Радиофизика и радиоастрономия, 2006, т. 11, №3, с. 254-263

УДК 621.371.162

О методе малых возмущений в теории рассеяния волн статистически неровной поверхностью

А. С. Брюховецкий

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
ire@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2006 г.

На основе единой методики рассмотрены три варианта метода малых возмущений в решении задачи рассеяния волн статистически неровной поверхностью: борновское разложение, приближение Бурре и приближение Крейчнана. Установлена взаимосвязь в виде предельных переходов между указанными приближениями в определенных областях значений физических параметров.

Введение

Метод малых возмущений [1] является достаточно эффективным средством приближенного решения задачи о рассеянии волн малыми случайными неровностями поверхности раздела сред распространения. Теоретическим исследованиям этой проблемы посвящено большое число оригинальных работ, которые нашли свое отражение в монографиях [2-4]. Внимательное ознакомление с ними показывает, что варианты метода малых возмущений у разных авторов иногда существенно отличаются. В основном можно выделить три варианта: борновское разложение, так называемое приближение Бурре и приближение Крейчнана. Такая многовариантность обусловлена возможностью выбора разных задач в качестве невозмущенных, как это будет видно в ходе дальнейшего рассмотрения.

Способы и техника получения решения для указанных приближений весьма многообразны: метод Фурье, интегро-дифференциальная формулировка задачи с последующими итерациями, диаграммная техника Фейнмана, методы абстрактной алгебры линейных операторов, метод вариационных производных и т. д. Получаемые при этом конечные выражения зачастую отличаются лишь несущественными деталями.

При всем многообразии работ по данной тематике практически не проводились анализ взаимосвязи указанных решений, определение общих областей задания физических параметров, где отличия приближенных решений обязаны быть малыми в силу требований единственности решения соответствующей физической проблемы.

Исследование этих вопросов является целью настоящей работы. Математическое построение для рассматриваемых приближений осуществлялось с помощью одного и того же метода – метода Фурье, что в значительной мере облегчает проведение сравнительного анализа получаемых решений для фурье-амплитуд искомых полей.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о рассеянии скалярного волнового поля $U(x, y, z)$ малыми случайными неровностями поверхности $z = \varsigma(x, y)$, в “среднем” (по ансамблю реализаций) являющейся плоскостью $z = \langle \varsigma(x, y) \rangle = 0$.

Рассматриваемую математическую задачу составляют:

а) волновое уравнение (уравнение Гельмгольца):

$$(\Delta_R + k^2)U(\vec{R}) = 0, \qquad \vec{R} = \{x, y, z\}, \quad (1)$$

б) граничное условие смешанного типа на случайной поверхности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial N} + ik\eta_0\right)U\Big|_{z=\varsigma(\vec{r})} = 0, \qquad \vec{r} = \{x, y\}; \qquad (2)$$

в) условие на бесконечности $z \to +\infty$:

$$U(\vec{R}) \to \left(C_1 e^{-ik_z z} + C_2' e^{ik_z z}\right) e^{i\vec{k}_\perp \vec{r}} + C_2''(x, y, z), \qquad (3)$$

где C_1 и C_2' – константы, а $C_2''(x, y, z) \to 0$ при $\varsigma(x, y) \to 0$.

Здесь $\vec{k} = \vec{k}_\perp + \vec{i}_z k_z$ – волновой вектор падающей плоской монохроматической волны, $\vec{k}_\perp$ и $\vec{i}_z k_z$ – составляющие его в плоскости $z = 0$ и перпендикулярно к ней, $\vec{i}_z$ – орт оси z, $k_z = \sqrt{k^2 - k_\perp^2}$; $\Delta_R = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta_r + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в трехмерном пространстве x, y, z; $\dfrac{\partial}{\partial N} = \left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \nabla_r \varsigma \nabla_r\right) \times \left(1 + (\nabla_r \varsigma)^2\right)^{-1/2}$ – производная по нормали к поверхности $z = \varsigma(x, y)$, , причем $\nabla_r = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right\}$.

Поверхностный импеданс η_0 считается малым $\left(|\eta_0| \ll 1\right)$.

Такая постановка задачи отвечает рассеянию плоской волны $C_1 e^{i\left(\vec{k}_\perp \vec{r} - k_z z\right)}$, падающей из области $z \to +\infty$ на шероховатую плоскость [2]. Ее решение является основой для исследования более общей задачи рассеяния поля точечного источника, если принять во внимание разложение Вейля по неоднородным плоским волнам [2, 3]. Без потери общности можно считать $C_1 = 1$.

