

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ РАДИОАСТРОНОМИИ, РАДИОФИЗИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

УДК 535.326:537.874

В. И. ВЬЮННИК, А. А. ЗВЯГИНЦЕВ

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: vladdal@gmail.com

МИМИКРИЯ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДХОДА ТРАНСФОРМАЦИОННОЙ ОПТИКИ

Показана возможность создания анизотропных диэлектрических плащей, которые обеспечивают покрытому ими телу мимикрию под тело другой формы, так что для внешнего наблюдателя покрытое таким плащом тело выглядит как тело другой формы. Представлена методика конструирования плащей мимикрии с использованием подхода трансформационной оптики. Продемонстрировано, что материальные параметры в таких плащах мимикрии имеют несингулярный характер. Проведено численное моделирование плащей мимикрии и произведена оценка эффективности их работы.

Ключевые слова: плащ мимикрии, координатная трансформация, численный метод

1. Введение

Созданию плащей невидимости с использованием подхода трансформационной оптики посвящены многочисленные работы, начиная с работ [1] и [2]. Данный подход основан на факте инвариантности формы уравнений Максвелла относительно координатных преобразований, при этом изменение материальных параметров определяется видом этих преобразований. Основные усилия исследователей были сосредоточены на решении амбициозной задачи полного сокрытия тела от внешнего наблюдателя, т. е. достижении полной невидимости.

Разработка таких плащей сопряжена с решением ряда проблем, одной из которых является проблема сингулярности материальных параметров.

В работе [3] была исследована несингулярная координатная трансформация, при которой на внутреннюю границу плаща отображается не точка, а цилиндр малого радиуса (окружность для двумерной задачи). Такой несингулярный плащ не обеспечивает полной невидимости, а только снижает величину рассеяния от идеально проводящего цилиндра большего радиуса (который

он покрывает) до величины рассеяния от идеально проводящего цилиндра меньшего радиуса (от которого производится трансформация).

Возникает вопрос, возможно ли создание плаща, который обеспечит покрытому им телу мимикрию под тело другой формы, так чтобы для внешнего наблюдателя тело, покрытое плащом, выглядело как тело другой формы.

В настоящей работе продемонстрирована возможность создания таких плащей – плащей мимикрии. Представлены расчеты плащей, обеспечивающих мимикрию цилиндра квадратного сечения под круговой и кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения (двумерные задачи).

2. Методика конструирования плащей

При координатной трансформации компоненты материальных параметров в трансформированной системе координат связаны с компонентами материальных параметров в исходной системе координат следующими соотношениями (см. [4]):

$$\varepsilon' = \frac{J\varepsilon J^T}{\det(J)}, \quad \mu' = \frac{J\mu J^T}{\det(J)}, \quad (1)$$

где J представляет якобианову матрицу трансформации, состоящую из элементов вида

$$J_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^j},$$

которые представляют собой производную трансформированных координат по исходным координатам, а J^T – транспонированную якобианову матрицу. Материальные параметры ϵ и μ в выражении (1) предполагаем равными 1 (см. [5]).

Элементы якобиановой матрицы могут быть получены как аналитически, путем определения в явном виде зависимости между исходными и трансформированными координатами, так и численным методом.

Для конструирования плащей мимикрии мы используем координатную трансформацию, представленную на рис. 1. При такой трансформации внутренняя граница a отображается на a' , а внешняя граница b отображается на b' (т. е. сама на себя). Теперь нам необходимо найти зависимость между исходными и трансформированными координатами. Для этого мы используем численный подход, описанный в работах [5], [6]. Следуя [6], запишем уравнение Пуассона, которое вместе с граничными условиями $u'(a) = a'$, $u'(b) = b'$ будет характеризовать связь между исходными и трансформированными координатами в виде:

