существенно различной толщины и связующего (матрицы) в виде слоев существенно различной толщины. В указанном случае при наличии слоев связующего (матрицы) значительной толщины их можно моделировать полуплоскостями из этого материала связующего. При таком подходе между двумя полуплоскостями из материала связующего (матрицы) образовывается некоторая структура, состоящая из слоев наполнителя и связующего, трещины в границах раздела которых можно называть *структурными* трещинами. В качестве примера на рис. 2.13, соответствующем рис. 1

[174], показаны две параллельные структурные трещины в границах раздела слоя наполнителя (армирующего элемента) и двух полуплоскостей из материала связующего (матрицы); необходимо отметить, что расчетная схема на рис. 2.13 полностью соответствует расчетной схеме на рис. 1.2, в.

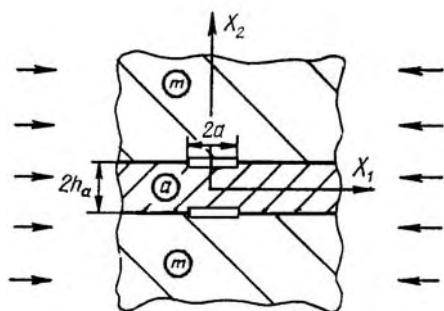


Рис. 2.13

Также следует отметить, что конкретные результаты, представленные в публикациях [50, 174 – 188, 208 – 212], получены, в основном, для слоистых композитов, которые образованы продольно-поперечной укладкой слоев из однонаправленного волокнистого композита. Указанный монослой однонаправленного волокнистого композита в континуальном приближении рассматривается как однородный ортотропный материал с усредненными упругими постоянными, которые определяются из выражений общеизвестных монографий. Таким образом, при образовании слоистого композитного материала продольно-поперечной укладкой слоев, например, на рис. 2.13, в слоях наполнителя (армирующих элементах, все величины которых отмечены индексом «*a*») волокна направлены вдоль оси  $0x_1$  и в слоях связующего (матрицы, все величины которой отмечены индексом «*m*») волокна направлены перпендикулярно к плоскости рис. 2.13; в этом случае при нагружении вдоль оси  $0x_1$  (рис. 2.13) наполнитель является более жестким материалом и связующее является менее жестким материалом.

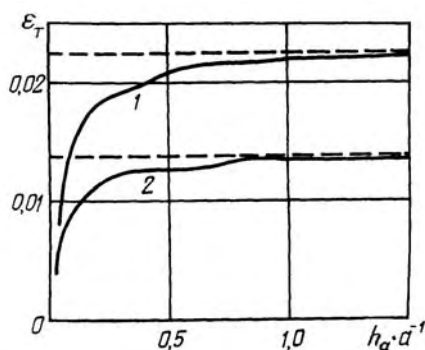


Рис. 2.14

Конкретные результаты для слоистого композита с двумя структурными трещинами, расчетная схема для которого представлена на рис. 2.13, с привлечением метода конечных разностей изложены в публикации [174]; при этом изменялось количество узлов сетки, чтобы обеспечить достоверность полученных результатов. Исследования в [174] проводились для различных материалов в монослое; на рис. 2.14 приведены, в качестве примера, результаты лишь для двух материалов монослоя: *первый* материал, результаты для которого на рис. 2.14 отмечены цифрой «1», образован углеродными волокнами (Торнел – 300) в виде наполнителя и эпоксидной смолой в виде связующего; *второй* материал, результаты для которого на рис. 2.14 отмечены цифрой «2», образован борными волокнами (фирмы Avco) в виде наполнителя и эпоксидной смолой в виде связующего. Дополнительные сведения о материале для монослоя, включая указанные материалы «1» и «2», а также другие рассмотренные материалы, и о реализации численного анализа, обеспечивающего достоверность получаемых результатов, можно получить из публикации [174].

На рис. 2.14 приведена, согласно [174], зависимость величины  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения для композитного слоистого материала с двумя структурными трещинами (рис. 2.13) от параметра  $h_a \cdot a^{-1}$ , характеризующего относительные размеры трещины (рис. 2.13), для *первого* и *второго* вышеуказанного композитного материала. Отметим, что на рис. 2.14 сплошными линиями показаны результаты для двух структурных трещин, получены в [174] численными методами, и штриховыми линиями показаны результаты для одной микротрещины, соответствующие выражению (2.21), которые впервые численными методами были получены в публикациях [46, 173, 190], начиная с 1992 г.

В [174] и в других вышеуказанных публикациях отмечен ряд выводов, относительно закономерности влияния различных параметров на ситуацию, представленную на рис. 2.13. Так, в частности, из рис. 2.14 следует, что при уменьшении параметра  $h_a \cdot a^{-1}$  для соответствующих композитов можно получить уменьшение величины  $\varepsilon_T$  на сотни процентов.

Для слоистого композитного материала с периодической (вдоль оси  $0x_2$ ) системой трещин, расчетная схема для которого представлена на рис. 2.15, результаты представлены в публикации [176] за 1995 г., которая была первой публикацией для слоистых композитных материалов с периодической системой трещин, и в последующие годы в ряде других публикаций [177 – 188], например, [184]. Результаты для периодической системы трещин (рис. 2.13) в [176] получены с привлечением численных методов в рамках метода сеток с изменением количества узлов сетки, обеспечивающем, как и в [174] для двух трещин, достоверность получаемых результатов. Дополнительные конкретные сведения можно получить непосредственно из публикации [176].

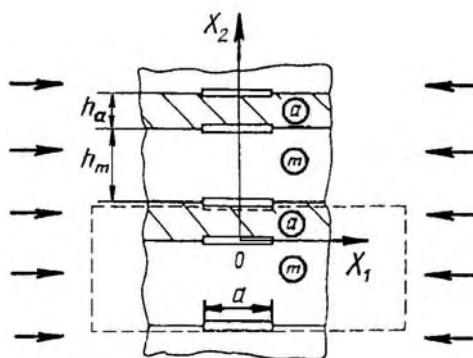


Рис. 2.15

На рис. 2.16, соответствующем рис. 2 [176], для слоистого композитного материала с периодической системой трещин (рис. 2.15) приведена зависимость  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения вдоль оси  $0x_1$  (рис. 2.15) от параметра  $h_a \cdot a^{-1}$ , характеризующего относительные размеры трещин. Результаты на рис. 2.16 приведены для композитного материала, который применительно к рис. 2.14 назван «первым» материалом; при этом сплошная кривая соответствует слоистому композиту с периодической системой трещин (рис. 2.15), штриховая кривая соответствует такому же композитному материалу с двумя трещинами (рис. 2.13) и штрих-пунктирная кривая соответствует одной микротрещине в таком же композитном материале, для которой имеет место выражение (2.23).

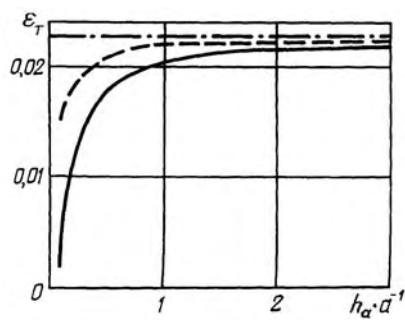


Рис. 2.16

В результате анализа полученных закономерностей в [176] сформулирован ряд интересных выводов; остановимся на следующих двух выводах. Первый вывод – из рис. 2.16 следует, что при  $h_a \cdot a^{-1} > 2$  сплошная, штриховая и штрих-пунктирная линии практически совпадают; следовательно, при  $h_a \cdot a^{-1} > 2$  можно не учитывать взаимовлияние трещин в параллельных плоскостях применительно к двум трещинам (рис. 2.13) и к периодическому ряду трещин (рис. 2.15), применяя выражение (2.21) для одной микротрещины. Второй вывод – из рис. 2.16 следует, что сплошная кривая (периодический ряд трещин на рис. 2.15) расположена ниже штриховой кривой (две трещины на рис. 2.13), а штриховая кривая расположена ниже штрих-пунктирной линии (одна микротрещина в границе раздела – выражение (2.21)); отмеченная ситуация соответствует соображениям физического характера.

Дополнительную информацию о вышеизложенных и родственных результатах можно также получить из публикаций [175, 177 – 188].

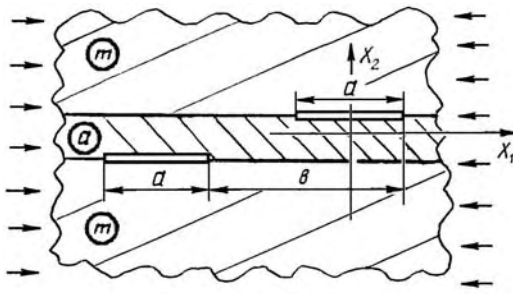


Рис. 2.17

Необходимо отметить, что в последние годы (2006 – 2008 гг.) были получены результаты по разрушению слоистых композитных материалов с *макротрещинами* в границах раздела слоев (interface) для более сложных расчетных схем по сравнению с рис. 1.2, в, г, 2.13 и 2.15, которые представлены в публикациях [208 – 212]. Обсуждаемые результаты относятся к макротрещинам, которые не расположены друг над другом, как на рис. 1.2, в, г, 2.13 и 2.15, а смещены в

параллельных плоскостях друг относительно друга. Обсуждаемая расчетная схема для двух, смещенных друг относительно друга, структурных трещин представлена на рис. 2.17, где величина смещения определяется величиной  $b$ ; при  $b = 0$  расчетная схема на рис. 2.17 переходит в расчетную схему на рис. 2.13. В [208 – 212] также получены результаты и для периодической системы структурных трещин, которые смещены друг относительно друга; для указанной ситуации расчетная схема соответствует рис. 2.17, который периодически повторяется вдоль оси  $Ox_2$ , при этом при  $b = 0$  обсуждаемая расчетная схема переходит в расчетную схему на рис. 2.15. Заметим, что исследования в [208 – 212] значительно усложняются по сравнению с исследованиями для расчетных схем типа рис. 2.13 и 2.15, так как полностью нарушается симметрия, которая характерна для схем на рис. 2.13 и 2.15.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении в настоящем пункте (п.2.2.2) результатов, которые получены для *хрупкого и пластического* разрушения при сжатии вдоль трещин в однородных материалах и слоистых композитных материалах в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2).

**2.2.3. О результатах, полученных для вязкоупругого разрушения.** Основные результаты получил С.Д.Акбаров. Обсуждаемые результаты при вязкоупругом разрушении получены для однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, и большинство результатов – для слоистых композитных материалов и элементов конструкций при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в границах раздела (interface) слоев. Рассматриваемые результаты представлены в монографии [93], опубликованной в 2012 г., и в отдельных статьях [1, 91, 92, 94, 97 – 102, 204, 207], начиная с 1998 г., и в других публикациях, указанных в монографии [93] и в обзорной статье [92]. Целесообразно отметить, что среди отмеченных публикаций имеются отдельные публикации, посвященные исследованию хрупкого разрушения (для упругих моделей, например, статьи [1, 207]).

**С.Д.Акбаров** разработал методы исследования *вязкоупругого* разрушения материалов и элементов конструкций при сжатии вдоль трещин, которые включают следующие общие позиции.

**I.** Исследования проводятся с привлечением статических уравнений и граничных условий ТЛТУДТ (трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел), которая изложена в ряде монографий, например, [34, 135], для определения критических значений параметров нагружения и деформирования, при достижении которых возникает локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин, определяющая начальный этап (старт) разрушения. Таким образом, обсуждаемые исследования по *вязкоупругому* разрушению (по принятой в настоящей обзорной статье терминологии) проводятся в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) и соответствующим образом определяются величины  $\sigma_T$  – теоретический предел прочности при сжатии и  $\varepsilon_T$  – теоретическое значение предельного укорочения.

**II.** Для описания вязкоупругого деформирования материала, в основном, связующего (матрицы) в композитном материале, применяется линейная теория вязкоупругости наследственного типа с привлечением дробно-экспоненциальных операторов Работнова.

**III.** В качестве критерия устойчивости при вязкоупругом деформировании применяется обобщение (на задачи ТЛТУДТ) приближенного критерия устойчивости Хоффа [191], первоначально предложенного для исследования устойчивости тонкостенных систем (стержни, пластины и оболочки) при ползучести. В соответствии с подходом [191] вводится малое отклонение  $f(x)$  первоначально прямолинейной формы тонкостенных систем и в дальнейшем анализируется изменение  $f(x, t)$  во времени при постоянной или возрастающей внешней нагрузке. Критическое время  $t_{cr}$  при этом определяется из следующего условия:

$$|f(x, t)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_{cr}. \quad (2.22)$$

В случае слоистых и волокнистых композитных материалов для исследования задач устойчивости при вязкоупругом деформировании необходимо вводить малые отклонения от прямолинейной формы (типа величины  $f(x)$  в случае [191] тонкостенных элементов конструкций) во внутреннюю структуру композитного материала. Вышеотмеченная процедура введения малых отклонений в структуру композитного материала осуществляется при помощи соответствующих методов механики искривленных композитов, изложенной в монографии [95], обзор полученных результатов в рамках которой представлен в обзорной статье [96]. При таком подходе критическое время  $t_{cr}$  определяется из условия типа (2.22), при этом из соответствующих выражений также вычисляются величины  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_T$ . Таким образом, при обсуждаемом подходе для композитных материалов и соответствующих элементов конструкций при вязкоупругом деформировании определяются следующие величины:

$$t_{cr}, \sigma_T \text{ и } \varepsilon_T. \quad (2.23)$$

**IV.** Для исследования соответствующим образом сформулированных задач применяется преобразование Лапласа по времени, при этом для перехода к оригиналам применяется приближенный метод Шепери [205].