Малыми параметрами задачи являются безразмерная высота неровностей $|k\varsigma| \ll 1$ и их наклоны $|\nabla_r \varsigma| \ll 1$ [3, 4]. Ограничимся во всех разложениях по степеням этих параметров квадратичными членами. Это позволит в дальнейших преобразованиях использовать детально разработанный математический аппарат корреляционной теории случайных функций. Учет в разложениях более высоких степеней случайных величин означает выход за рамки корреляционной теории и в плане получения конкретных результатов является малорезультативным. С учетом вышесказанного граничное условие (2) заменяется приближенным:

$$\left(\frac{\partial}{\partial N} + ik\eta_0\right)U\Big|_{z=\varsigma(\vec{r})} \approx$$

$$\approx \left[\frac{\partial}{\partial z} - \nabla_r \varsigma \nabla_r - \frac{1}{2}(\nabla_r \varsigma)^2 \frac{\partial}{\partial z}\right]U\Big|_{z=\varsigma} = 0. \qquad (4)$$

Перенесем граничные условия на среднюю поверхность $z = 0$, разложив (4) в ряд Тейлора с точностью до квадратичных членов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial N} + ik\eta_0\right)U\Big|_{z=\varsigma(\vec{r})} \approx \hat{L}_0'(U) + \hat{L}_1'(U) + \hat{L}_2'(U) = 0. \qquad (5)$$

Здесь

$$\hat{L}_0'(U) = \left(\frac{\partial}{\partial N} + ik\eta_0\right)\left(U + \varsigma\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\varsigma^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=0}, \qquad (6)$$

$$\hat{L}_1'(U) = -\nabla_r \varsigma \nabla_r \left(U + \varsigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=0}, \qquad (7)$$

$$\hat{L}_2'(U) = -\frac{1}{2} (\nabla_r \varsigma)^2 \frac{\partial U}{\partial z} \Bigg|_{z=0}. \qquad (8)$$

Дальнейшие преобразования зависят от конкретно выбранного метода возмущений.

Борновское разложение

Конечной целью рассматриваемой задачи является определение статистических характеристик рассеянного поля, что предполагает проведение операций усреднения. Они могут выполняться после приближенного решения поставленной математической задачи либо до ее решения в исходных уравнениях, меняя таким образом саму постановку задачи.

При определенных условиях операции приближенного решения и усреднения не коммутируют, в чем мы убедимся в ходе исследования.

В борновском разложении сначала получается приближенное решение, а затем производится усреднение. Предполагается, что решение можно представить в виде ряда

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + ..., \qquad (9)$$

где $U_j \sim |\varsigma|^j$, $(j = 0, 1, 2, ...)$.

Такая зависимость означает аналитичность решения, которое становится неприменимым в области значений физических параметров, где возмущения имеют сингулярный характер. Подставим его в уравнение (5) и приравняем нулю члены одного порядка величины, ограничившись квадратичными по $|\varsigma|$ членами:

$$\hat{L}_0(U_0) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik\eta_0 \right) U_0 \Bigg|_{z=0} = 0, \qquad (10)$$

$$\hat{L}_1(U_0, U_1) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik\eta_0 \right) \times$$

$$\times \left(U_1 + \varsigma \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) - \nabla_r \varsigma \nabla_r U_0 \Bigg|_{z=0} = 0, \qquad (11)$$

$$\hat{L}_2(U_0, U_1, U_2) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik\eta_0 \right) \left(U_2 + \varsigma \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\varsigma^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \right) -$$

$$-\nabla_r \varsigma \nabla_r \left(U_1 + \varsigma \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (\nabla_r \varsigma)^2 \frac{\partial U_0}{\partial z} \Bigg|_{z=0} = 0. \qquad (12)$$

В качестве математического метода построения решений уравнений (10)–(12), являющихся одновременно решениями уравнения (1), используем метод Фурье.

Представим $\varsigma(\vec{r})$ и поля U_j на плоскости $z = 0$ разложениями Фурье с аналитическим продолжением полей [3, 4] в область $z > 0$:

$$\varsigma(\vec{r}) = \iint \mathrm{d}^2\vec{\chi}\tilde{\varsigma}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{r}}, \qquad \vec{\chi} = (\chi_1, \chi_2), \qquad (13)$$

$$U_j(\vec{r}, z) = \iint \mathrm{d}^2\vec{k}_{j\perp} \tilde{U}_j \left(\vec{k}_{j\perp} \right) e^{i\left(\vec{k}_{j\perp}\vec{r} + k_{jz} z\right)},$$

$$\vec{k}_{j\perp} = (k_{1j}, k_{2j}), \qquad (14)$$

где $k_{jz} = \sqrt{k^2 - k_{j\perp}^2}$, $(j = 1, 2, ...)$. Пределы интегрирования по компонентам векторов $\vec{\chi}$ и $\vec{k}_{j\perp}$ от $-\infty$ до $+\infty$ для краткости обозначений опущены. Здесь и далее тильдой (~) помечены фурье-амплитуды величин.