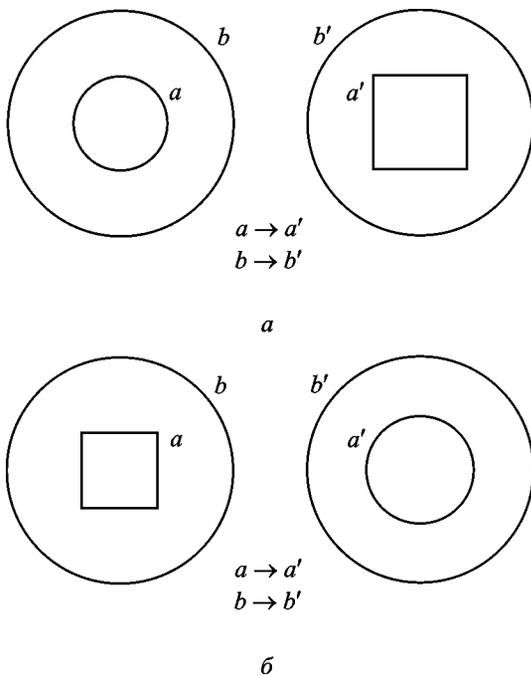


Рис. 1. Схемы координатной трансформации

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} \right) u_i = f_i(u_1, u_2, u_3); \\ u'(a) = a', \quad u'(b) = b'; \end{cases}$$

где u_i ($i = 1, 2, 3$) обозначает компоненты трансформированной координатной системы, а u_1, u_2, u_3 – компоненты первоначальной нетрансформированной координатной системы.

Необходимо отметить, что уравнение Пуассона вместе с граничными условиями имеет бесконечное множество решений, соответствующих различным функциям-источникам $f_i(u_1, u_2, u_3)$. В настоящей работе мы принимаем $f_i(u_1, u_2, u_3) = 0$.

С целью избежать сингулярности решений уравнения Пуассона, используется инверсная форма уравнения Пуассона подобно тому, как это сделано в работе [6], в виде:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3'^2} \right) u_i = f_i(u_1', u_2', u_3'); \\ u(a') = a, \quad u(b') = b. \end{cases} \quad (2)$$

Решая уравнение (2), мы получаем элементы обратной якобиановой матрицы $J_i^j = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}$ и затем находим прямую якобианову матрицу, как $J_j^i = (J_i^j)^{-1}$.

Для решения уравнения (2) нам необходимо задать граничные условия $u(a') = a$ и $u(b') = b$. Поскольку внешняя граница плаща отображается сама на себя, задание граничных условий сводится к определению зависимости между исходными и трансформированными координатами на внутренней границе.

Рассмотрим сначала задачу мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой (см. рис. 1, а). Получение указанной выше зависимости для этой задачи иллюстрирует рис. 2. Квадрат здесь представляет собой внутреннюю границу плаща мимикрии, на которой должно быть задано граничное условие в виде $u = x_1, u_2 = y_1$, где u и u_2 – координаты точки A' в новой трансформированной координатной системе, x_1 и y_1 представляют собой координаты точки A , а x и y – координаты точки A' в исходной системе. Естественно, что при задании граничных условий координаты любой точки, в том числе и точки A' на внутренней границе, нам известны, и по

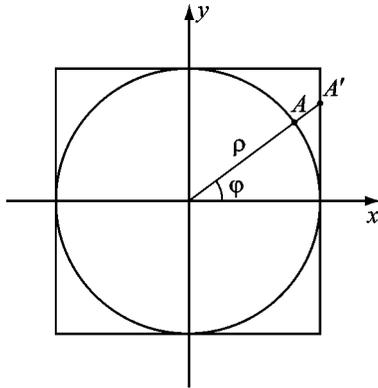


Рис. 2. Отображение точки на окружности на точку на квадрате

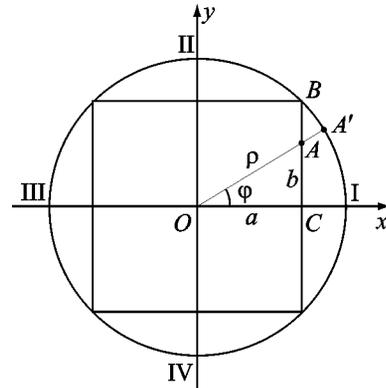


Рис. 3. Отображение точки на квадрате на точку на окружности

этим координатам мы должны найти координаты точки A .