**V.** Для получения конкретной информации на заключительном этапе исследования применяются, в основном, численные методы – метод конечных элементов и метод граничных конечных элементов.

Целесообразно отметить, что выше в весьма краткой форме представлены сведения о разработанных *С.Д.Акбаровым* методах исследования задач механики разрушения при сжатии вдоль трещин применительно к *вязкоупругому* разрушению; отмеченные методы развиты в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) и существенным представляется применение обобщения критерия устойчивости типа Хоффа [191] к задачам ТЛТУДТ. С привлечением вышеизложенных методов в многочисленных публикациях *С.Д.Акбарова и его учеников* исследованы различные классы задач механики разрушения композитных материалов и соответствующих элементов конструкций при сжатии вдоль трещин в случае *вязкоупругого* разрушения.

**Вывод.** В силу ограниченности объема настоящей обзорной статьи вышеизложенные сведения о результатах по механике разрушения при сжатии вдоль трещин в случае *вязкоупругого* разрушения приведены в весьма краткой форме. Обсуждаемые сведения включены в настоящую обзорную статью в *указанной форме* лишь для обеспечения полноты классификации проблем, развиваемых в механике разрушения при сжатии вдоль трещин в рамках **второго общего подхода** (п. 1.5.2). Безусловно, наличие многочисленных обсуждаемых результатов и обобщение их в монографии [93], опубликованной в 2012 г., предопределяет целесообразность публикации отдельной обобщающей обзорной статьи, посвященной анализу рассматриваемых результатов и являющейся соответствующим развитием обзорной статьи [92].

В заключение к рассматриваемому пункту (п. 2.2.3) отметим лишь два замечания, относящиеся к анализу обсуждаемых результатов.

**Замечание 1.** Критерий устойчивости типа Хоффа [191] и его обобщения в ТЛТУДТ являются сугубо приближенным подходом в теории устойчивости деформируемых тел, поскольку дополнительно вводится малое отклонение от определенной формы; обсуждаемый критерий никак не связан с общепринятым и широко применяемым подходом в теории устойчивости деформируемых тел, который, как общеизвестно, состоит в применении строгих линеаризованных динамических уравнений и исследований (в их рамках) поведения малых возмущений во времени (указанный подход получил общеизвестное название – динамический метод исследования устойчивости). Применение строгих статических уравнений и граничных условий ТЛТУДТ в исследованиях (позиция **I**), обсуждаемых в настоящем пункте (п. 2.2.2), не изменяет вышеотмеченной оценки критерия устойчивости типа Хоффа [191] применительно к обсуждаемым результатам по механике *вязкоупругого* разрушения материалов и элементов конструкций при сжатии вдоль трещин. В механике *хрупкого и пластического* разрушения при сжатии вдоль трещин, результаты которой обсуждались в предыдущем пункте (п. 2.2.2) и которые получены с привлечением статического метода ТЛТУДТ, строго доказано, что выполняются достаточные условия применимости статического метода; следовательно, обсуждаемые результаты при хрупком и пластическом разрушении соответствуют применению общепринятого динамического метода исследования. В вышеуказанной ситуации заключается существенное отличие обсуждаемых результатов при хрупком и пластическом разрушении от результатов при вязкоупругом разрушении.

**Замечание 2.** При разработанных методах анализа *нельзя исследовать развитие расслоений*, хотя и проводится исследование роста отклонения от первоначальной формы при  $N_{\max} = 6; 7; 8$  в соответствии с выражением (2.22). Дело в том, что указанный анализ при  $N_{\max} = 6; 7; 8$  относится только к определению параметров (2.23), соответствующих явлению потери устойчивости, и не относится к реальному росту отслоения или расслоения. Для анализа развития расслоения или отслоения необходимо исследовать *нелинейную задачу о послекритическом деформировании* (по терминологии настоящей обзорной статьи необходимо исследовать **вторую основную задачу** (п. 1.5.1)).

Вышеизложенными краткими сведениями ограничимся в настоящем пункте (п. 2.2.3) при обсуждении результатов при *вязкоупругом* разрушении в механике разрушения при сжатии вдоль трещин, которые получены в рамках **второго общего подхода** (п. 1.5.2).

### **3. Информация о результатах для хрупкого разрушения однородных материалов с трещинами в близко расположенных параллельных плоскостях. Предельные переходы.**

*Основные результаты получили В.М.Назаренко и М.В.Довжик.* В настоящем разделе (п. 3) в краткой форме излагаются достаточно новые результаты, которые представлены в статьях [52 – 56, 145], опубликованных в последние годы, начиная с 2011 г. В аннотированном виде краткая информация (размером в 1 стр.) изложена в п. 2.2.2.1.3 настоящей обзорной статьи для обеспечения полноты классификации проблем, развиваемых в механике разрушения при сжатии вдоль трещин в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2); в связи с этим настоящий раздел (п. 3) можно рассматривать как продолжение п. 2.2.2.1.3 с детализацией излагаемых в нем результатов. Обсуждаемые результаты [52 – 56, 145] относятся к расчетным схемам на рис. 1.1,  $v - d$  и получены применительно к пространственным задачам для одинаковых трещин в виде кругового диска (*penny-shaped cracks*) при внешнем нагружении в виде (2.3) применительно к рис. 2.2.

**3.1. Общие вопросы.** Как уже отмечалось в п. 2.2.2.1.2, для вышеуказанных пространственных задач с привлечением преобразования Ханкеля и соответствующих подходов для смешанных краевых задач статики линейного упругого тела, изложенных в монографиях [88, 89], получены парные интегральные уравнения, которые сведены к одномерным однородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода;

таким образом, обсуждаемые пространственные задачи механики разрушения при сжатии вдоль трещин сведены к задачам на собственные значения указанных одномерных интегральных уравнений. Выражения для определения ядер одномерных интегральных уравнений в развернутом виде представлены в монографиях [36], [37] (т. 2) и [77] (т. 4, книга 1); отметим, что ядра имеют сложную структуру и представляются в виде определенных интегралов от различных специальных функций, в том числе и от функции кругового цилиндра.

В связи со строгим доказательством непрерывности указанных ядер в интересующем интервале, для численного определения собственных чисел однородных одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода применялся метод Бубнова – Галеркина; при этом в качестве координатных функций выбирались степенные функции. В силу сложной структуры ядер одномерных интегральных уравнений в рассматриваемой ситуации (применение метода Бубнова – Галеркина и степенных функций в качестве координатных функций) *не представлялось возможным* выполнить интегрирование в аналитической форме выражений, соответствующих указанным ядрам; в связи с вышеизложенным дополнительно применялось численное интегрирование и квадратурная формула Гаусса, что привело к громоздким преобразованиям и к большому объему вычислений. Вышеизложенная ситуация привела к тому, что конкретные результаты не были получены для сравнительно большого числа координатных функций в (2.11), число которых определяется значениями  $N$  в (2.11); так, даже для доказательства достоверности получаемых результатов, что отражено в табл. 2.1 – 2.3, вычисления проводились при  $N_{\max} = 6; 7; 8$ , в других же случаях ограничивались  $N_{\max} = 3; 4$ . При таком подходе, как уже отмечалось в п. 2.2.2.1.3, конкретные результаты были получены при изменении параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$  в интервале (2.14). Обсуждаемые результаты более подробно рассмотрены в п. 2.2.2.1.2; эти результаты получены, в основном, В.М.Назаренко и другими учеными, публикации которых указаны в начале п. 2.2.2.1.2.

В публикациях [52 – 56, 145] был предложен **подход**, позволивший получить конкретные результаты во всем интервале (2.18) изменения параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$ ; поскольку подход п. 2.2.2.1.2 уже позволил получить изложенные там результаты для интервала (2.14) изменения параметра  $\beta$ , то в публикациях [52 – 56, 145] достаточно было получить результаты лишь для интервала (2.19) изменения параметра  $\beta$ , хотя в указанных публикациях представлены конкретные результаты и для более широкого интервала изменения параметра  $\beta$  по сравнению с интервалом (2.19).

Целесообразно заметить, что подход и результаты [52 – 56, 145] являются *принципиально новыми*, позволившими фактически получить предельные переходы при  $\beta \rightarrow 0$ , что уже отмечалось в п. 2.2.2.1.3; обсуждаемые результаты получены В.М.Назаренко и М.В.Довжиком. Подход вышеуказанных публикаций основан на применении пакета (Wolfram Mathematica 7), являющегося пакетом символьной математики. Mathematica имеет высокую скорость и наперед заданную гарантируемую точность вычислений, что позволяет ей эффективно работать на персональных компьютерах. Основная особенность развитого нового подхода заключается в том, что в ранее указанной ситуации при определении собственных чисел одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (применение метода Бубнова – Галеркина и степенных функций в качестве координатных функций) удалось избежать процедуры численного интегрирования и применения квадратурной формулы Гаусса; используя пакет символьных вычислений Mathematica, *обсуждаемые интегралы были вычислены в аналитической форме*. В связи с этим были исключены громоздкие преобразования и большой объем вычислений, характерные для подхода п. 2.2.2.1.2; вышеотмеченное позволило при дальнейших численных расчетах увеличить точность вычислений за счет исключения погрешности численного интегрирования.

Для ускорения вычислений интегралов был использован алгоритм, основанный на применении рекуррентных соотношений; для проведения вычислений были рассмотрены следующие интегралы:

$$L(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{[a^2 + (x+y)^2]^2} dx; \quad V(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{[a^2 + (x-y)^2]^2} dx; \quad (3.1)$$

$$LL(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{[a^2 + (x+y)^2]^4} dx; \quad VV(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{[a^2 + (x-y)^2]^4} dx.$$

Для интегралов (3.1) были получены рекуррентные соотношения, которые позволили вычислить и другие родственные интегралы.

Применительно к исследованию задач для материала с периодической системой трещин была рассмотрена и применена следующая функция:

$$L(n, z) = \frac{d^n \psi(z)}{dz^n}, \quad (3.2)$$

которая в пакете Mathematica обозначается Poly Gamma  $[n, z]$ , где

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z). \quad (3.3)$$

В (3.3) через  $\Gamma(z)$  обозначена обычно принятая гамма-функция.

Вышеприведенными весьма краткими сведениями о **подходе**, разработанном в публикациях [52 – 56, 145], ограничимся в настоящей обзорной статье; более подробные сведения можно получить в вышеуказанных публикациях. Ниже в настоящем разделе (п. 3) приведем также в достаточно краткой форме информацию о конкретных результатах, изложенных в [52 – 56, 145], применительно к хрупкому разрушению однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, включая и предельные переходы к приближенным результатам, соответствующим **первому общему подходу** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, первая часть п. 1.5.2). Чтобы избежать возможных погрешностей, связанных с упрощениями, в основном, геометрической стороны вопроса при переходе к первому и второму вариантам теории малых докритических деформаций, в [52 – 56, 145] получены конкретные результаты в рамках теории конечных (больших) докритических деформаций, изложенной в ряде монографий, например, [34, 135]; эти же результаты в краткой форме и представлены ниже в настоящем разделе (п. 3). Обсуждаемые результаты получены для изотропных сжимаемых и несжимаемых высокоэластических материалов с упругими потенциалами простейшего типа, необходимые сведения о которых также представлены в ряде монографий, например, [34, 135], применительно к пространственным задачам для одинаковых круговых трещин (penny-shaped cracks) для характерных расчетных схем, указанных на рис. 1.1,  $\nu - \delta$  в случае нагружения в виде (2.3). Конкретные результаты, полученные в [52 – 56, 145], ниже представим с применением обозначений, принятых в настоящей обзорной статье:  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_T$  – теоретический предел прочности при сжатии и теоретическое значение предельного укорочения, полученные в рамках **второго общего подхода** (п. 1.5.2);  $\sigma_T^I$  – теоретический предел прочности при сжатии (по аналогии с обозначением (2.16)), полученный в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2); параметр  $\beta = h \cdot a^{-1}$ , где величины  $h$  и  $a$  указаны на рис. 1.1,  $\nu - \delta$ . При этом для величины  $\sigma_T^I$  будем использовать ее значение, соответствующее граничным условиям жесткой заделки круговой пластины радиуса  $a$ ; еще раз отметим, что вели-



чина  $\sigma_T^I$  в соответствии с балочным приближением имеет одинаковое значение для всех расчетных схем на рис. 1.1, *в* – *д*. Граничные условия жесткого защемления являются наиболее популярными в исследованиях в рамках **первого общего подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, п. 1.5.2).

В последующих пунктах настоящего раздела (п. 3) конкретные результаты, полученные в [52 – 56, 145], приведем отдельно для каждой из расчетных схем, представленных на рис. 1.1, *в* – *д*.

**3.2. Приповерхностная трещина.** Расчетная схема представлена на рис. 1.1, *д*, результаты исследований для рассматриваемой ситуации представлены в публикациях [52, 145]. Конкретные результаты изложены в [52] для несжимаемого материала с потенциалом Бартенева – Хазановича и для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа, в [145] конкретные результаты изложены для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа).