Предположение, что рассеянное поле содержит лишь уходящие от поверхности $z = 0$ волны, называется гипотезой Рэлея ([4], с. 221). В разложении невозмущенного поля U_0 в силу условия (3) следует учесть как уходящие ($\sim e^{ik_z z}$), так и приходящие волны ($\sim e^{-ik_z z}$).

Решение уравнения (10) для амплитуды Фурье $\tilde{U}_0\left(\vec{k}_{0\perp}\right)$ выглядит следующим образом:

$$\tilde{U}_0\left(\vec{k}_{0\perp}\right)=\left[e^{-ik_z z}+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)e^{ik_z z}\right]\delta\left(\vec{k}_{0\perp}-\vec{k}_\perp\right), \qquad (15)$$

$$V_0\left(\vec{k}_\perp\right)=(k_z-k\eta_0)/(k_z+k\eta_0)\ - \qquad (16)$$

коэффициент отражения Френеля когерентной волны от плоскости. Нетрудно показать, что из требования $\left|V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right|^2\le 1$ для физически реализуемых значений импеданса следует ограничение $\mathrm{Re}\,\eta_0\ge 0$.

Аналогичным образом для амплитуды Фурье $\tilde{U}_1\left(\vec{k}_{1\perp}\right)$ из (11) получаем:

$$\tilde{U}_1\left(\vec{k}_{1\perp}\right)=\frac{1}{k_{1z}+k\eta_0}\tilde{\xi}\left(\vec{k}_{1\perp}-\vec{k}_\perp\right)\times$$
$$\times\left\{\left[\vec{k}_\perp\left(\vec{k}_{1\perp}-\vec{k}_\perp\right)-k_z^2\right]\left[1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right]-\right.$$
$$\left.-kk_2\eta_0\left[-1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right]\right\}. \qquad (17)$$

Заметим для дальнейшего, что

$$\begin{aligned}&1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)=2k_z/(k_z+k\eta_0),\\&-1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)=-2k\eta_0/(k_z+k\eta_0)\end{aligned} \qquad (18)$$

$$\vec{k}_\perp\left(\vec{k}_{1\perp}-\vec{k}_\perp\right)-k_z^2=\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2. \qquad (19)$$

Используя (15) и (17), из (12) находим:

$$\tilde{U}_2\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=\frac{-i}{k_{2z}+k\eta_0}\left\{\tilde{f}_0\left(\vec{k}_{2\perp}\right)+\tilde{f}_1\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\}. \qquad (20)$$

Здесь $\tilde{f}_0(\vec{k}_{2\perp})$ и $\tilde{f}_1(\vec{k}_{2\perp})$ – фурье-амплитуды выражений в (12), содержащих U_0 и U_1 соответственно:

$$\tilde{f}_0\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=-ik_z\iint \mathrm{d}\vec{x}\tilde{\xi}(\vec{\chi})\tilde{\xi}\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp-\vec{x}\right)\left[-1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}\vec{\chi}\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp-\vec{\chi}\right)-\vec{\chi}\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{\chi}\right)\right\}, \qquad (21)$$

$$\tilde{f}_1\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=-\iint \mathrm{d}^2\vec{k}_{1\perp}\tilde{\xi}\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_{1\perp}\right)\tilde{U}_1\left(k_{1\perp}\right)\times$$
$$\times\left\{k_{1z}(k_{1z}+k\eta_0)-\vec{k}_{1\perp}\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_{1\perp}\right)\right\}. \qquad (22)$$

Если представить поле U в виде суммы среднего $\langle U\rangle$ и флуктуации $u=U-\langle U\rangle$, то с принятой точностью получим:

$$\langle U\rangle=U_0+\langle U_2\rangle, \qquad (23)$$

$$u=U_1+U_2-\langle U_2\rangle. \qquad (24)$$

Дальнейшее продвижение в вычислениях возможно, если предположить статистическую однородность случайного поля $\varsigma(\vec{r})$,

$$\sigma^2 W(\vec{r}-\vec{r}')=\langle\varsigma(\vec{r})\varsigma(\vec{r}')\rangle, \qquad (25)$$

означающую симметрию корреляционной функции относительно группы трансляций в плоскости $z=0$. В формуле (25) введена дисперсия $\sigma^2=\langle\varsigma^2\rangle$.

