УДК 550.83

© Е.П. Вдовина, 2011

Научно-исследовательский институт гидрогеологии, инженерной геологии и экогеологии, г. Ивано-Франковск

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Получены условия сопряжения вектора напряженности статического поля на поверхности раздела двух однородных сред. Обосновано положение о том, что в неоднородных средах статические векторные поля являются квазипотенциальными, а функция потенциала поля не удовлетворяет уравнению Лапласа. Результаты справедливы для гравитационного, электростатического, магнитного полей.
Ключевые слова: сопряжение, вектор напряженности, потенциал, уравнение Лапласа.

В теории и практике интерпретации данных геопотенциальных полей отмечается существенная разноплановость математических подходов к решению прямых и обратных задач. Это обусловлено отсутствием универсальной технологии интерпретации данных. Одним из путей поиска оптимальной схемы интерпретации может служить использование в качестве теоретического базиса системы уравнений статического векторного поля в неоднородной среде, приведенной в работе [1]. Система в равной мере пригодна для гравитационного поля в неоднородной геоплотностной среде и для электростатического поля как в проводниках, так и в диэлектриках. Эти уравнения также возможно использовать для расчетов в смешанных средах, состоящих для электрического поля из системы неподвижных электрических зарядов, которые произвольно расположены в неоднородном диэлектрике. Для магнитного поля возможно задание среды, неоднородной по магнитным свойствам и содержащей произвольное распределение магнитных масс различной плотности.

Для изложения некоторых результатов анализа системы дифференциальных уравнений представляется целесообразным кратко изложить основные положения [1]. Универсальность системы достигается введением в рассмотрение функции $C(x, y, z)$, характеризующей физические свойства среды. Для гравитационного поля – это функция разности плотности источника (массы, занимающей элементарный объем dV) $\sigma_{\text{ист}}$ и плотности вещества:

$$C(x,y,z)=\gamma(\sigma_{\text{ист}}-\sigma(x,y,z))dV,$$

где γ – гравитационная постоянная; $\sigma(x, y, z)$ – плотность среды.

Для электростатического поля одного источника элементарного объема с плотностью заряда $\delta_{\text{ист}}^{\text{эл}}$ характеристика среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, y, z)$ и неподвижными электрическими зарядами с плотностью $\delta^{\text{эл}}(x, y, z)$ определяется формулой

$$C(x,y,z)=\frac{(\delta_{\text{ист}}^{\text{эл}}\text{-}\delta^{\text{эл}}(x,y,z))dV}{\varepsilon(x,y,z)}.$$

Для магнитного поля, создаваемого магнитной массой элементарного объема плотностью $\delta_{\text{ист}}^{\text{м}}$, характеристика среды с магнитной проницаемостью $\mu(x, y, z)$ и неподвижными магнитными массами, распределенными в пространстве, с плотностью $\delta^{\text{м}}(x, y, z)$ описывается формулой

$$C(x,y,z)=\frac{(\delta_{\text{ист}}^{\text{м}}\text{-}\delta^{\text{м}}(x,y,z))dV}{\mu(x,y,z)}.$$

Приведем систему дифференциальных уравнений, позволяющих определить напряженность поля одного источника в неоднородной среде:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)=0. \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)=0. \quad (2)$$

Система (1), (2) является основной для определения статического поля в неоднородной среде. Аналогично можно получить уравнение для нахождения потенциала поля в неоднородной среде:

$$\Delta\left(\frac{U_{\text{ср}}}{C}\right)=0. \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) записаны для точек поля, в которых отсутствуют скачки характеристики среды, т. е. функция C непрерывна и существуют как минимум ее первые производные. Распишем эти уравнения в подробной форме:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)=\frac{1}{C}\operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{ср}}+\left\langle \mathbf{E}_{\text{ср}}\middle|\operatorname{grad}\frac{1}{C}\right\rangle=0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)=\frac{1}{C}\operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{ср}}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{C}\times\mathbf{E}_{\text{ср}}\right]=0,$$

где $\langle\bullet|\bullet\rangle$ – скалярное произведение векторов; $[\bullet\times\bullet]$ – векторное произведение векторов.

Отсюда следует, что в неоднородных средах ни дивергенция, ни ротор вектора напряженности статического векторного поля не равны нулю:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{ср}}=-\frac{1}{C}\left\langle \mathbf{E}_{\text{ср}}\middle|\operatorname{grad}\, C\right\rangle,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{ср}}=-\frac{1}{C}\left[\operatorname{grad}C\times\mathbf{E}_{\text{ср}}\right].$$

Однако на поверхности раздела слоев с постоянной плотностью при скачкообразном изменении характеристики среды grad$C$ достигает очень больших значений, и уравнения (1), (2) теряют смысл. Поскольку такая простейшая модель играет важную роль для практики, необходимо определить граничные условия, т. е. условия сопряжения векторов напряженности поля в двух бесконечно близких точках, находящихся по разные стороны от поверхности раздела двух сред с различными плотностями.