В качестве примера приведем конкретные результаты для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (тело или материал неогукковского типа), которые изложены в публикации [145]; эти результаты представлены на рис. 3.1, *а*, *б* и в табл. 3.1. Так, на рис. 3.1 приведена зависимость  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения (для расчетной схемы на рис. 1.1, *д*) от геометрического параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$ ; при этом на рис. 3.1, *а* приведены результаты для интервала  $0,1 \leq \beta \leq 3,0$  и на рис. 3.1, *б* приведены результаты для интервала  $0,01 \leq \beta \leq 0,10$ . Отметим, что в настоящем пункте (п. 3.2) в соответствии с расчетной схемой на рис. 1.1, *д* через  $h$  обозначено расстояние от трещины до границы материала, т.е.  $h$  – толщина «как бы выделенной тонкой пластины».

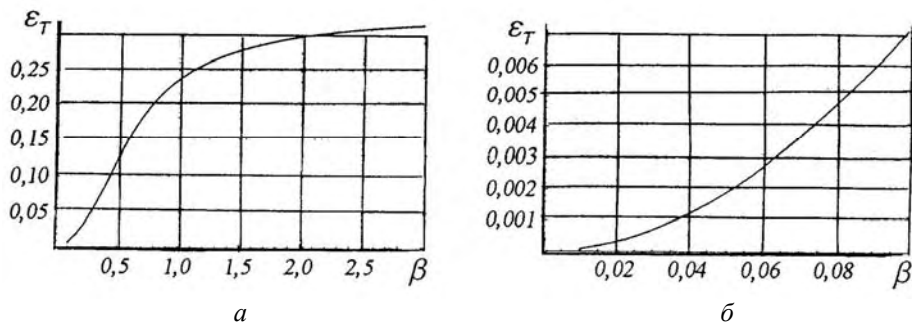


Рис. 3.1

Необходимо отметить, что в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2) в случае несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа) для определения величины  $\sigma_T^I$  – теоретического предела прочности на сжатие при указанном подходе имеет место [145] выражение

$$\sigma_T^I = A^I c_{10} \beta^2, \quad \beta = h \cdot a^{-1}, \quad (3.4)$$

где коэффициент  $A^I$  для жесткого защемления круговой пластины, которое наиболее популярно в исследованиях в рамках **первого общего подхода**, равен

$$A^I = 9,7866. \quad (3.5)$$

Выражения (3.4) и (3.5) соответствуют выражениям (2.16) применительно к несжимаемому материалу с упругим потенциалом Трелоара (неогукковскому телу или материалу) при привлечении теории конечных (больших) докритических деформаций. Кроме того, в выражение (3.4) входит упругая постоянная  $c_{10}$ , соответствующая упругому потенциалу Трелоара (например, монография [34, стр. 358, выражение (3.431)].

Таблица 3.1

$\beta$	$\varepsilon_T$	A
$9 \cdot 10^{-2}$	$5,96120 \cdot 10^{-3}$	8,83140
$8 \cdot 10^{-2}$	$4,76105 \cdot 10^{-3}$	8,92798
$7 \cdot 10^{-2}$	$3,68511 \cdot 10^{-3}$	9,02475
$6 \cdot 10^{-2}$	$2,73747 \cdot 10^{-3}$	9,12490
$5 \cdot 10^{-2}$	$1,92242 \cdot 10^{-3}$	9,22762
$4 \cdot 10^{-2}$	$1,24441 \cdot 10^{-3}$	9,33309
$3 \cdot 10^{-2}$	$7,08118 \cdot 10^{-4}$	9,44157
$2 \cdot 10^{-2}$	$3,18445 \cdot 10^{-4}$	9,55334
$1 \cdot 10^{-2}$	$8,05725 \cdot 10^{-5}$	9,66870
$1 \cdot 10^{-3}$	$8,14575 \cdot 10^{-7}$	9,77490
$1 \cdot 10^{-4}$	$8,15068 \cdot 10^{-9}$	9,78076
$1 \cdot 10^{-5}$	$8,14758 \cdot 10^{-11}$	9,77710
$1 \cdot 10^{-6}$	$8,14606 \cdot 10^{-13}$	9,77527
$1 \cdot 10^{-9}$	$8,14575 \cdot 10^{-19}$	9,77490

Учитывая структуру выражения (3.4) для величины  $\sigma_T^I$ , соответствующей **первому общему подходу** (beam approximation, п. 1.5.2), для удобства сравнения выражение для  $\sigma_T$ , соответствующее **второму общему подходу** (п. 1.5.2), можно также представить в аналогичной форме в следующем виде:

$$\sigma_T = A c_{10} \beta^2, \quad A = A(\beta). \quad (3.6)$$

Безусловно, для определения величины  $A(\beta)$ , соответствующей в (3.6) каждому значению  $\beta$ , необходимо выполнить значительную работу математического и численного характера, кратко описанную в пп. 2.2.2.1.2 и 3.1.

Принимая во внимание обозначения (3.4) – (3.6), в табл. 3.1 приведены значения величин  $\sigma_T$  и A при изменении параметра  $\beta$  в интервале  $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$ .

Для получения конкретных результатов, представленных в табл. 3.1 и на рис. 3.1, а, б, в [145] использовалось максимальное число координатных функций  $N_{\max} = 20$ ; при этом практическая сходимость достигалась как путем увеличения числа координатных функций, так и путем увеличения точности вычислений, используя большее количество значащих цифр после запятой.

Из анализа конкретных результатов, представленных на рис. 3.1, а, б и в табл. 3.1, можно сделать следующие существенные выводы.

1. Получены результаты в весьма широком интервале изменения параметра  $\beta$  ( $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 3$ ), включающем практически и предельный переход (при  $\beta \rightarrow 0$ ) к результатам **первого основного подхода** (балочное приближение, балочный подход, beam approximation, п. 1.5.2).

2. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) при достаточно малых значениях параметра  $\beta$  (при  $\beta \rightarrow 0$ ) можно получить **уменьшение** величины  $\varepsilon_T$  на **два и более порядка** по сравнению со случаем одной изолированной трещины без учета влияния граничной поверхности материала (п. 2.2.2.1.1), что на рис. 3.1, а соответствует значению  $\varepsilon_T$  при  $\beta \geq 3$ .

3. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) обосновано применение **граничных условий жесткой заделки в первом общем подходе** (п. 1.5.2), так как при  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$  согласно табл. 3.1 значение величины A в (3.6) практически совпадает со значением  $A^I$  (3.5).

4. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) установлен предел применимости **первого общего подхода** (beam approximation, п. 1.5.2) с точки зрения результатов (рис. 3.1, а, б и табл. 3.1) **второго общего подхода** (п. 1.5.2). Так, при  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$  результаты применительно к  $\sigma_T$  по **второму и первому общему подходу** практически совпадают.

Целесообразно отметить, что сформулированные выше выводы основаны на результатах [145], полученных для несжимаемого материала с потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа). В [52] представлены конкретные результаты, аналогичные результатам на рис. 3.1, а, б) и в табл. 3.1, для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича и для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа; в результате анализа в [52] применительно к вышеуказанным материалам получены выводы, аналогичные вышесформулированным выводам количественного и качественного характера [145] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа).

Безусловно, актуальным представляется проведение соответствующего анализа для сравнительно жестких конструкционных материалов.

**3.3. Две трещины.** Расчетная схема представлена на рис. 1.1, в, результаты исследований для рассматриваемой ситуации представлены в публикациях [53, 55]. Конкретные результаты изложены в [53] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича и для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа, в [55] конкретные результаты изложены для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа).

В качестве примера приведем конкретные результаты для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича, которые изложены в публикации [53]; эти результаты представлены на рис. 3.2, а, б) и в табл. 3.2. Так, на рис. 3.2 приведена зависимость  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения (для расчетной схемы на рис. 1.1, в) от геометрического параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$ ; при этом на рис. 3.2, а приведены результаты для интервала  $0,1 \leq \beta \leq 3,0$  и на рис. 3.2, б приведены результаты для интервала  $0,01 \leq \beta \leq 0,10$ .

Отметим, что в настоящем пункте (п. 3.3) в соответствии с расчетной схемой на рис. 1.1, в через  $2h$  обозначено расстояние между двумя трещинами, т.е.  $2h$  – толщина «как бы выделенной тонкой пластины».

Необходимо отметить, что в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2) в случае несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича для определения величины  $\sigma_T^I$  – теоретического предела прочности на сжатие при указанном подходе имеет место [50] следующее выражение:

$$\sigma_T^I = 2A^I \mu \beta^2, \quad \beta = h \cdot a^{-1}, \quad (3.7)$$

где коэффициент  $A^I$  для жесткого защемления круговой пластины, которое наиболее популярно в исследованиях в рамках **первого общего подхода**, равен

$$A^I = 2,44667. \quad (3.8)$$

Выражения (3.7) и (3.8) соответствуют выражению (2.16) применительно к несжимаемому материалу с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича при привлечении теории конечных (больших) докритических деформаций.

Кроме того, в выражение (3.7) входит упругая постоянная  $\mu$ , соответствующая упругому потенциалу Бартенева – Хазановича (например, монография [34], стр. 358, выражение (3.434)).

Учитывая структуру выражения (3.7) для величины  $\sigma_T^I$ , соответствующей **первому общему подходу** (beam approximation, п. 1.5.2), для удобства сравнения выражение для  $\sigma_T$ , соответствующее **второму общему подходу** (п. 1.5.2), можно также представить в аналогичной форме в следующем виде:

$$\sigma_T = 2A\mu\beta^2, A = A(\beta). \quad (3.9)$$

Безусловно, для определения величины  $A(\beta)$ , соответствующей в (3.9) каждому значению  $\beta$ , необходимо выполнить значительную работу математического и численного характера, кратко описанную в пп. 2.2.2.1.2 и 3.1.

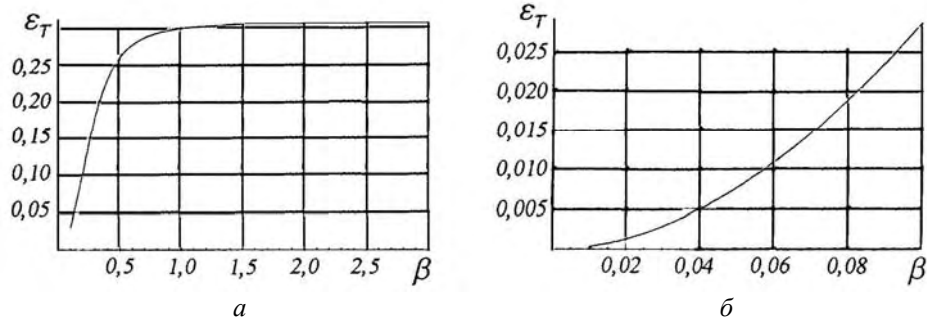


Рис. 3.2

Принимая во внимание обозначения (3.7) – (3.9), в табл. 3.2 приведены значения величин  $\sigma_T$  и  $A$  при изменении параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$  в интервале  $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$ . Для получения конкретных результатов, представленных в табл. 3.2 и на рис. 3.2, а, б, в [53] использовалось максимальное число координатных функций  $N_{\max} = 25$ ; при этом практическая сходимость достигалась как путем увеличения числа координатных функций, так и путем увеличения точности вычислений, используя большее количество значащих цифр после запятой, дополнительные сведения по этим процедурам представлены в [53].

Таблица 3.2

$\beta$	$\varepsilon_T$	$A$
$9 \cdot 10^{-2}$	$2,34269 \cdot 10^{-2}$	2,32948
$8 \cdot 10^{-2}$	$1,87479 \cdot 10^{-2}$	2,32564
$7 \cdot 10^{-2}$	$1,45380 \cdot 10^{-2}$	2,32532
$6 \cdot 10^{-2}$	$1,08187 \cdot 10^{-2}$	2,32875
$5 \cdot 10^{-2}$	$7,61086 \cdot 10^{-3}$	2,33624
$4 \cdot 10^{-2}$	$4,93540 \cdot 10^{-3}$	2,34808
$3 \cdot 10^{-2}$	$2,81367 \cdot 10^{-3}$	2,36463
$2 \cdot 10^{-2}$	$1,26786 \cdot 10^{-3}$	2,38630
$1 \cdot 10^{-2}$	$3,21497 \cdot 10^{-4}$	2,41355
$1 \cdot 10^{-3}$	$3,25751 \cdot 10^{-6}$	2,44315
$1 \cdot 10^{-4}$	$3,26050 \cdot 10^{-8}$	2,44537
$1 \cdot 10^{-5}$	$3,25919 \cdot 10^{-10}$	2,44439
$1 \cdot 10^{-6}$	$3,25854 \cdot 10^{-12}$	2,44391
$1 \cdot 10^{-7}$	$3,25836 \cdot 10^{-14}$	2,44377
$1 \cdot 10^{-8}$	$3,25836 \cdot 10^{-16}$	2,44377
$1 \cdot 10^{-9}$	$3,25833 \cdot 10^{-18}$	2,44375

Из анализа конкретных результатов, представленных на рис. 3.2, а, б и в табл. 3.2, можно сделать следующие существенные выводы.

1. Получены результаты в весьма широком интервале изменения параметра  $\beta$  ( $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 3$ ), включающем практически и предельный переход (при  $\beta \rightarrow 0$ ) к результатам **первого основного подхода** (балочное приближение, балочный подход, beam approximation, п. 1.5.2).

2. Для случая двух равных трещин (расчетная схема на рис. 1.1, в) при достаточно малых значениях параметра  $\beta$  (при  $\beta \rightarrow 0$ ) можно получить **уменьшение** величины  $\varepsilon_T$  на **два, три и более порядка** по сравнению со случаем одной изолированной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, б), что соответствует значению  $\varepsilon_T$  при  $\beta \geq 3$  на рис. 3.2, а.