В соответствии с теоремой Винера–Хинчина [5] для коррелятора спектральных амплитуд шероховатостей имеем соотношение:

$$\langle\tilde{\xi}(\vec{\chi})\tilde{\xi}(\vec{\chi}')\rangle=\sigma^2\tilde{W}(\vec{\chi})\delta(\vec{\chi}+\vec{\chi}'), \qquad (26)$$

где

$$\sigma^2\tilde{W}(\vec{\chi}) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\iint \mathrm{d}^2\vec{\rho}\, W(\vec{\rho})e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} - \qquad (27)$$

преобразование Фурье от корреляционной функции (симметричный $\tilde{W}(\vec{\chi}) = \tilde{W}(-\vec{\chi})$ пространственный спектр неровностей [5]).

С учетом сказанного средние значения слагаемых в правой части (20) равны:

$$\frac{-i}{k_{2z}+k\eta_0}\left\langle \tilde{f}_0\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle = -\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\frac{2kk_z\eta_0}{k_z+k\eta_0}\sigma^2\times$$

$$\times\iint \mathrm{d}^2\vec{\chi}\,\tilde{W}(\vec{\chi})\left(\frac{3}{2}\chi^2+\vec{\chi}\vec{k}_\perp\right), \qquad (28)$$

$$\frac{-i}{k_{2z}+k\eta_0}\left\langle \tilde{f}_1\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle = -\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\frac{2kk_z}{k_z+k\eta_0}\frac{\sigma^2}{k}\times$$

$$\times\iint \mathrm{d}^2\vec{k}_{1\perp}\frac{\tilde{W}\left(\vec{k}_\perp-\vec{k}_{1\perp}\right)}{k_{1z}+k\eta_0}\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2+k^2\eta_0^2\right]\times$$

$$\times\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2-kk_{1z}\eta_0\right]. \qquad (29)$$

Наличие δ-функции от аргумента $\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp$ показывает, что поправки на неровности не меняют “зеркального” отражения среднего поля. Заметим, что вклад в результат интегрирования от второго слагаемого $\vec{\chi}\vec{k}_\perp$ в (28) равен нулю в силу симметрии $\tilde{W}(\vec{\chi}) = \tilde{W}(-\vec{\chi})$.

Приближение Крейчнана

Для построения решения в этом приближении воспользуемся способом, предложенным ранее в работе [6]. Прибавим к обеим частям равенства (5) величину $ik(\eta-\eta_0)U\big|_{z=0}$, где ηU – результат действия на U некоего линейного интегрального оператора, который будет определен ниже.

В результате получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta\right)U\bigg|_{z=0} = -\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta_0\right)\times$$

$$\times\left(\varsigma\frac{\partial}{\partial z}U+\frac{\varsigma^2}{2}\frac{\partial z}{\partial z^2}U\right)+\nabla_r\varsigma\nabla_r\left(U+\varsigma\frac{\partial U}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla_r\varsigma)^2\frac{\partial}{\partial z}U+ik(\eta-\eta_0)U\bigg|_{z=0}. \qquad (30)$$

Представим U в виде суммы среднего $\langle U\rangle$ и флуктуаций $u \sim O(\varsigma)$. Усредняя (30), получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta\right)\langle U\rangle\bigg|_{z=0} = F_0+F_1+F_2+F_3+O(\varsigma^3), \qquad (31)$$

где

$$F_0 = \nabla_r\varsigma\nabla_r\left(\varsigma\frac{\partial}{\partial z}\langle U\rangle\right)+\frac{1}{2}(\nabla_r\varsigma)^2\frac{\partial}{\partial z}\langle U\rangle\bigg|_{z=0},$$

$$F_1 = \left\langle\left[\nabla_r\varsigma\nabla_r-\varsigma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta_0\right)\right]U\right\rangle\bigg|_{z=0},$$

$$F_2 = -\frac{1}{2}\left\langle\varsigma^2\right\rangle\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta_0\right)\langle U\rangle\bigg|_{z=0},$$

$$F_3 = ik(\eta-\eta_0)\langle U\rangle\big|_{z=0}.$$

При этом предполагается, что $\eta-\eta_0\to 0$ как σ^2, если $\varsigma\to 0$.