Граничные условия. Сформулируем граничные условия для модели, когда плоская поверхность разделяет две среды, в каждой из которых характеристики сред постоянны: C_1 = const и C_2 = const.

Для определения первого граничного условия воспользуемся уравнением (2), которое запишем в виде равенства нулю поверхностного ротора [2]:

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}=\left[\mathbf{n}\times\left(\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_2-\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_1\right)\right]=0,$$

где **n** – вектор нормали к поверхности раздела.

Из последнего выражения следует, что тангенциальные компоненты вектора $\left(\dfrac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_{\tau}$ всегда непрерывны при переходе через поверхность раздела сред с различными характеристиками. Поскольку вдоль поверхности раздела сред характеристика C остается неизменной, то и тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{E}_{\text{ср}\,\tau}$ также остаются непрерывными:

$$\mathbf{E}_{\text{ср}\tau_1} = \mathbf{E}_{\text{ср}\tau_2}\,. \tag{4}$$

Для записи второго граничного условия, определяющего разрыв нормальных компонент вектора $\mathbf{E}_{\text{ср}}$, запишем (1) как равенство нулю поверхностной дивергенции [2]:

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C} = \left\langle \mathbf{n} \middle| \left(\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_2 - \left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_1 \right) \right\rangle = 0\,,$$

откуда следует равенство нормальных компонент

$$\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_{\mathbf{n}1} = \left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_{\mathbf{n}2}.$$

В первой среде

$$\left(\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}}}{C}\right)_{\mathbf{n}1} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ср}\mathbf{n}1}}{C_1}.$$

Тогда нормальная компонента вектора напряженности поля может быть определена из равенства

$$\frac{\mathbf{E}_{\text{ср}\mathbf{n}1}}{C_1} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ср}\mathbf{n}2}}{C_2}\,. \tag{5}$$

Отсюда второе граничное условие определяется выражением

$$\mathbf{E}_{\text{ср}\mathbf{n}2} = \mathbf{E}_{\text{ср}\mathbf{n}1}\frac{C_1}{C_2}\,. \tag{5'}$$

Таким образом, тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{E}_{ср}$ остаются непрерывными, а нормальные составляющие напряженности поля испытывают разрыв, меняясь пропорционально отношению физических характеристик сред.

Аналогии граничных условий для гравитационного и электростатического полей. Аналогии с электростатическим полем в диэлектриках для гравитационного поля вытекают из одинакового формального наполнения понятий безразмерного коэффициента ослабления напряженности (потенциала) $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}$ и диэлектрической проницаемости ε в однородных средах:

- для электростатического поля: "влияние однородной среды выражается только в уменьшении напряженности поля в ε раз по сравнению с полем в вакууме" [3];
- для гравитационного поля: влияние однородной среды выражается только в уменьшении напряженности поля в $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}$ раз по сравнению с полем в вакууме.

Однако существует смысловое физическое различие при проведении подобного рода аналогий. Оно основано на том, что "…в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории – проводники и диэлектрики, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов – электрический ток" [4]. По отношению же к гравитационному полю среды могут состоять только из масс, т. е. только из источников идентичного поля, которые, исходя из сходства фундаментальных законов, аналогичны зарядам. Поэтому с точки зрения физической природы полей более уместны аналогии между электростатическим полем в проводниках и гравитационным полем в сплошных плотностных средах.

Рассмотрим электростатическое поле однородного проводника и гравитационное поле однородной массы. Под однородностью понимается постоянство объемной плотности электрических зарядов $\delta^{эл}$ и объемной плотности вещества σ. Предположим, что внешние по отношению к проводнику и массе поля (электрическое и гравитационное соответственно) отсутствуют.

"Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равна нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность **E** привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и поэтому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда, в свою очередь, следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности: наличие зарядов в объеме проводника непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем; распределение же зарядов по поверхности может быть осуществлено таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались" [4].

При анализе задачи о поле однородного проводника и однородной массы получаем результат, совпадающий с первым положением цитаты из работы [4], приведенной выше: напряженность поля внутри однородного тела должна быть равна нулю. Однако из предлагаемой постановки задачи вытекает иное объяснение этого факта: распределение масс (зарядов) необязательно должно иметь место только по поверхности тела (проводника), поскольку при однородности тел в отношении как плотности вещества, так и плотности электрических зарядов поля от соседних элементов среды взаимно компенсируют друг друга, что приводит к суммарному нулевому эффекту внутри тела.

Исходя из граничных условий (4) и (5), гравитационное поле должно быть нормальным к поверхности однородного изолированного тела в каждой точке данной поверхности. Это следует из условия непрерывности тангенциальных компонент напряженности по поверхности: поскольку внутри тела напряженность поля, создаваемая каждой отдельной элементарной массой $dm = \sigma dV$, равна нулю, то касательные компоненты поля на поверхности также равны нулю.