3. Для случая двух равных трещин (расчетная схема на рис. 1.1, в) обосновано применение граничных условий жесткой заделки в **первом общем подходе** (п. 1.5.2), так как при  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$  согласно табл. 3.2 значение величины  $A$  в (3.9) практически совпадает со значением  $A^I$  (3.8).

4. Для случая двух равных трещин (расчетная схема на рис. 1.1, в) установлен предел применимости **первого общего подхода** (beam approximation, п. 1.5.2) с точки зрения результатов (рис. 3.2, а, б) и табл. 3.2) **строгого второго общего подхода** (п. 1.5.2). Так, при  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$  результаты применительно к величине теоретического предела прочности на сжатие по **второму и первому общему подходу** практически совпадают. При  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,05$  вышеуказанные результаты совпадают с точностью до 5%, что следует из табл. 3.2 для величины  $A$  и выражения для  $A^I$  (3.8).

Целесообразно отметить, что сформулированные выше выводы основаны на результатах [53], полученных для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича. В [55] представлены конкретные результаты, аналогичные результатам на рис. 3.2, а, б и в табл. 3.2, для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа); кроме того, в [53] также представлены конкретные результаты для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа. В публикациях [53, 55] для двух вышеуказанных материалов сформулированы выводы, соответствующие выводам для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича.

Безусловно, актуальным представляется проведение соответствующего анализа для сравнительно жестких конструктивных материалов.

**3.4. Периодическая система трещин.** Расчетная схема представлена на рис. 1.1, з, результаты исследований для рассматриваемой ситуации представлены в публикациях [54, 56]. Целесообразно отметить, что периодическая система одинаковых трещин, расположенных друг над другом, расчетная схема для которой представлена на рис. 1.1, з, моделирует ситуацию, когда в материале имеется большое количество параллельных плоскостей с расположенными в них трещинами; при этом плоскости расположены на небольших расстояниях друг от друга, что вызывает необходимость учитывать взаимодействие трещин, расположенных в соседних плоскостях. В обсуждаемой ситуации расчетная схема, представленная на рис. 1.1, з, является одной из простейших расчетных схем и в то же время характерной расчетной схемой, отражающей специфику обсуждаемой ситуации.

Конкретные результаты для расчетной схемы на рис. 1.1, з изложены в [54] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа) и в [56] – для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича и для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа.

Целесообразно отметить, что в случае периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з) в публикациях [54, 56] была обнаружена **новая закономерность**, которая не имела места для приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д, конкретные результаты в п. 3.2) и для двух трещин (расчетная схема на рис. 1.1, в, конкретные результаты в п. 3.3). **Новая закономерность заключается в том, что для периодической системы трещин при предельном переходе при  $\beta = h \cdot a^{-1} \rightarrow 0$  нельзя получить результаты первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2), соответствующие ни при жесткой заделке, ни при шарнирном опирании выделенной

пластины. Чтобы проиллюстрировать вышеуказанную новую закономерность в краткой форме в настоящем пункте (п. 3.4) рассмотрим конкретные результаты для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа), которые представлены в публикации [54]; в настоящей обзорной статье обсуждаемые результаты представлены на рис. 3.3, а, б и в табл. 3.3. Так, на рис. 3.3 приведена зависимость величины  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения (для расчетной схемы на рис. 1.1, з) от геометрического параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$ ; при этом на рис. 3.3, а приведены результаты для интервала  $0,1 \leq \beta \leq 3$  и на рис. 3.3, б приведены результаты для интервала  $0,01 \leq \beta \leq 0,10$ .

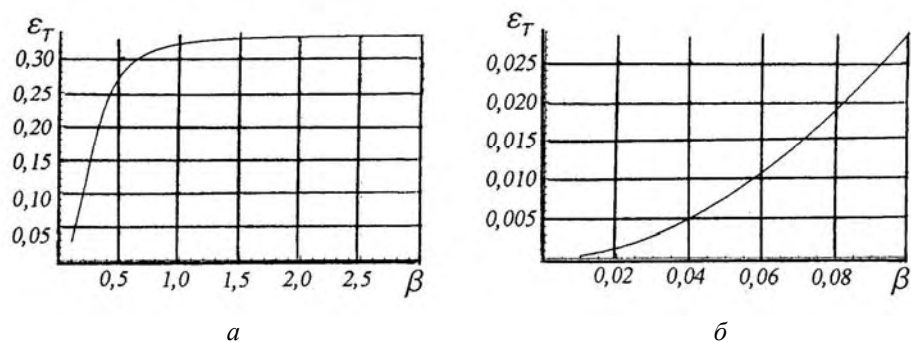


Рис. 3.3

Отметим, что в настоящем пункте (п. 3.4) в соответствии с расчетной схемой на рис. 1.1, з через  $2h$  обозначено расстояние между двумя соседними трещинами, т.е.  $2h$  – толщина «как бы выделенной тонкой пластины».

Необходимо отметить, что в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2) в случае несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа) для определения величины  $\sigma_T^I$  – теоретического предела прочности на сжатие при указанном подходе имеет место [54] выражение

$$\sigma_T^I = 4A^I c_{10} \beta^2, \quad \beta = h \cdot a^{-1}. \quad (3.10)$$

В выражении (3.10) коэффициент  $A^I$  в рамках **первого общего подхода** имеет следующие значения:

$$A^I = 2,8 \text{ – для шарнирного опирания;} \quad (3.11)$$

$$A^I = 9,7866 \text{ – для жесткого защемления}$$

круговой пластины, что применяется в исследованиях в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2).

Выражение (3.10) и (3.11) соответствуют выражению (2.16) применительно к несжимаемому материалу с упругим потенциалом Трелоара (неогукковскому телу или материалу) при привлечении теории конечных (больших) докритических деформаций с учетом обозначений настоящего пункта (п. 3.4) для толщины  $2h$ .

Учитывая структуру выражения (3.10), при обозначениях (3.11), для величины  $\sigma_T^I$ , соответствующей **первому общему подходу** (балочное приближение, п. 1.5.2), для удобства сравнения выражение для определения величины  $\sigma_T$ , соответствующее **второму общему подходу** (п. 1.5.2), применительно к рассматриваемому случаю периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з) можно также представить в виде

$$\sigma_T = 4Ac_{10}\beta^2; \quad \beta = h \cdot a^{-1}; \quad A = A(\beta). \quad (3.12)$$

Безусловно, для определения величины  $A(\beta)$ , соответствующей в (3.12) каждому значению параметра  $\beta$  применительно к рассматриваемому случаю периодической системы трещин, необходимо выполнить значительную работу математического и численного характера, кратко описанную в пп. 2.2.2.1.2 и 3.1.

Следуя вышеизложенному, в табл. 3.3 представлены значения [54] величин  $\varepsilon_T$  и  $A$  при изменении параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$  в интервале  $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$ , соответствующем сравнительно длинным трещинам и весьма...весьма длинным трещинам. Из сравнения результатов для величины  $A$  в табл. 3.3, соответствующих **второму общему подходу** (п. 1.5.2), и величины  $A^I$  в (3.11), соответствующих **первому общему подходу** (п. 1.5.2) для граничных условий шарнирного опирания и жесткого защемления круговой пластины, приходим к *новой закономерности*, которая является характерной только для периодической системы трещин и которая сформулирована в начале настоящего пункта (п. 3.4).

Таблица 3.3

$\beta$	$\varepsilon_T$	$A$	$A/A^I$
$9 \cdot 10^{-2}$	$9,92344 \cdot 10^{-3}$	3,67535	1,31262
$8 \cdot 10^{-2}$	$7,88047 \cdot 10^{-3}$	3,69397	1,31927
$7 \cdot 10^{-2}$	$6,06406 \cdot 10^{-3}$	3,71269	1,32596
$6 \cdot 10^{-2}$	$4,47813 \cdot 10^{-3}$	3,73177	1,33278
$5 \cdot 10^{-2}$	$3,12617 \cdot 10^{-3}$	3,75141	1,33979
$4 \cdot 10^{-2}$	$2,01133 \cdot 10^{-3}$	3,77124	1,34687
$3 \cdot 10^{-2}$	$1,13711 \cdot 10^{-3}$	3,79036	1,35370
$2 \cdot 10^{-2}$	$5,08203 \cdot 10^{-4}$	3,81152	1,36126
$1 \cdot 10^{-2}$	$1,27734 \cdot 10^{-5}$	3,83203	1,36858
$1 \cdot 10^{-3}$	$1,28125 \cdot 10^{-6}$	3,84375	1,37277
$1 \cdot 10^{-4}$	$1,28516 \cdot 10^{-8}$	3,85547	1,37695
$1 \cdot 10^{-5}$	$1,28516 \cdot 10^{-10}$	3,85547	1,37695
$1 \cdot 10^{-6}$	$1,28516 \cdot 10^{-12}$	3,85547	1,37695
$1 \cdot 10^{-9}$	$1,28516 \cdot 10^{-18}$	3,85547	1,37695

Все же, результаты для величины  $A$  в табл. 3.3, соответствующие **второму общему подходу** (п. 1.5.2), ближе к величине  $A^I$  (выражение (3.11), первая строка), соответствующей **первому общему подходу** (п. 1.5.2) при граничных условиях шарнирного опирания. В связи с этим в последнем столбце табл. 3.3 представлена величина  $A \cdot A^{I-1}$ , где  $A^I$  соответствует граничным условиям шарнирного опирания (первая строка выражения (3.11)). Из анализа указанных результатов следует, что даже для весьма длинных трещин при применении результатов **первого общего подхода** (п. 1.5.2) при шарнирном опирании во всем интервале изменения параметра  $\beta$  ( $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$ ) возникает *стабильная погрешность* (более 30%). Вышеприведенное сравнение еще раз подтверждает существование обсуждаемой *новой закономерности* для периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з).

Из анализа конкретных результатов, представленных на рис. 3.3, а, б и в табл. 3.3 для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогуковского типа), можно сделать следующие существенные выводы.

1. Получены результаты в весьма широком интервале изменения параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$  ( $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 3$ ), включающем практически и предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ .

2. Для случая периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з) при достаточно малых значениях параметра  $\beta$  (при  $\beta \rightarrow 0$ ) можно получить **уменьшение** величины  $\varepsilon_T$  на **два, три и более порядка** по сравнению со случаем одной изолированной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, б, конкретные результаты в п. 2.2.2.1.1), что на рис. 3.3, а соответствует значению  $\varepsilon_T$  при  $\beta \geq 2$ .

3. Для случая периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з) существует вышеотмеченная новая закономерность, которая исключает возможность обосновать граничные условия и определить пределы применимости **для первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2).

Целесообразно отметить, что сформулированные выше выводы основаны на результатах [54] для периодической системы трещин, полученных для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогуковского типа). Аналогичные выводы имеют место и применительно к результатам [56] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича и для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа; в связи с этим можно считать, что вышеизложенные выводы имеют место для различных материалов при применении теории конечных (больших) докритических деформаций.

Безусловно, актуальным представляется проведение соответствующего анализа для сравнительно жестких конструкционных материалов.

**3.5. Общие выводы по результатам п. 3.** В третьем разделе (п. 3) настоящей обзорной статьи приведена краткая информация о достаточных новых результатах, изложенных в публикациях [52 – 56, 145] и относящихся к механике разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях (расчетные схемы на рис. 1.1, а, в – д). Отмеченная информация относится к кратким сведениям о разработанном методе исследования и к конкретным результатам, полученным для характерных расчетных схем, которые представлены на рис. 1.1, в – д (рис. 1.1, в – две трещины в параллельных плоскостях, рис. 1.1, з – периодическая система трещин в параллельных плоскостях, рис. 1.1, д – приповерхностная трещина). Из анализа конкретных результатов можно сделать следующие общие выводы.

1. Получены результаты в весьма широком интервале ( $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 3$ ) изменения параметра  $\beta = h \cdot a^{-1}$ , включающем практически и предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ .

2. Для случая характерных расчетных схем (рис. 1.1, в – д) при достаточно малых значениях параметра  $\beta$  (при  $\beta \rightarrow 0$ ) можно получить **уменьшение** величины  $\varepsilon_T$  – теоретического значения предельного укорочения **на два, три и более порядка** по сравнению со случаем одной изолированной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, б).

3. Для случаев приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) и двух равных трещин в параллельных плоскостях (расчетная схема на рис. 1.1в) **обосновано применение граничных условий жесткой заделки торцов** «как бы выделенной тонкой пластины» в исследованиях в рамках **первого общего подхода** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, первая часть п. 1.5.2). Указанное обоснование достигается за счет того, что при  $\beta \rightarrow 0$  результаты, полученные в рамках **строгого второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2), переходят в результаты, полученные в рамках вышеотмеченного **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2).

4. Для случаев приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, д) и двух равных трещин в параллельных плоскостях (расчетная схема на рис. 1.1, в) **установлены пределы применимости первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2). Так, при  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$  результаты, полученные в рамках указанных **первого и второго общих подходов** для рассматриваемых случаев, практически совпадают. При  $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,05$  вышеуказанные результаты для **первого и второго общих подходов** (п. 1.5.2) совпадают с точностью до 5%.