Вычтем (31) из (30), ограничившись линейными по ς членами:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta\right)u\bigg|_{z=0} =$$

$$=\left[\nabla_r\varsigma\nabla_r-\varsigma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik\eta_0\right)\right]\langle U\rangle+O(\varsigma^2). \qquad (32)$$

Особо подчеркнем, что выражения $O(\varsigma^3)$ в (31) и $O(\varsigma^2)$ в (32) содержат статистические моменты искомых величин более высокого порядка по сравнению с явно выписанными. Их сохранение приводит к незамкнутости статистической цепочки уравнений для искомых моментов. Пренебрежение ими делает систему уравнений (31), (32) замкнутой и является таким образом "гипотезой замыкания".

Положим, что преобразование Фурье от ηU сводится к умножению фурье-амплитуды $\tilde{U}(k_{2\perp})$ на некоторое значение функции $\eta\left(\vec{k}_{2\perp}\right)$ от фурье-переменной $\vec{k}_{2\perp}$. Оператор η играет при этом роль нелокального импеданса поверхности ([3], с. 364), другими словами, импеданса с пространственной дисперсией. Чтобы функция $\eta\left(\vec{k}_{2\perp}\right)$ была эффективным импедансом среднего поля $\langle U\rangle$, потребуем обращения в нуль левой и правой частей (31). Из условия равенства нулю левой части и условия на бесконечности получим выражение для фурье-амплитуды среднего поля:

$$\left\langle \tilde{U}\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle\Big|_{z=0} = \delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_{\perp}\right)\left[e^{-ik_z z}+V\left(\vec{k}_{\perp}\right)e^{-ik_z z}\right]_{z=0}, \tag{33}$$

где

$$V\left(\vec{k}_{\perp}\right)=C_2'=\left(k_{2z}-k\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)\right)\Big/\left(k_z+k\eta\left(\vec{k}_1\right)\right). \tag{34}$$

Коэффициент отражения (34) среднего поля $V\left(\vec{k}_{2\perp}\right)$ отличается от такового (16) для невозмущенного поля заменой η_0 на величину $\eta\left(\vec{k}_{2\perp}\right)$, которая определяется из условия обращения в нуль правой части (31). Предварительно необходимо определить флуктуации поля через среднее из уравнения (32). Очевидно, оно отличается от (11) заменами $U_1 \to u$, $U_0 \to \langle U\rangle$, $\eta_0 \to \eta$. Следовательно, по аналогии с (17) для фурье-амплитуды флуктуации будем иметь

$$\tilde{u}\left(\vec{k}_{1z}\right)=\frac{i}{k_{1z}+k\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)}\tilde{\xi}\left(\vec{k}_{1\perp}-\vec{k}_{\perp}\right)\times$$
$$\times\left\{\left[\vec{k}_{\perp}\left(\vec{k}_{1\perp}-k_{\perp}\right)-k_z^2\right]\left[1+V\left(\vec{k}_{\perp}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-kk_z\eta_0\left[-1+V\left(\vec{k}_{\perp}\right)\right]\right\}. \tag{35}$$

Вычисления фурье-амплитуд выражений F_j в правой части (31) приводят к результату:

$$\tilde{F}_0\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)B\sigma^2\iint d^2\vec{\chi}\tilde{W}(\vec{\chi})\left(\frac{3}{2}\chi^2+\vec{k}_{\perp}\vec{\chi}\right), \tag{36}$$

$$\tilde{F}_1\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=B\frac{\sigma^2}{k}\times$$
$$\times\iint d^2\vec{k}_{1\perp}\frac{\tilde{W}\left(\vec{k}_{\perp}-\vec{k}_{1\perp}\right)}{k_{1z}+k\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)}\left[\vec{k}_{\perp}\vec{k}_{1\perp}-k^2+k^2\eta_0\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\vec{k}_{\perp}\vec{k}_{1\perp}-k^2-kk_{1z}\eta_0\right], \tag{37}$$

$$\tilde{F}_2\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=B\left(k_z^2\sigma^2/2\right)\left[\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)-\eta_0\right], \tag{38}$$

$$\tilde{F}_3\left(\vec{k}_{2\perp}\right)=-B\left[\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)-\eta_0\right], \tag{39}$$

$$B=-\frac{2ikk_z}{k_z-k\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)}\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_{\perp}\right).$$