Нормальная компонента поля определяется из второго граничного условия (5) с учетом того обстоятельства, что внутри тела $\mathbf{E}_{\text{ср}} = \mathbf{E}_{\text{в}} \dfrac{\sigma_{\text{ист}} - \sigma_{\text{ср}}}{\sigma_{\text{ист}}}$ для гравитационного поля и $\mathbf{E}_{\text{ср}}^{\text{эл}} = \mathbf{E}_{\text{в}}^{\text{эл}} \cdot \varepsilon$ для электростатического поля:

$$\mathbf{E}_{\text{ср}\,\mathbf{n}} = \mathbf{E}_{\text{в}\mathbf{n}};$$

$$\mathbf{E}^{\text{эл}}_{\text{ср}\,\mathbf{n}} = \mathbf{E}^{\text{ЭЛ}}_{\text{в}\mathbf{n}}.$$

Нормальная компонента статического поля одного источника с внутренней стороны поверхности однородного тела равна нулю, при переходе через поверхность терпит разрыв и становится равной нормальной компоненте напряженности поля этого источника в вакууме.

Таким образом, суммарное статическое поле должно быть нормальным к поверхности однородного изолированного тела в каждой ее точке. Поскольку $\mathbf{E}_{\text{ср}} = -\text{grad}U_{\text{ср}}$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль поверхности тела. Иными словами, поверхность однородного изолированного от внешних воздействий тела представляет собой эквипотенциальную поверхность гравитационного (электростатического, магнитного) поля.

Этот результат полностью совпадает с теорией электростатического поля в проводниках [4]. Единственное различие заключается в нахождении нормальной компоненты поля при переходе через поверхность однородного тела: в электростатике проводников нормальная компонента $\mathbf{E}_{\mathbf{n}}=4\pi\bar{\sigma}$, т. е. определяется поверхностной плотностью зарядов $\bar{\sigma}$ [4], а в данной работе предложено полагать нормальную компоненту для любого из полей равной нормальной составляющей поля в вакууме.

Потенциал в неоднородных средах. Распишем уравнение (3) в подробном виде:

$$\frac{1}{C}\Delta U_{\text{ср}} + 2\left\langle \text{grad}\,U_{\text{ср}} \middle| \text{grad}\frac{1}{C}\right\rangle + U_{\text{ср}}\Delta\frac{1}{C} = 0. \quad (6)$$

Для однородных и кусочно-однородных сред приходим к известному результату, что в точках, свободных от источников [3],

$$\Delta U_{\text{ср}} = 0.$$

Для неоднородных сред при выполнении условия непрерывности функции C и существования ее вторых производных лапласиан $U_{\text{ср}}$, как это видно из (6), не равен нулю:

$$\Delta U_{\text{ср}} \neq 0.$$

В неоднородных средах гармонической является функция $\left(\frac{U_{\text{ср}}}{C}\right)$, а не потенциал поля. Это означает, что функция $U_{\text{ср}}$ может достигать минимального и/или максимального значения не только на границах, но и внутри области поля. Таким образом, благодаря предлагаемой постановке задачи снимаются ограничения [5] на поиски решения только в классе гармонических функций.

Предлагаемые в данной работе результаты анализа системы уравнений для геопотенциальных полей могут рассматриваться как основа для дальнейших теоретических разработок в направлении, например, создания унифицированной или комплексной системы обработки данных гравиметрии, электрометрии, магнитометрии с учетом неоднородности разнородных физических свойств геологических сред. При этом возможна интеграция методических приемов, разработанных для различных геофизических методов.

1. *Вдовина Е.П.* О влиянии среды на гравитационное поле массы // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Геологія. – 2010. – № 51. – С. 29–35.
2. *Булах Е.Г., Шуман В.Н.* Основы векторного анализа и теории поля / Киев: Наук. думка, 1998. – 360 с.
3. *Овчинников И.К.* Теория поля / Изд. 2-е, перераб. – М.: Недра, 1979. – 352 с.
4. *Ландау Л.Д.,* Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 620 с.
5. *Кобрунов А.И.* Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред / Киев: УМК ВО, 1989. – 100 с.

Аналіз системи рівнянь статичного поля в неоднорідних середовищах
О.П. Вдовіна

РЕЗЮМЕ. Отримано граничні умови для вектора напруженості статичного поля на поверхні розмежування двох однорідних середовищ. Обґрунтовано твердження, що в неоднорідних середовищах статичні векторні поля є квазіпотенціальними, а функція потенціалу поля не задовільняє рівнянню Лапласа. Результати є придатними для гравітаційного, електростатичного, магнітного полів.
Ключові слова: граничні умови, вектор напруженості, потенціал, рівняння Лапласа.

The Analysis of the System of Equations of the Static Fields in Inhomogeneous Environments E.P. Vdovina

SUMMARY. The conditions of conjugation of the intensity vector of the static field at the interface between two homogeneous mediums is obtained. The substantiation of the fact that in heterogeneous mediums the static vector fields are quasipotential and the function of the potential field does not satisfy the Laplace equation is adduced. The results are valid for the gravitational, electrostatic, magnetic fields.
Keywords: conjugation, intensity vector, potential, Laplace equation.