5. Для случая периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, з) **нельзя доказать для первого общего подхода** (балочное приближение, первая часть п. 1.5.2) применимость граничных условий ни при шарнирном опирании, ни при жест-



кой заделке торцов «как бы выделенной тонкой пластины». Отмеченный вывод основан на том, что при  $\beta = h \cdot a^{-1} \rightarrow 0$  результаты, полученные в рамках **строгого второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2), **не переходят** в результаты, полученные в рамках **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2) ни при граничных условиях шарнирного опирания, ни при граничных условиях жесткой заделки торцов «как бы выделенной тонкой пластины». Следует отметить, что в рассматриваемом случае периодической системы трещин результаты, полученные в рамках **второго общего подхода** (п. 1.5.2), при  $\beta = h \cdot a^{-1} \rightarrow 0$  *ближе* к результатам, полученным в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение, п. 1.5.2) при граничных условиях шарнирного опирания торцов «как бы выделенной тонкой пластины»; все же даже для весьма тонких «как бы выделенных пластин» (при  $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$ ) возникает *стабильная погрешность* (более 30%).

Отмеченная ситуация, соответствующая выводу 5, может иметь, по-видимому, следующее объяснение. **Первый общий подход** (балочный подход, балочное приближение, beam approximation, первая часть п. 1.5.2) приводит к *одному и тому же* результату как для приповерхностной трещины (расчетная схема на рис. 1.1, *д*), так и для двух равных трещин в параллельных плоскостях (расчетная схема на рис. 1.1, *е*), так и для периодического ряда трещин (расчетная схема на рис. 1.1, *з*), поскольку в **первом общем подходе** (первая часть п. 1.5.2) «выделяется *одна* тонкая пластина» и анализируется поведение этой пластины при различных граничных условиях на торцах. Таким образом, в **первом общем подходе** (п. 1.5.2) *отсутствует* механизм учета взаимовлияния трещин, расположенных в большем числе параллельных плоскостей, через граничные условия. В связи с вышеотмеченным, по-видимому, *нет оснований* ожидать предельного перехода при  $\beta = h \cdot a^{-1} \rightarrow 0$  к определенным граничным условиям на торцах «как бы выделенной тонкой пластины» в рамках **первого общего подхода** (п. 1.5.2), исходя их результатов **строгого второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) для периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, *з*).

*б. Безусловно, представляется актуальным проведение соответствующего анализа для сравнительно жестких конструкционных материалов.* Дело в том, что вышесформулированные Выводы 1 – 5 получены на основе анализа конкретных результатов для высокоэластических сжимаемых и несжимаемых материалов, которые представлены в публикациях [52 – 56, 145] для различной структуры упругих потенциалов. Эти результаты получены с привлечением теории конечных (больших) докритических деформаций, чтобы избежать возможных неточностей, которые возникают при переходе к первому и второму вариантам теории малых докритических деформаций.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении результатов в третьем разделе (п. 3) настоящей обзорной статьи.

#### **4. Заключение.**

В настоящей обзорной статье рассмотрен ряд проблем, относящихся к построению основ механики разрушения однородных и композитных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в нескольких параллельных плоскостях. В соответствующих пунктах статьи, относящихся к рассматриваемым отдельным проблемам, приведены и сформулированные выводы; в связи с этим в настоящем **Заключении** повторно отмеченные выводы рассматриваться не будут.

В настоящем **Заключении** лишь кратко рассмотрим возможное объяснение одной закономерности, отмеченной при теоретических исследованиях, и одного явления, обнаруженного при экспериментальных исследованиях. Также в краткой форме отметим два направления в механике разрушения материалов и элементов конструкций при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях, развитие которых представляется актуальным с учетом анализа результатов исследований, представленного в настоящей обзорной статье.

**4.1. О возможности предельных переходов в критериях разрушения механики разрушения при сжатии вдоль трещин.** В настоящем пункте (п. 4.1) анализируется и кратко комментируется одна закономерность, полученная при теоретических исследованиях.

В механике разрушения при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной плоскости или в параллельных плоскостях, необходимая информация, в том числе и информация о напряженно-деформированном состоянии возле трещин, получается посредством **первого и второго общих подходов** (п. 1.5.2). При применении **первого общего подхода** (п. 1.5.2) информация о напряженно-деформированном состоянии, в том числе и возле трещин, представляется в виде величин, характерных для *двухмерных прикладных теорий тонкостенных систем* (усилия, моменты, перерезающие силы и т.п.). При применении **второго общего подхода** (п. 1.5.2) информация о напряженно-деформированном состоянии, в том числе и возле трещин, представляется в виде величин, характерных для *строгих трехмерных теорий* (напряжения, деформации и перемещения), в том числе и для ТЛТУДТ (трехмерной линейаризованной теории устойчивости деформируемых тел).

В связи с вышеизложенным при применении **первого общего подхода** (п. 1.5.2) в информацию о напряженно-деформированном состоянии возле трещин *вносится неустранимая погрешность*, по сравнению с соответствующими результатами при **втором общем подходе**, так как вблизи кончика трещины нельзя определить распределение напряжений и деформаций с привлечением любой двухмерной прикладной теории тонкостенных систем. Указанная неустранимая погрешность не связана с относительными размерами трещины, так как она возникает непосредственно у кончика трещины, где распределение напряжений и деформаций имеет сугубо трехмерный характер в пространственных задачах и сугубо двухмерный характер в плоских задачах. Вышеуказанная ситуация неоднократно отмечалась в первом разделе (п. 1) настоящей обзорной статьи и представлена на рис. 1.10, *а, б* и 1.11, *б*, а также в соответствующих комментариях.

Вышеизложенную ситуацию необходимо учитывать при анализе возможности предельных переходов в критериях разрушения механики разрушения при сжатии вдоль трещин, исходя из критериев разрушения в рамках **второго общего подхода** (п. 1.5.2) и переходя к критериям разрушения в рамках **первого общего подхода** (п. 1.5.2). Для проведения указанного анализа удобно разделить критерии разрушения механики разрушения при сжатии вдоль трещин на критерии разрушения локального типа и критерии разрушения интегрального типа; ниже соответствующий анализ проведем раздельно для этих критериев разрушения.

**4.1.1. Критерии разрушения локального типа.** В указанных критериях разрушения применяется информация о распределении напряженно-деформированного состояния вблизи (в окрестности) вершины трещины, например, информация о коэффициентах интенсивности напряжений. Как уже отмечалось, при применении **первого общего подхода** вносится *неустранимая погрешность* в информацию о распределении напряжений и деформаций вблизи вершины трещины по сравнению со строгой информацией при применении **второго общего подхода**. В связи с вышеизложенным в критериях разрушения локального характера, по-видимому, *отсутствует возможность* предельного перехода от **строгих** результатов в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) к результатам **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2).

**4.1.2. Критерии разрушения интегрального типа.** В указанных критериях разрушения применяется информация об интегральных (общих) свойствах материала (например, об интегральных характеристиках всей задачи для области, занятой материалом), а не информация о распределении напряженно-деформированного состояния *только* вблизи вершины трещины. Критерий разрушения, принятый в рассматриваемом варианте механики разрушения при сжатии вдоль трещин (разделы второй и третьей настоящей обзорной статьи), очевидно, является критерием разрушения интегрального типа, так как он построен на информации о первом собственном числе задачи на собственные значения для области, занятой всем материалом. В критериях разрушения интегрального типа на конечный результат оказывает меньшее влияние поведение напряжений и деформаций в небольших подобластях общей области, занятой материалом, по сравнению с критериями разрушения локального типа.

В связи с вышеизложенным в критериях разрушения интегрального типа, по-видимому, *сохраняется возможность* (хотя бы в отдельных случаях) предельного перехода от **строгих** результатов в рамках **второго общего подхода** (вторая часть п. 1.5.2) к результатам **первого общего подхода** (первая часть п. 1.5.2). В третьем разделе (п. 3) настоящей обзорной статьи для однородных материалов *реализован предельный переход* в критерии разрушения интегрального типа (от строгих результатов **второго общего подхода** к результатам **первого общего подхода**) применительно к приповерхностной трещине (расчетная схема на рис. 1.1, *д*) и к двум равным трещинам в соседних параллельных плоскостях (расчетная схема на рис. 1.1, *в*); таким образом, *определены пределы применимости приближенного первого общего подхода* применительно к вышеуказанным расчетным схемам. Все же в случае периодической системы трещин (расчетная схема на рис. 1.1, *з*), которая моделирует наличие большого числа параллельных плоскостей с трещинами, указанный предельный переход в критериях разрушения *нельзя осуществить* (Вывод 5 п. 3.5 и соответствующие комментарии).

Вышеизложенными в п. 4.1 сведениями ограничимся при обсуждении возможности предельных переходов в критериях разрушения механики разрушения при сжатии вдоль трещин.

#### **4.2. О возможном объяснении «пинч-эффекта» для хрупкого разрушения.**

В монографии (Бриджмен П. Физика высоких давлений. – М.: ОНТИ, 1935) описан ряд явлений, относящихся к разрушению твердых тел при высоких давлениях, которые были обнаружены при экспериментальных исследованиях. К таким явлениям относится и «пинч-эффект», который заключается в следующем. Испытания проводились со сплошными цилиндрами, которые загружались только равномерным боковым давлением, приложенным к боковой поверхности. Разрушение происходило при значениях давления, приблизительно равных пределу прочности. Интересно отметить, что при этом в случае хрупких материалов разрушение происходило по плоскости, перпендикулярной оси цилиндра; в случае материалов с явно выраженной текучестью вид излома весьма похож на тот, который возникает при растяжении.

П.Бриджмен и ряд других авторов предложили различные объяснения «пинч-эффекта» для хрупкого и пластического разрушения. Например, в монографии (Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.) на стр. 599 – 600 дано объяснение «пинч-эффекта» с применением положений механики хрупкого разрушения в ее классической трактовке; существо указанного объяснения заключается в том, что в цилиндрах имеются поверхностные трещины, которые направлены перпендикулярно оси цилиндра, в эти трещины (при нагружении жидкостью) попадает жидкость и разрывает трещины.

Целесообразно отметить, что в случае цилиндрических образцов из горных пород, как правило, является характерным наличие трещин, которые направлены перпендикулярно к оси цилиндра; кроме того, для горных пород при сравнительно не длительных нагружениях также характерно хрупкое разрушение.

В монографии [32] автора настоящей обзорной статьи на стр. 278 – 279 было предложено объяснение «пинч-эффекта» при хрупком разрушении, исходя из результатов механики разрушения материалов при сжатии вдоль плоских трещин, которые расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях; заметим, что монография [32] была опубликована в 1983 г. В указанном объяснении «пинч-эффекта» при хрупком разрушении основными являются следующие положения: первое – определяющую роль при рассматриваемом виде разрушения играют все трещины (не только поверхностные), расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра; второе – начало разрушения определяется локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала возле трещин (в соответствии с общей концепцией, рассмотренной в п. 1.2.2 настоящей обзорной статьи). Из вышеизложенного следует, что «пинч-эффект» может проявляться и без проникания жидкости в поверхностные трещины, чего можно достичь, изолировав соответствующим образом цилиндрический образец или предварительно тщательно отполировав его. Кроме того, из обсуждаемого объяснения следует, что определяющую роль играют не только поверхностные трещины, удельный вклад которых сравнительно небольшой, а все трещины, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси образца.

Предложенное объяснение «пинч-эффекта» в монографии [32], опубликованной в 1983 г., на стр. 279 этой монографии комментировалось следующим образом.

«Следует заметить, что при предложенном объяснении неудовлетворительным представляется сравнительно большая величина теоретического предела прочности, полученного в рамках предложенного подхода. В связи с этим необходимо иметь в виду, что выше в рамках предложенной теории получена количественная оценка теоретического предела прочности лишь для случая, когда трещины расположены в одной плоскости и не взаимодействуют при потере устойчивости с трещинами, расположенными в других параллельных плоскостях. При достаточно высокой степени трещиноватости материала (что характерно для горных пород и других материалов) необходимо учитывать взаимодействие трещин, расположенных в параллельных плоскостях. При этом, как неоднократно отмечалось выше, теоретический предел прочности будет снижаться. Таким образом, и количественное значение теоретического предела прочности при предложенном объяснении «пинч-эффекта» также можно существенно приблизить к значению, полученному из опыта».

Вышеприведенные комментарии были сформулированы в монографии [32] за 1983 г., когда были известны лишь результаты, которые представлены в п. 2.2.2.1.1 настоящей обзорной статьи (результаты для трещин, расположенных в одной плоскости). В последующие годы (после 1983 г.) ситуация существенно изменилась и новые полученные результаты подтверждают вышеизложенные комментарии.

Так, в 1984 – 2010 гг. были проведены исследования по механике разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия трещин из соседних плоскостей для расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $\sigma - \delta$ ; анализ указанных исследований представлен в п. 2.2.2.1.2 настоящей обзорной статьи. В этих исследованиях было установлено, что учет взаимовлияния трещин из соседних параллельных плоскостей может приводить к **уменьшению** величины  $\varepsilon_T$  (теоретическое значение предельного укорочения) **на порядок и более** по сравнению с соответствующими значениями величины  $\varepsilon_T$  для случая трещин, расположенных в одной плоскости; анализ результатов для последнего случая, как уже отмечалось выше, проведен в п. 2.2.2.1.1 настоящей обзорной статьи. Вышеотмеченные количественные результаты дают возможность считать объяснение «пинч-эффекта», предложенное в монографии [32] за 1983 г., еще более убедительным, что и отмечено в монографии [37] (т. 2, стр. 315 – 317).