Приравняв нулю сумму выражений (36)–(39), получаем интегральное уравнение, определяющее $\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)$:

$$\Delta\eta\equiv\eta\left(\vec{k}_{\perp}\right)-\eta_0=$$
$$=\left(1-k_z^2\sigma^2/2\right)^{-1}\iint d^2\vec{k}_{1\perp}\frac{k^{-1}\sigma^2\tilde{W}\left(\vec{k}_{\perp}-\vec{k}_{1\perp}\right)}{k_{1z}+k\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)}\times$$

$$\times\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2+k^2\eta_0\eta\left(\vec{k}_\perp\right)\right]\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2-kk_{1z}\eta_0\right]+$$

$$+\eta\left(\vec{k}_\perp\right)\left(1-k_z^2\sigma^2/1\right)^{-1}\iint d^2\vec{\chi}\sigma^2\tilde{W}(\vec{\chi})\left(\frac{3}{2}\chi^2+\vec{k}_\perp\vec{\chi}\right). \quad (40)$$

Как указывалось ранее, слагаемое $\vec{k}_\perp\vec{\chi}$ во втором интеграле при интегрировании дает нулевой вклад, а вклад первого равен $(3/2)\left\langle(\nabla\varsigma)^2\right\rangle\ll 1$. Величина первого интеграла того же порядка. Тогда в силу малости $\eta\left(\vec{k}_\perp\right)$ вторым интегралом в (40) можно пренебречь, а кроме того, положить $\left(1-k_z^2\sigma^2/2\right)^{-1}\approx 1$, поскольку $k_z\sigma\ll 1$ – малый параметр задачи. При указанных упрощениях формула (40) совпадает с формулой (12) из работы [6], где с самого начала в разложении (5) не учитывались члены $\sim(\nabla\varsigma)^2$ и $\left\langle\varsigma^2\right\rangle$.

Приближение Бурре

Эквивалентные граничные условия для этого приближения получаются из условий (31), (32), если в них положить $\eta=\eta_0$, при этом для среднего поля получаем выражение:

$$\left\langle U\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle\Big|_{z=0}=\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\left[e^{-ik_zz}+V_B\left(\vec{k}_\perp\right)e^{ik_zz}\right]_{z=0}, \quad (41)$$

где

$$V_B\left(\vec{k}_\perp\right)=\left[k_z-k\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)\right]\Big/\left[k_z+k\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)\right], \quad (42)$$

а $\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)$ – первая итерация в интегральном уравнении (40) в приближении Крейчнана, если за нулевую итерацию в правой части (40) принять η_0.

Флуктуационное поле в этом приближении выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}\left(\vec{k}_{1\perp}\right)=\frac{i}{k_{1z}+k\eta_0}\tilde{\xi}\left(\vec{k}_{1\perp}-\vec{k}_\perp\right)\left\{\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+V_B\left(\vec{k}_\perp\right)\right]-kk_z\eta_0\left[-1+V_B\left(\vec{k}_\perp\right)\right]\right\}. \quad (43)$$

В отличие от приближения Крейчнана (35) знаменатель (43) содержит η_0 вместо $\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)$. Отличием от первого борновского приближения (17) является наличие коэффициента отражения среднего поля $V_B\left(\vec{k}_\perp\right)$ вместо коэффициента отражения $V_0(\vec{k}_\perp)$ невозмущенного поля U_0.

Поскольку соотношение между $|\eta_0|$ и $k^2\sigma^2$ может быть произвольным, в силу этого в (40) произвольным может быть и соотношение между $|\Delta\eta|$ и $|\eta_0|$. Для итераций выше первой $\Delta\eta$ существенно меняется, если для результата интегрирования определяющими являются малые значения знаменателя $k_{1z}+k\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)$. Такое возможно лишь в очень специальном случае обратного резонансного рассеяния $\left(\vec{k}_{1\perp}=-\vec{k}_\perp\right)$ поверхностных $(k_{1z}=0,$ т. е. $\left|\vec{k}_\perp\right|=k)$ волн на одномерных неровностях с узкополосным $\left(\le k\left|\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)\right|\right)$ спектром (см. [7, 8]).

Предельные переходы

Для произвольных двумерных неровностей в уравнении (40) практически достаточно первой итерации, т. е. приближения Бурре для эффективного импеданса $\eta\left(\vec{k}_\perp\right)\approx\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)$. При этом среднее поле (33) в приближении Крейчнана будет равно среднему полю (41) в приближении Бурре. Заметим, что в отличие от борновского разложения зависимость (33), (41) и (35), (43) от возмущений (от дисперсии σ^2) имеет сингулярный характер и описывает смещение полюса коэффициента отражения в комплексной плоскости углов падения в зависимости от добавки в эффективном импедансе.