В последние годы, начиная с 2011 г. в публикациях [52 – 56, 145] были представлены результаты по механике разрушения однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия трещин из соседних плоскостей для расчетных схем, представленных на рис. 1.1,  $\sigma - \delta$ , применительно к случаю **весьма и весьма близких** плоскостей; анализ указанных исследований проведен в п. 3 настоящей обзорной статьи. В этих исследованиях установлено, что учет взаимовлияния трещин из соседних параллельных плоскостей в случае весьма и весьма близких плоскостей может приводить к **уменьшению** величины  $\varepsilon_T$  (теоретическое значение предельного укорочения) **на два, три и более порядка** по сравнению с соответствующими значениями величины  $\varepsilon_T$  для случая трещин, расположенных в одной плоскости; анализ результатов для последнего случая, как уже отмечалось выше, проведен в п. 2.2.2.1.1 настоящей обзорной статьи.

Таким образом, вышеприведенные результаты подтверждают, что объяснение «пинч-эффекта» при хрупком разрушении, изложенное впервые в монографии [32] за 1983 г., можно считать вполне реалистичным.

**4.3. Об актуальных направлениях для дальнейших исследований.** В заключение представляется целесообразным отметить два научных направления в построении механики разрушения при сжатии вдоль трещин, которые, по-видимому, являются актуальными с точки зрения результатов для трещин, расположенных в весьма близких плоскостях, опубликованных в [52 – 56, 145], начиная с 2011 г.

1. Для однородных материалов – анализ результатов, учитывая методы [52 – 56, 145], для сравнительно жестких конструкционных материалов, включая и анализ для пластического разрушения.

2. Для слоистых композитных материалов – получение и анализ результатов типа [52 – 56, 145] применительно к трещинам в близко расположенных границах (interface) раздела свойств слоев; для реализации таких исследований необходимо и развитие соответствующего математического аппарата, возможно ориентированного на численные методы.

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано основні результати щодо створення основ механіки руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин в однорідних матеріалах з тріщинами та в неоднорідних (композитних) матеріалах з тріщинами на границях розділу. Розглянуто результати, які одержано в рамках пружних, пластичних та в'язкопружних моделей деформівних тіл. Оглядова стаття складається з трьох частин.

В першій частині аналізується створення базової концепції, яка визначає старт (початок) руйнування як механізм локальної втрати стійкості стану рівноваги в околі тріщин, які розташовані в одній площині або в паралельних площинах. Також сформульовано критерій руйнування та основні проблеми, які виникають в даному напрямку механіки руйнування. Наведено два базові підходи до створення основ механіки руйнування при стиску вздовж тріщин. *Перший підхід*, так зване балочне наближення, оснований на різних прикладних теоріях стійкості тонкостінних систем (включаючи гіпотези Бернуллі, Кірхгофа – Лява, типу Тимошенка та інші гіпотези). Перший підхід є суттєво наближеним та вносить неусувну помилку при визначенні напружень. *Другий підхід* базується на основних співвідношеннях та методах тривимірної (3D) лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл при скінченних (великих) та малих докритичних деформаціях. Другий підхід не вводить основних помилок, які характерні для першого підходу, та дозволяє одержувати результати з точністю, яка прийнята в механіці.

Друга частина присвячена короткому аналізу основних результатів, які одержано в рамках *першого* наближеного підходу, та більш детальному аналізу основних результатів, які одержано в рамках *другого строгого* підходу (в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл при скінченних (великих) та малих докритичних деформаціях). У випадку *другого строгого* підходу розглянуто точні розв'язки для тріщин, що розміщені в одній площині і взаємодіють між собою, розв'язки для тріщин, які розташовані в різних паралельних площинах та взаємодіють між собою, та проведено аналіз результатів для деяких конструкційних матеріалів.

У третій частині наведено нові результати для тріщин, що розташовані в різних паралельних площинах та взаємодіють між собою, для випадку дуже малої відстані між площинами, включаючи також і випадок, коли вказана відстань *прямоє до нуля* (в асимптотичному сенсі). Ці результати можна розглядати як граничний перехід від *другого строгого* підходу (тривимірна лінеаризована теорія пружної стійкості) до *першого* підходу (так зване балочне наближення). В такий спосіб оцінюється точність результатів в рамках *першого* підходу та встановлюється структура граничних умов біля вершини тріщини в рамках так званого балочного наближення.

1. Акбаров С.Д., Яхшиоглу Н. Потеря устойчивости вблизи расслоения в прямоугольной пластине из композита, содержащего ленточную трещину // Мех. комп. материалов. – 2010. – **46**, № 5. – С. 721 – 736.
2. Андреев Л.В., Железко И.П., Ободан Н.И. О бифуркации равновесия сферических оболочек с расслоениями // Пробл. прочности. – 1986. – № 2. – С. 49 – 53.
3. Богданов В.Л. Неосесимметричная задача о разрушении полупространства при сжатии вдоль приповерхностной круговой трещины // Докл. АН УССР, Сер. Б. – 1991. – № 5. – С. 42 – 47.
4. Богданов В.Л. О разрушении материала с периодической системой соосных круговых трещин при действии направленных вдоль них начальных напряжений // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 53 – 59.
5. Богданов В.Л., Назаренко В.М. Сжатие композитного материала вдоль приповерхностной макротрещины // Мех. комп. материалов. – 1994. – **30**, № 3. – С. 352 – 358.
6. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Мех. комп. материалов. – 1984. – № 2. – С. 239 – 255.
7. Болотин В.В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв-я АН СССР. – 1984. – № 3. – С. 127 – 137.
8. Болотин В.В. Многопараметрическая механика разрушения // Расчеты на прочность. – № 25. – М., 1984. – С. 12 – 33.
9. Болотин В.В. Разрушение композиционных материалов по типу отслоений // Расчеты на прочность. – № 27. – М., 1986. – С. 8 – 20.
10. Болотин В.В. Межслойное разрушение композитов при комбинированном нагружении // Мех. комп. материалов. – 1988. – № 3. – С. 410 – 418.
11. Болотин В.В., Болотина К.С., Радин В.П., Щугорев В.Н. Характеристики трещиностойкости слоистых композитов // Мех. комп. материалов. – 1996. – **32**, № 1. – С. 21 – 31.

12. *Болотин В.В.* Механика расслоений в конструкциях из слоистых композитов // Мех. комп. материалов. – 2001. – **37**, № 5/6. – С. 585 – 602.
13. *Болотин В.В., Забелян З.Х.* Устойчивость упругих сферических оболочек с расслоениями // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1980. – Вып. 22. – С. 150 – 165.
14. *Болотин В.В., Забелян З.Х., Курзин А.А.* Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоений // Пробл. прочности. – 1980. – **12**, № 7. – С. 3 – 8.
15. *Болотин В.В., Нефедов С.В., Пудов В.А., Трифонов О.В.* Устойчивость многослойных отслоений в композитах при сжатии // Мех. комп. материалов. – 1997. – **33**, № 3. – С. 312 – 320.
16. *Бугаков Н.Н.* Работа разрушения слоистых стеклопластиков по поверхности раздела // Пробл. прочности. – 1978. – **10**, № 4. – С. 49 – 52.
17. *Верещака С.М.* Устойчивость многослойных пластин и оболочек с межфазными дефектами при осевом сжатии // Мех. комп. материалов. – 2007. – **43**, № 4. – С. 513 – 530.
18. *Воронцов А.Н., Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н.* Разрушение конструкций из композитных материалов по типу расслоений // Мех. комп. материалов. – 1989. – № 6. – С. 1007 – 1023.
19. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. – М.: Физматгиз, 1953. – 264 с.
20. *Гольдштейн Р.В.* Разрушение при сжатии // Успехи механики. – 2003. – № 2. – С. 3 – 20.
21. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* О локальном разрушении тонких тел с трещиноподобными дефектами при сжатии со стеснением // Изв. АН СССР, МТТ. – 1987. – № 5. – С. 158 – 167.
22. *Григолоук Э.И., Коган А.А., Мамай В.И.* Задачи деформирования слоистых конструкций с расслоениями // Изв-я РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 1. – С. 6 – 32.
23. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 256 с.
24. *Гузь А.Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
25. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
26. *Гузь А.Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. – К.: Наук. думка, 1977. – 204 с.
27. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наук. думка, 1979. – 144 с.
28. *Гузь А.Н.* К линеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // ДАН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085 – 1088.
29. *Гузь А.Н.* Трещины отрыва в упругих телах с начальными напряжениями // ДАН СССР. – 1980. – **254**, № 3. – С. 571 – 574.
30. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // ДАН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315 – 1318.
31. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // ДАН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42 – 45.
32. *Гузь А.Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
33. *Гузь А.Н.* О порядке особенности в кончике трещины в материалах с начальными напряжениями // ДАН СССР. – 1986. – **289**, № 2. – С. 310 – 313.
34. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.
35. *Гузь А.Н.* Точное решение плоской задачи о разрушении материала при сжатии вдоль трещин, лежащих в одной плоскости // ДАН СССР. – 1990. – **310**, № 3. – С. 563 – 566.
36. *Гузь А.Н.* Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
37. *Гузь А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х томах. – К.: «ЛИТЕРА», 2008.
  - Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.
  - Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
38. *Гузь А.Н., Богданов В.Л., Назаренко В.М.* Пространственная неосесимметричная задача о разрушении полупространства с приповерхностной круговой трещиной при сжатии // ДАН СССР. – 1991. – **319**, № 4. – С. 835 – 839.
39. *Гузь А.Н., Кнюх В.И., Назаренко В.М.* Расслоение композита при сжатии вдоль двух параллельных макротрещин // Физ. – хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 1. – С. 72 – 78.
40. *Гузь А.Н., Назаренко В.М.* Осесимметричная задача о разрушении полупространства с поверхностной дискообразной трещиной // ДАН СССР. – 1984. – **274**, № 1. – С. 38 – 41.
41. *Гузь А.Н., Назаренко В.М.* Пространственная задача о пластическом приповерхностном разрушении материала при сжатии вдоль макротрещин // ДАН СССР. – 1985. – **284**, № 4. – С. 812 – 815.
42. *Гузь А.Н., Назаренко В.М.* К теории приповерхностного отслаивания композитных материалов при сжатии вдоль макротрещин // Мех. комп. материалов. – 1985. – № 5. – С. 826 – 833.
43. *Гузь А.Н., Назаренко В.М.* Разрушение материалов при сжатии вдоль периодической системы трещин в условиях плоской деформации // ПММ. – 1987. – **51**, № 2. – С. 323 – 329.
44. *Гузь А.Н., Назаренко В.М., Стародубцев И.П.* Плоская задача разрушения материалов с двумя параллельными трещинами при сжатии вдоль трещин // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Под ред. В.Г.Зубчанинова. – Калинин: Калининск. ун-т, 1986. – С. 138 – 151.
45. *Гузь А.Н., Назаренко В.М., Хома Ю.И.* Разрушение композитного материала при сжатии вдоль цилиндрической трещины // Докл. НАНУ. – 1995. – № 10. – С. 48 – 52.
46. *Гузь И.А.* Устойчивость композита при сжатии вдоль трещины на границе раздела слоев // ДАН. – 1992. – **325**, № 3. – С. 455 – 458.

47. Гузь И.А. Устойчивость композитных материалов с межслойными трещинами // Мех. комп. материалов. – 1992. – № 5. – С. 603 – 608.
48. Гузь И.А. Устойчивость композита при сжатии вдоль двух микротрещин на границе раздела слоев // ДАН. – 1993. – **328**, № 4. – С. 437 – 439.
49. Гузь И.А. Композиты с межслойными трещинами: устойчивость при сжатии вдоль двух микротрещин между ортотропными слоями // Мех. комп. материалов. – 1993. – № 6. – С. 791 – 798.
50. Гузь И.А. Устойчивость композитов при сжатии вдоль системы параллельных межслойных трещин // Докл. НАНУ. – 1995. – № 6. – С. 44 – 47.
51. Давиденков М.М. Про поверхневу енергію слюди // Прикл. механіка. – 1960. – **6**, № 2. – С. 138 – 142.
52. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 3. – С. 79 – 88.
53. Довжик М.В. Разрушение материала с двумя дискообразными трещинами при сжатии вдоль трещин для малых расстояний между трещинами // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 1. – С. 100 – 108.
54. Довжик М.В. Разрушение материала с периодической системой дискообразных трещин при сжатии вдоль трещин для малых значений расстояний между трещинами // Доп. НАН України. – 2013. – № 10. – С. 100 – 105.
55. Довжик М.В., Назаренко В.М. Разрушение материала при сжатии вдоль двух дискообразных трещин для малых расстояний между трещинами // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 4. – С. 78 – 85.
56. Довжик М.В., Назаренко В.М. Разрушение материала при сжатии вдоль периодической системы близко расположенных трещин // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 6. – С. 106 – 113.
57. Енотов В.М., Салганик Р.Л. О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – № 5. – С. 95 – 102.
58. Железко И.П., Ободан Н.И. Влияние расслоений на несущую способность оболочек // Изв – я АН СССР, Механика твердого тела. – 1986. – № 6. – С. 153 – 158.
59. Качанов Л.М. О трещинах в стекловолоконистых трубах // Мех. полимеров. – 1974. – № 2. – С. 370 – 372.
60. Качанов Л.М. Расслоение стеклопластиковых труб при внешнем давлении // Мех. полимеров. – 1975. – № 6. – С. 1106 – 1108.
61. Качанов Л.М. Разрушение композитных материалов путем расслоения // Мех. полимеров. – 1976. – № 5. – С. 918 – 922.
62. Качанов Л.М. К вопросу о расслоении композитных материалов // Вестник Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия. – 1976. – Вып. 3, № 13. – С. 77 – 81.
63. Кисляков С.А. Устойчивость и рост отслоений в цилиндрической оболочке из композитного материала при сжатии // Мех. комп. материалов. – 1985. – № 4. – С. 653 – 657.
64. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
65. Миклашеевич И.А. Расслоение композита вдоль границы раздела как потеря устойчивости напряженного слоя // Мех. комп. материалов. – 2004. – **40**, № 4. – С. 441 – 450.
66. Михайлов А.М. Динамические задачи теории трещин в балочном приближении // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1966. – № 5. – С. 167 – 172.
67. Михайлов А.М. Некоторые задачи теории трещин в балочном приближении // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 5. – С. 128 – 133.
68. Михайлов А.М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1969. – № 3. – С. 171 – 174.
69. Михайлов А.М. Распространение трещин скола в монокристаллах фтористого лития // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1970. – № 4. – С. 119 – 122.
70. *Механика композитов: В 12-и томах.* (Под общ. ред. А.Н.Гузя). К.: Т. 1 – 4 «Наук. думка», Т. 5 – 12 «А.С.К.». – 1993 – 2003.
- Т.1. Статика материалов. (Под ред. В.Т.Головчана), 1993. – 454 с.
- Т.2. Динамика и устойчивость материалов. (Под ред. Н.А.Шульги), 1993. – 430 с.
- Т.3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. (Под ред. Л.П.Хорошуна), 1993. – 390 с.
- Т.4. Механика материалов с искривленными структурами. (Под ред. А.Н.Гузя и С.Д.Акбарова), 1995. – 320 с.
- Т.5. Механика разрушения. (Под ред. А.А.Каминского), 1996. – 360 с.
- Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. (Под ред. Н.А.Шульги и В.Т.Томашевского), 1997. – 396 с.
- Т.7. Концентрация напряжений. (Под ред. А.Н.Гузя, А.С.Космодамианского и В.П.Шевченко), 1998. – 388 с.
- Т.8. Статика элементов конструкций. (Под ред. Я.М.Григоренко), 1999. – 382 с.
- Т.9. Динамика элементов конструкций. (Под ред. В.Д.Кубенко), 1999. – 384 с.
- Т.10. Устойчивость элементов конструкций. (Под ред. И.Ю.Бабича), 2001. – 376 с.
- Т.11. Численные методы. (Под ред. Я.М.Григоренко и Ю.Н.Шевченко), 2002. – 448 с.
- Т.12. Прикладные исследования. (Под ред. А.Н.Гузя и Л.П.Хорошуна), 2003. – 400 с.
71. Моссаковский В.И., Ободан Н.И., Железко И.П. Нелинейная модель деформирования оболочек с расслоениями // ДАН СССР. – 1985. – **282**, № 5. – С. 1070 – 1073.
72. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