Приближенное равенство флуктуационных полей в приближении Бурре (43) и в приближении Крейчнана (35) возможно, если, кроме равенства $\eta\left(\vec{k}_\perp\right)\approx\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)$, выполнено приближенное равенство

$$\left(k_{1z}+k\eta\left(\vec{k}_{1\perp}\right)\right)^{-1}\approx(k_{1z}+k\eta_0)^{-1}, \tag{44}$$

для чего необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\begin{gathered}\left|(\Delta\eta)_1/(k_{1z}+k\eta_0)\right|\ll 1,\\ (\Delta\eta)_1=\eta_B(k_{1\perp})-\eta_0.\end{gathered} \tag{45}$$

В случае малого влияния рассеяния, $\left|(\Delta\eta)_1\right|\ll\left|\eta_0\right|$, условие (45) выполняется для любых углов рассеяния распространяющихся волн $(\cos\theta_1\equiv k_{1z}/k\ge 0)$ в силу условия $\operatorname{Re}\eta_0\ge 0.$

Если вклад рассеяния в импеданс значителен, $\left|(\Delta\eta)_1\right|\ge\left|\eta_0\right|$, то условие (45) выполняется лишь для $\cos\theta_1\gg\left|(\Delta\eta)_1\right|$, а следовательно, и $\cos\theta_1\ge\left|\eta_B\left(\vec{k}_{1\perp}\right)\right|$, что означает отличные от скользящего направления рассеяния. В области скользящих углов приближение Крейчнана (35) в этом случае не переходит в приближение Бурре (43) для некогерентного рассеянного поля.

Для предельного перехода к разложению Борна необходимо, чтобы $V_B\left(\vec{k}_\perp\right)$ можно было представить в виде:

$$V_B\left(\vec{k}_\perp\right)\approx V_0(k_\perp)-\frac{k(\Delta\eta)_1}{k_z+k\eta_0}\left[1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right]+\ldots, \tag{46}$$

где многоточие означает более высокие степени параметра

$$\left|\frac{k(\Delta\eta)_1}{k_z+k\eta_0}\right|\ll 1 \tag{47}$$

в разложении (46), а $(\Delta\eta)_1=\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)-\eta_0.$

Условие (47) для среднего поля аналогично (45) для некогерентного поля, а потому накладывает такие же ограничения на угол падения θ (равный углу отражения) когерентной волны, как и условие (45) на угол рассеяния θ некогерентного поля.

Подстановка (46) в (41) приводит к выражению для среднего поля

$$\begin{aligned}\left.\left\langle U\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle\right|_{z=0}&=\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\left[e^{-ik_zz}+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)e^{ik_zz}\right]_{z=0}-\\ &-\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\frac{k(\Delta\eta)_1}{k_z+k\eta_0}\left[1+V_0\left(\vec{k}_\perp\right)\right].\end{aligned} \tag{48}$$

Сравнивая (48) и (23), видим, что первое слагаемое равно $\tilde{U}_0\left(\vec{k}_{2\perp}\right)$. Тогда второе слагаемое должно совпасть с $\left.\left\langle\tilde{U}_2\right\rangle\right|_{z=0}$. Действительно, принимая во внимание (19), имеем:

$$\begin{aligned}\left.\left\langle\tilde{U}_2\left(\vec{k}_{2\perp}\right)\right\rangle\right|_{z=0}&=-\frac{2kk_z}{(k_z+k\eta_0)}(\Delta\eta)_1\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)=\\ &=-\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\frac{2kk_z}{(k_z+k\eta_0)^2}\left(1+k_z^2\sigma^2/2\right)\left(\sigma^2/k\right)\times\\ &\times\iint \mathrm{d}^2\vec{k}_{1\perp}\frac{\tilde{W}\left(\vec{k}_\perp-\vec{k}_{1\perp}\right)}{k_{1z}+k\eta_0}\times\\ &\times\left\{\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2+k^2\eta_0^2\right]\left[\vec{k}_\perp\vec{k}_{1\perp}-k^2-kk_{1z}\eta_0\right]\right\}-\\ &-\delta\left(\vec{k}_{2\perp}-\vec{k}_\perp\right)\frac{2kk_z}{(k_z+k\eta_0)^2}\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)\times\\ &\times\left(1+\frac{k_z^2\sigma^2}{2}\right)\sigma^2\iint \mathrm{d}^2\vec{\chi}\tilde{W}(\vec{\chi})\left(\chi^2+\vec{\chi}\vec{k}_\perp\right).\end{aligned} \tag{49}$$

Здесь $\eta_B\left(\vec{k}_\perp\right)=\eta_0+(\Delta\eta)_1\approx\eta_0\ll 1$ в силу условия (47). Если, кроме того, пренебречь в круглых скобках величиной $k_z^2\sigma^2/2\ll 1$, то (49) в точности совпадает с формулой (20) с подстановкой в нее выражений (28) и (29).