73. Назаренко В.М. Пространственная задача о сжатии материала вдоль периодической системы параллельных круговых трещин // ПММ. – 1988. – **52**, № 1. – С. 145 – 152.
74. Назаренко В.М. Неосесимметричная задача о сжатии материала вдоль приповерхностной круговой трещины // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 1. – С. 124 – 127.
75. Назаренко В.М., Хома Ю.И. О методе решения задач разрушения бесконечного материала с цилиндрической трещиной при осевом сжатии (случай неравных корней) // Докл. НАНУ. – 1994. – № 7. – С. 62 – 67.
76. Назаренко В.М., Хома Ю.И. Сжатие бесконечного композитного материала вдоль конечной цилиндрической трещины // Мех. комп. материалов. – 1995. – **31**, № 1. – С. 27 – 34.
77. Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х томах, 5-и книгах. (Под общ. ред. А.Н.Гузя). – К.: Наук. думка, 1990 – 1993.
- Т.1. Каминский А.А. Разрушение вязко-упругих тел с трещинами, 1990. – 312 с.
- Т.2. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями, 1991. – 288 с.
- Т.3. Каминский А.А., Гаврилов Д.Н. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами, 1992. – 248 с.
- Т.4, книга 1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами, 1992. – 434 с.
- Т.4, книга 2. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках, 1993. – 238 с.
78. Нефедов С.В. Анализ роста эллипсоидальных отслоений в композитах при длительных квазистатических нагрузках // Мех. комп. материалов. – 1988. – № 5. – С. 827 – 833.
79. Парцевский В.В. Приближенный анализ механизмов разрушения слоистых композитов у свободного края // Мех. комп. материалов. – 1980. – № 2. – С. 246 – 256.
80. Парцевский В.В. Об устойчивости расслоений в композитах // Мех. комп. материалов. – 1983. – № 5. – С. 794 – 798.
81. Парцевский В.В. Расслоение в полимерных композитах. Обзор // Изв-я РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 62 – 94.
82. Парцевский В.В., Беляев С.М. Устойчивость отслоений в композитных элементах конструкций при изгибе // Мех. комп. материалов. – 1993. – № 6. – С. 785 – 790.
83. Писаренко Г.С., Науменко В.П., Митченко О.В., Волков Г.С. Экспериментальное определение величины  $K_I$  при сжатии пластины вдоль линии трещины // Пробл. прочности. – 1984. – № 11. – С. 3 – 9.
84. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. Развитие расслоений при сжатии композитов // Изв-я АН СССР. – 1983. – № 2. – С. 166 – 171.
85. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. О разрушении композитных труб по форме «китайского фонарика» // Мех. комп. материалов. – 1983. – № 3. – С. 548 – 550.
86. Слепян Л.И. Механика трещин. – Л.: Судостроение, 1990. – 296 с.
87. Тарнопольский Ю.М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов // Мех. комп. материалов. – 1979. – № 2. – С. 331 – 337.
88. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М. – Л.: Изд – во АН СССР, 1963. – 368 с.
89. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 220 с.
90. Adan M., Sheinman I. and Altus E. Buckling of multiply delaminated beams // J. Compos. Mater. – 1994. – **28**, N 1. – P. 77 – 80.
91. Akbarov S.D. On the three dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from the viscoelastic composite materials // Mech. Compos. Mater. – 1998. – **34**, N 6. – P. 537 – 544.
92. Akbarov S.D. Three-dimensional stability loss problems of viscoelastic composite materials and structural members // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 10. – P. 3 – 27.
93. Akbarov S.D. Stability Loss and Buckling Delamination. – Berlin: Springer, 2012. – 450 p.
94. Akbarov S.D., Cilli A. and Guz A.N. The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials // Composites. Part B: Engineering. – 1999. – P. 365 – 372.
95. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of Curved Composites. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publisher, 2000. – 464 p.
96. Akbarov S.D. and Guz A.N. Mechanics of curved composites and some related problems for structural members // Mech. Advan. Mater. Struc. – 2004. – 11, Pt. II, № 6. – P. 445 – 515.
97. Akbarov S.D. and Rzayev O.G. On the delamination of a viscoelastic composite circular plate // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 3. – P. 368 – 374.
98. Akbarov S.D. and Rzayev O.G. On the buckling of the elastic and viscoelastic composite circular thick plate with a penny-shaped crack // Europ. J. Mech. A / Solids. – 2002. – **21**, N 2. – P. 269 – 279.
99. Akbarov S.D. and Rzayev O.G. Delamination of unidirectional viscoelastic composite materials // Mech. Compos. Mater. – 2002. – **39**, N 3. – P. 368 – 374.
100. Akbarov S.D., Sisman T. and Yahnioglu N. On the fracture of the unidirectional composites in compression // Int. J. Eng. Sci. – 1997. – **35**, N 12/13. – P. 1115 – 1136.
101. Akbarov S.D. and Yahnioglu N. The method for investigation of the general theory of stability problems of structural elements fabricated from the viscoelastic composite materials // Composites, Part. B: Engineering. – 2001. – **32**, N 5. – P. 475 – 482.



102. Akbarov S.D., Yahnioglu N. and Rzayev O.G. On influence of the singular type finite elements to the critical force in studying the buckling of a circular plate with a crack // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 9. – P. 120 – 129.
103. Amar C.G. Delamination – a damage mode in composite structures // *Engng. Frac. Mech.* – 1988. – **29**, N 5. – P. 557 – 584.
104. Andreev L.V., Obodan N.I. Problem of Stability of Cylindrical Shell with a Variable Rigidity under External Pressure // *Sov. Appl. Mech.* – 1968. – **4**, N 12. – P. 70 – 75.
105. Babich D.V. Effect of lamination of the material on the stability of orthotropic cylindrical shells // *Sov. Appl. Mechanics.* – 1988. – **24**, N 10. – P. 981 – 984.
106. Babich I.Yu., Guz A.N., Chekhov V.N. The three-dimensional theory of stability of fibrous and laminated materials // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 9. – P. 1103 – 1141.
107. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Fracture of semiinfinite material with a circular surface crack in compression along the crack plane // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 11. – P. 687 – 704.
108. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1995. – **22**. – P. 239 – 247.
109. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Fracture of a body with a periodic set of coaxial; cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 111 – 124.
110. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Stress-strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 12. – P. 1339 – 1350.
111. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 10. – P. 760 – 765.
112. Bolotin V.V. Fracture from the stand-point of non-linear stability // *J. Non-Linear Mechanics.* – 1994. – **29**, N 4. – P. 569 – 585.
113. Bolotin V.V. *Stability Problems in Fracture Mechanics.* – New York: John Wiley and Sons, 1994. – 183 p.
114. Bolotin V.V. Delaminations in composite structures: its origin, buckling, growth and stability // *Composites, Part B.* – 1996. – **27**, N 2. – P. 129 – 145.
115. Chai H., Babcock C.D., Knauss W. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling // *Int. J. Solids Struct.* – 1981. – **17**, N 11. – P. 1069 – 1083.
116. Chai H., Babcock C.D. Two-dimensional modelling of compressive failure in delaminated laminates // *J. Composite Materials.* – 1985. – **19**, N 1. – P. 67 – 91.
117. *Composite Materials.* V. 1 – 8 / Ed. by L.J.Broutman and R.H.Krock. – New York and London: Academic Press, 1973 – 1976.
118. *Comprehensive Composite Materials.* Vol. 1 – 6. (Editor-in-Chief: A.Kelly, C.Zweden). – Elsevier. – 2006.  
 Vol. 1. Fiber reinforcements and general theory of composites. (Ed.: Tsu-Wei Chou). – 802 p.  
 Vol. 2. Polymer matrix composites. (Eds.: R.Talreja, J.-A.E.Månson). – 669 p.  
 Vol. 3. Metal matrix composites. (Ed.: T.W.Clyne). – 669 p.  
 Vol. 4. Carbon/Carbon, Cement and Ceramic Composites (Ed.: R.Warren). – 697 p.  
 Vol. 5. Test methods, non-destructive evaluation and smart materials. (Eds.: L.Carlsson, R.L.Crane, K.Uchino). – 632 p.  
 Vol. 6. Design and applications. (Eds.: W.G. Bader, K.Kedsvard, Y.Sawada). – 809 p.
119. *Comprehensive Structural Integrity.* Vol. 1 – 10. (Int. Advisory Board: Ian Milne, R.O.Ritchie, B.Karihaloo). – Elsevier. – 2006.  
 Vol. 1. Structural integrity assessment – examples and case studies. (Eds.: Ian Milne, R.O.Ritchie, B.Karihaloo).  
 Vol. 2. Fundamental theories and mechanisms of failure. (Eds.: B.Karihaloo, W.G.Knauss).  
 Vol. 3. Numerical and computational methods. (Eds.: R. de Borst, H.A.Mang).  
 Vol. 4. Cyclic loading and fatigue. (Eds.: R.O.Ritchie, Y.Marakami).  
 Vol. 5. Creep and high-temperature failure. (Ed.: A.Saxena).  
 Vol. 6. Environmentally-assisted fracture. (Eds.: J. Petit, Peter Scott).  
 Vol. 7. Practical failure assessment methods. (Eds.: R.A.Ainsworth, K.-H.Schwable).  
 Vol. 8. Interfacial and nanoscale failure. (Eds.: W.Gerberich, Wei Yang).  
 Vol. 9. Bioengineering. (Eds.: Yin-Wing Mai, Swee-Hin Tech).  
 Vol. 10. Indexes.
120. Evans A.G. and Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling in compressed films // *Int. J. Solids Struct.* – 1984. – **20**, N 5. – P. 455 – 466.
121. *Fracture.* An advance treatise. V. 1 – 7 / Liebowitz H., Chief Editor. – New York and London: Academic Press, 1968 – 1972.
122. Garg A.C. Intralaminar and interlaminar fracture in graphite/epoxy laminates // *Engng. Frac. Mech.* – 1986. – **23**, N 4. – P. 719 – 733.
123. Gladun E.Yu., Guz A.N., Kokhanenko Yu.V. An estimation of error of beam-type approximation in the plane problem of stability of the rectangular plate central crack // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 11. – P. 117 – 126.
124. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A.* – 1920. – **211**, N 2. – P. 163 – 198.

125. *Guz A.N.* Fracture mechanics of solids in compression along cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 3. – P. 213 – 224.
126. *Guz A.N.* Mechanics of fracture of solids in compression along cracks (three-dimensional problem) // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 4. – P. 283 – 293.
127. *Guz A.N.* Fracture mechanics of composites in compression along cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 6. – P. 489 – 493.
128. *Guz A.N.* Foundations of mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses // In: «Proc. of 6<sup>th</sup> ICF6», India, 1984. – P. 1223 – 1230.
129. *Guz A.N.* General case of the plane problem of the mechanics of fracture of solids in compression along cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 6. – P. 548 – 552.
130. *Guz A.N.* On construction of mechanics of fracture of materials in compression along the cracks // In: «ICF7. Advance in Fracture Research», **6**. – Pergamon Press, 1990. – P. 3881 – 3892.
131. *Guz A.N.* Construction of fracture mechanics for materials subjected to compression along cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 10. – P. 633 – 639.
132. *Guz A.N.* Non-classical problems of composite failure // In: Proc. of ICF9 «Advance in Fracture Research», Vol. 4, Sydney, Australia, 1997. – P. 1911 – 1921.
133. *Guz A.N.* On the singularities in problems of brittle fracture mechanics in case of initial (residual) stresses along the cracks // In: «3<sup>rd</sup> Int. Conf. on nonlinear mechanics. Proceedings». – Shanghai, China, 1998. – P. 219 – 223.
134. *Guz A.N.* Order of singularity in problems of the mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 2. – P. 103 – 107.
135. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Hiedelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
136. *Guz A.N.* Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 12. – P. 1537 – 1564.
137. *Guz A.N.* Construction of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 1 – 37.
138. *Guz A.N.* On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // *ANNALS of the European Academy of Sciences.* – 2006 – 2007. – P. 35 – 68.
139. *Guz A.N.* Pascal Medals Lecture (written presentation) // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 1. – P. 6 – 11.
140. *Guz A.N.* On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 1 – 31.
141. *Guz A.N.* On physical incorrect results in fracture mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 10. – P. 1041 – 1051.
142. *Guz A.N.* Mechanics of crack propagation in materials with initial (residual) stresses (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 2. – P. 121 – 168.
143. *Guz A.N.* On the activity of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics in 1991 - 2011 // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 607 – 626.
144. *Guz A.N.* Stability of elastic bodies under omnidirectional compression. Review // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 3. – P. 241 – 293.
145. *Guz A.N., Dovzhik M.V. and Nazarenko V.M.* Fracture of a material compressed along a crack located at a short distance from the free surface // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 627 – 635.
146. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M.* Fracture and stability of materials and structural members with cracks: approaches and results // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P. 1323 – 1359.
147. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite half-plane compressed along interfacial cracks // *Composites. Part B.* – 2000. – **31**, N 5. – P. 405 – 418.
148. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 1. Exact solution for the case of unequal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 4. – P. 482 – 491.
149. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solution for the case of equal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 5. – P. 615 – 622.
150. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 3. Exact solution for the case of equal and unequal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 6. – P. 759 – 768.
151. *Guz A.N., Guz I.A.* Mixed plane problems of linearized solids mechanics. Exact solutions // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 1. – P. 1 – 29.
152. *Guz A.N., Guz I.A., Menshykov A.V., Menshykov V.A.* Three-dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks. (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
153. *Guz A.N., Khoma Yu. I.* Stability of an infinite solid with a circular cylindrical crack under compression using the Treloar potential // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2002. – **39**, N 3. – P. 276 – 280.
154. *Guz A.N., Khoma Yu. I.* Integral formulation for a circular cylindrical cavity in infinite solid and finite length coaxial cylindrical crack compressed axially // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2006. – **45**, N 2. – P. 204 – 211.
155. *Guz A.N., Khoma Yu. I. and Nazarenko V.M.* On fracture of an infinite elastic body in compression along a cylindrical defect // *Advance in Fracture Research, Proc. of the IX-th Int. Conf. on Fract., Sydney, Australia.* – 1999. – **4**. – P. 2047 – 2054.
156. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Three-dimensional axisymmetric problem of fracture in material with two discoidal cracks under compression along latter // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 11. – P. 1003 – 1012.
157. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Cleavage of composite materials in compression along internal and surface macrocracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 11. – P. 1047 – 1051.

158. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Fracture of ductile materials in compression along two parallel disk-shaped cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 2. – P. 112 – 117.
159. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Compressive failure of material with two parallel cracks: small and large deformation // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1989. – **11**, N 3. – P. 213 – 223.
160. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Symmetric Failure of the Halfspace with Penny-Shaped Crack in Compression // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1985. – **3**, N 3. – P. 233 – 245.
161. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of a material in compression along a periodic system of parallel circular cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 4. – P. 371 – 377.
162. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture mechanics of material in compression along cracks (Review). Highly elastic materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 9. – P. 851 – 876.
163. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture mechanics of materials under compression along cracks (survey). Structural materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 10. – P. 959 – 972.
164. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **48**. – P. 285 – 303.
165. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Khoma Yu.I.* Failure of an infinite compressible composite containing a finite cylindrical crack in axial compression // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 9. – P. 695 – 703.
166. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Khoma Yu.I.* Fracture of an infinite incompressible hyperelastic material under compression along a cylindrical crack // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 5. – P. 325 – 331.
167. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Nazarenko S.M.* Fracture of composites under compression along periodically placed parallel circular stratifications // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 3. – P. 215 – 221.
168. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Starodubtsev I.P.* Planar problem of failure of structural materials in compression along two parallel cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 4. – P. 352 – 360.
169. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Starodubtsev I.P.* On problems of fracture of materials in compression along two internal parallel cracks // *Appl. Math. Mech.* – 1997. – **18**, N 6. – P. 517 – 528.
170. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Fracture dynamics with allowance for a crack edges contact interaction // *Int. J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation.* – 2001. – **2**, N 3. – P. 173 – 233.
171. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 8. – P. 895 – 932.
172. *Guz I.A.* Computational schemes in tree-dimensional stability theory (the piecewise-homogeneous model of a medium) for composites with cracks between layers // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 4. – P. 274 – 280.
173. *Guz I.A.* The strength of a composite formed by longitudinal – transverse stacking of orthotropic layers with a crack at the boundary // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 11. – P. 921 – 924.
174. *Guz I.A.* Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 11. – P. 841 – 847.
175. *Guz I.A.* On one mechanism of fracture of composites in compression along interlayer cracks // In: «Proc. Int. Conf. on Design and Manufacturing Using Composites», Aug. 10 – 12, 1994, Montreal, Canada, 1994. – P. 404 – 412.
176. *Guz I.A.* Problems of the stability of composite materials in compression along interlaminar cracks: periodic system of parallel macrocracks // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 7. – P. 551 – 557.
177. *Guz I.A.* Stability of composites in compression along cracks // In: «Proc. of Enercomp 95», May 8 – 10, 1995, Montreal, Canada. – Technomic Publ. Co., Lancaster – Basel, 1995. – P. 163 – 170.
178. *Guz I.A.* Failure of layered composites with interface cracks // In: «Proc. of the 18<sup>th</sup> Int. Conf. «Reinforced Plastics 95»», Karlovy Vary, 16 – 18.05.1995. – Czech. Rep., 1995. – P. 175 – 182.
179. *Guz I.A.* Stability and failure of layered composites with interface cracks // In: «Proc. of Int. Conf. on Comp. Eng. Sci. «Computational Mechanics 95»», July 30 – Aug. 3, 1995, Hawaii, USA, Vol. 1 – 2. – Springer – Verlag, 1995. – P. 2317 – 2322.
180. *Guz I.A.* Stability loss of composite materials with cracks between compressible elastic layers // In: «Proc. of ECCM – 7», 14 – 16 May, 1996, London, UK, Vol. 1 – 2. – Woodhead Publ. Ltd., 1996. – Vol. 2. – P. 259 – 264.
181. *Guz I.A.* Composite structures in compression along parallel interfacial cracks // In: «Proc. of the ICCST/1», 18 – 20 June 1996, Durban, South Africa. – 1996. – P. 167 – 172.
182. *Guz I.A.* Instability in compression as a failure mechanism for layered composites with parallel interfacial cracks // In: Proc. of ICF 9 «Advances in Fracture Research», Vol. 2, Sydney, Australia, 1997. – P. 1053 – 1060.
183. *Guz I.A.* On one fracture mechanism for composites with parallel interfacial cracks // In: «Proc. of the 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Deformation and Fracture of Composites», 24 – 26 March, 1997, Manchester, UK. – Institute of Materials, London. – 1997. – P. 579 – 588.
184. *Guz I.A.* On calculation of critical strains for periodical array of parallel interfacial cracks in layered materials // In: «Proc. of 6<sup>th</sup> EPMESC Conf.», 4 – 7 August, 1997, Guang-Zhou, China. – 1997. – P. 375 – 380.
185. *Guz I.A.* On fracture of brittle matrix composites: Compression along parallel interfacial cracks // In: «Proc. of 5<sup>th</sup> Int. Symp.», 13 – 15 October, 1997, Warsaw, Poland. – Woodhead Publ. Ltd. Cambridge, 1997. – P. 391 – 400.
186. *Guz I.A.* Numerical investigation on one mechanism of fracture for rock with parallel interlaminar cracks // In: «Advances in Comp. Eng. Sciences». – Tech. Science Press, Forsyth, USA, 1997. – P. 956 – 961.

187. *Guz I.A.* On modelling of a failure mechanism for layered composites with interfacial cracks // ZAMM. – 1998. – **78**, Sup. N 1. – P. S429 – S430.
188. *Guz I.A., Chandler H.W.* Bifurcation problem for ceramics compressed along interlaminar microcracks // In: «Book of Abstracts of the 5<sup>th</sup> Int. Congr. on Indus. and Appl. Math., ICIAM 2003 (Ed.: R.R.Moore)», Sydney, Australia, 7 – 11 July, 2003. – Univ. Of Techn., Sydney, Australia, 2003. – 311 p.
189. *Guz I.A., Guz A.N.* Stability of two different half-planes in compression along interfacial cracks: Analytical solutions // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 7. – P. 906 – 912.
190. *Guz I.A., Kokhanenko Yu.V.* Stability of laminated composite material in compression along microcrack // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 9. – P. 702 – 708.
191. *Hoff N.J.* Buckling and stability // J. Royal Aeronautical Society. – 1954. – **58**, N 1. – P. 1 – 11.
192. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – **24**, N 3. – P. 361 – 364.
193. *Jones R.M.* Buckling of Stiffened Two-Layered Shells of Revolution with the Circumferentially Cracked Unbounded Layer // AIAA Journal. – 1969. – **7**, N 8. – P. 1511 – 1517.
194. *Kachanov L.M.* Delamination buckling of composite materials. – Boston: Kluwer Academic Publisher, 1988.
195. *Kerr L.M., Nemat-Nasser S., Oranrathachai A.* Surface instability and splitting in compressed brittle elastic solids containing crack arrays // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1982. – **49**, N 4. – P. 761 – 767.
196. *Kienzler R. and Herrmann G.* Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics. – Berlin: Springer, 2000. – 298 p.
197. *Knyukh V.L.* Fracture of a material with two disk-shaped cracks in the case of axisymmetric deformation in compression along the cracks // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 3. – P. 221 – 225.
198. *Nazarenko V.M.* Mutual effect of a circular surface crack and a free boundary in an axisymmetric problem of the fracture of an incompressible half space in compression along the crack plane // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 2. – P. 133 – 137.
199. *Nazarenko V.M.* Plastic rupture of materials during compression along near-surface fractures // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **21**, N 2. – P. 133 – 137.
200. *Nazarenko V.M.* Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks // Sov. Appl. Mech. – 1986 – **22**, N 10. – P. 970 – 977.
201. *Nazarenko V.M.* Theory of fracture of materials in compression along near-surface cracks under plane-strain conditions // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 12. – P. 1192 – 1199.
202. *Nazarenko V.M.* Fracture of plastic masses with translational strain-hardening in compression along near-surface cracks // Sov. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N 1. – P. 61 – 64.
203. *Obreimoff I.W.* The splitting strength of mica // Proc. Soc. London A. – 1930. – **127A**. – P. 290 – 297.
204. *Rzayev O.G. and Akbarov S.D.* Local buckling of the elastic and viscoelastic coating around the penny-shaped interface crack // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – **40**. – P. 1435 – 1451.
205. *Shapery R.A.* Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analyses // Proc. US Nat. Congr. Appl. ASME. – 1966. – N 4. – P. 1075 – 1085.
206. *Starodubtsev I.P.* Fracture of a body in compression along two parallel cracks under plane-strain conditions // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 6. – P. 604 – 607.
207. *Turan A., Akbarov S.D.* On loss of stability of a strip with two parallel macro-cracks under finite pre-critical deformation // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 3. – P. 359 – 367.
208. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction on the critical strain in orthotropic heterogeneous material under compressive static loading // In: “Proc. Of the 2006 ASME Int. Mech. Eng. Congr. & Exposition (IMECE 2006)”, Nov. 5 – 10, 2006, Chicago, USA. – ASME, 2006. – 9 p.
209. *Winiarski B., Guz I.A.* Plane problem for layered composites with periodic array of interfacial cracks under compressive static loading // Int. J. of Fracture. – 2007. – **144**, N 2. – P. 113 – 119.
210. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction for transversely isotropic layered material under compressive loading // Finite Elem. in Analysis and Design. – 2008. – **44**, N 4. – P. 197 – 213.
211. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of fibre volume fraction on the onset of fracture in laminar materials with an array of coplanar interface cracks // Composite Sci. and Technology. – 2008. – **68**, N 12. – P. 2367 – 2375.
212. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading // The Phil. Trans. of the Royal Soc. A. – 2008. – **366**, N 1871. – P. 1835 – 1839.
213. *Wu C.H.* Plane-strain buckling of a crack in harmonic solid subjected to crack-parallel compression // J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 597 – 604.
214. *Wu C.H.* Plane strain buckling of a crack in incompressible elastic solids // J. Elasticity. – 1980. – **10**, N 2. – P. 161 – 177.

Поступила 10.09.2012

Утверждена к печати 26.06.2013