Заметим, что при переходе от фурье-представления к координатному среднее и флуктуационное поля будут содержать обобщенные множители ослаблений на соответствующих трассах (формулы (13) и (15) в [6]). Для крутых углов эти множители переходят в отражательные формулы. Поэтому условия (45) и (47) по сути являются условиями малости изменения множителей ослабления. При их выполнении выражения для полей, содержащие отрицательные степени σ за счет $\eta(k_\perp)$ в знаменателях (33) и (35), переходят в разложения по положительным степеням σ. Случай $\cos\theta \gg \eta\left(\vec{k}_\perp\right)$ отвечает комплексным значениям θ вдали от полюса коэффициента отражения, а $\left|(\Delta\eta)_1\right| \ll \left|\eta_0\right|$ – малому изменению положения полюса в аналитических продолжениях полученных выражений. В первом случае мало меняется сам коэффициент отражения, а во втором – значение вычета в точке полюса.

Таким образом, существенное различие в значениях пространственных спектральных компонент когерентного или флуктуационного поля, определяемых тремя вышеизложенными вариантами метода возмущений, имеет место при выполнении двух условий: скользящем распространении соответствующей спектральной компоненты и значительных изменениях эффективного импеданса для этой компоненты за счет рассеяния на неровностях поверхности.

Проведенный в работе анализ относится к самому простому случаю рассеивающей поверхности, “в среднем” являющейся плоскостью. Из поверхностей, допускающих точное решение невозмущенной задачи, большой интерес представляет сфера. Борновское разложение для статистически неровной сферы исследовалось в [9, 10], а приближение Бурре для когерентной составляющей поля – в [11]. В приближении Крейчнана эта задача вообще не исследовалась. Решение эквивалентных граничных условий аналогичных (31), (32) для этого случая гораздо сложнее. Трудности обусловлены не только дискретностью получаемых при этом спектральных разложений, но и сложностью анализа решений в переходной зоне и в зоне тени. Поэтому результаты проведенного в работе анализа могут служить ориентировочными для задачи рассеяния волн мелкомасштабными неровностями большой сферы, когда эффективный импеданс вычисляется в “приближении касательной плоскости” [11].

Литература

1. Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. – М.: ИЛ, 1960. – 886 с.
2. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – М.: Изд. АН СССР, 1961. – 546 с.
3. Басс Ф. Г. и Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
4. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 317 с.
5. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 373 с.
6. Брюховецкий А. С. Об одном варианте метода малых возмущений в теории рассеяния на статистически неровной поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988 – Т. 31, №3. – С. 321-326.
7. Bryukhovetski A. S., Naumenko V. F., and Pazynin L. A. Effectiv Impedance of a Statistically Rough Surface: Numerical Analysis // Telecommunications and Radio Engineering. – 1997. – Vol. 51, No. 2-3. – P. 119-132.
8. Wait J. R. Perturbation analysis for reflection from two-dimensional periodic sea waves // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, No. 3. – P. 387-391.
9. Mitzner K. M. Effect of Small Irregularities on Electromagnetic Scattering from an Interface of Arbitrary Shape // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, No. 12. – P. 1776-1786.
10. Burrows M. L. A Reformulated Boundary Perturbation Theory in Electromagnetism and its Applications to a Sphere // Can. J. Phys. – 1967. – Vol. 45, No. 5. – P. 1729-1743.
11. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой: I. Потенциалы Дебая в комплексной плоскости углового момента // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. Т. 9, №1. – С. 37-46; II. Деформация контура интегрирования и вычисление асимптотик поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т.9, №1 . – С. 47-56; III. Полный учет возмущений в приближении Бурре// Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №2. – С. 124-134; IV. Численный анализ // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т.10, №2. – С. 135-142.

Щодо методу малих збурень в теорії розсіяння хвиль статистично нерівною поверхнею

А. С. Брюховецький

На основі єдиної методики розглянуто три варіанти методу малих збурень у розв'язку задачі розсіяння хвиль статистично нерівною поверхнею: борнівське розкладання, наближення Бурре і наближення Крейчнана. Встановлено взаємозв'язок у вигляді граничних переходів між вказаними наближеннями у певних областях значень фізичних параметрів.

On the Perturbation Method in the Theory of Wave Scattering by Statistically Rough Surface

A. S. Bryukhovetski

Three versions of the perturbation method are considered as applied to the solution of wave scattering by statistically rough surface: the Born expansion, the Bourret approximation, and the Kraichnan approximation. The correlation is established between the mentioned approximations as the passage to the limit in certain ranges of physical parameters.