Так как выполняемая нами координатная трансформация производится вдоль радиус-векторов полярной системы координат, то угловая координата имеет одинаковую величину для точек A и A' . Мы можем записать ее через декартовы координаты как

$$\varphi = \arctg(y/x).$$

Если радиус окружности известен, то мы легко находим x_1 и y_1 по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(\varphi), \\ y_1 &= \rho \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к задаче мимикрии кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения (см. рис. 1, б). Как и в предыдущем случае, нам необходимо определить зависимость между исходными и трансформированными координатами на внутренней границе (см. рис. 3). Для этого случая мы не можем использовать такой простой подход, как в случае трансформации окружности в квадрат, поскольку нам не известна длина OA . Выделим 4 области (I – IV), как изображено на рис. 3.

В области I мы ищем зависимость координат точки A (x_1 и y_1) от координат точки A' . Аналогично поступаем и в областях II – IV. Получаем следующие результаты:

- область I – $y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi, \quad x_1 = a;$
- область II – $x_1 = y_1 \operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi), \quad y_1 = a;$
- область III – $y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi, \quad x_1 = -a;$
- область IV – $x_1 = y_1 \operatorname{tg}(3\pi/2 - \varphi), \quad y_1 = -a.$

3. Численное моделирование

Численное моделирование проводилось с использованием программы COMSOL Multiphysics, которая обеспечивает решение задач методом конечных элементов. Исследовалась двумерная задача для случая падения плоской E -поляризованной волны. В принципе, выбор поляризации может быть произвольным. Длина волны во всех экспериментах составляла 0.12 м.

На внутренней границе плаща граничные условия для всех задач мимикрии имеют вид:

$$u = x_1, \quad u_2 = y_1, \tag{3}$$

где величины x_1 и y_1 берутся из соответствующих выражений.

На внешней границе плаща граничные условия для задач мимикрии имеют вид:

$$u = x, \quad u_2 = y. \tag{4}$$

Решая уравнения Пуассона (для u и u_2 координат) вместе с граничными условиями (3) и (4), мы находим связь между трансформированными и исходными координатами, определяем элементы якобиановой матрицы и затем компоненты диэлектрической и магнитной проницаемостей ($\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yx}, \mu_{yy}, \epsilon_{zz}$).

Пространственное распределение компонент материальных параметров для плаща мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой цилиндр приведено на рис. 4. Несложно заметить, что значения компонент малы (не имеют сингулярностей).

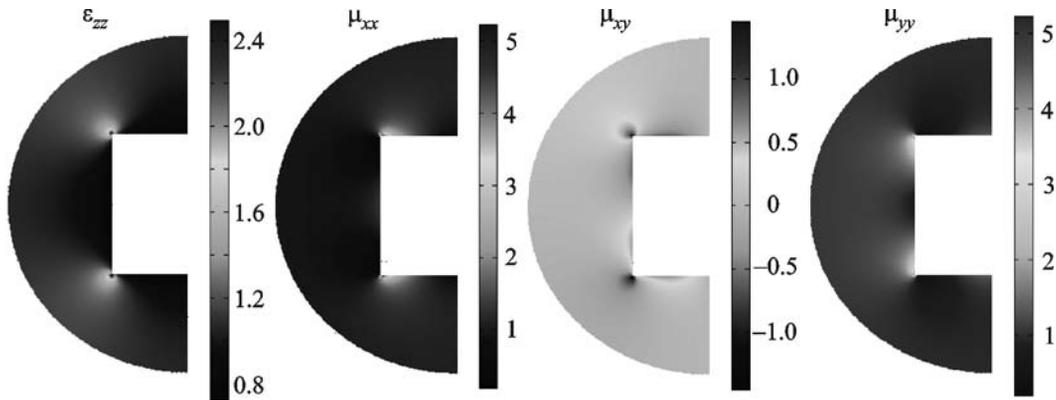


Рис. 4. Пространственное распределение компонент материальных параметров в плаще мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой

На рис. 5, а представлены результаты расчета абсолютного значения рассеянного электрического поля в дальней зоне $|E|$ при рассеянии от проводящего кругового цилиндра и при рассеянии от плаща мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой цилиндр. Круговой цилиндр имеет радиус 0.125 м, цилиндр квадратного сечения имеет размеры 0.25×0.25 м, внешний радиус плаща составляет 0.3 м. Видно, что в дальней зоне диаграммы рассеяния практически полностью совпадают.

Аналогичные диаграммы при рассеянии от цилиндра квадратного сечения и при рассеянии от плаща мимикрии кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения представлены на рис. 5, б. Падающая волна распространяется перпендикулярно одной из сторон квадрата. Круговой проводящий цилиндр имеет радиус $\rho = 0.125$ м, цилиндр квадратного сечения имеет размеры $(2\rho/\sqrt{2}) \times (2\rho/\sqrt{2})$, внешний радиус плаща равен 0.3 м.

Были произведены оценки работы плаща мимикрии в ближней зоне. На рис. 6, а представле-

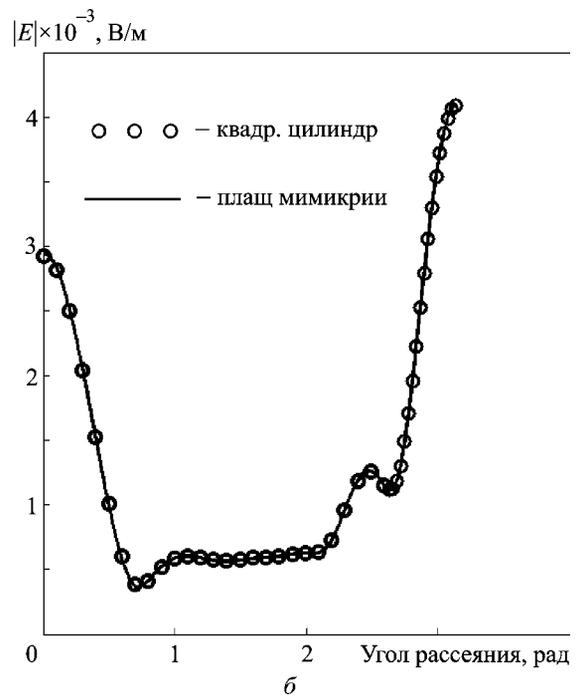
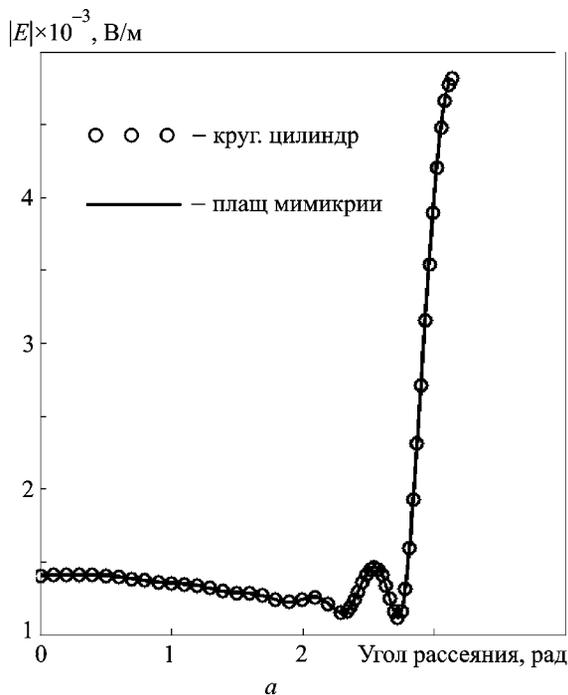


Рис. 5. Диаграммы рассеяния кругового цилиндра и плаща мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой (а) и цилиндра квадратного сечения и плаща мимикрии кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения (б)

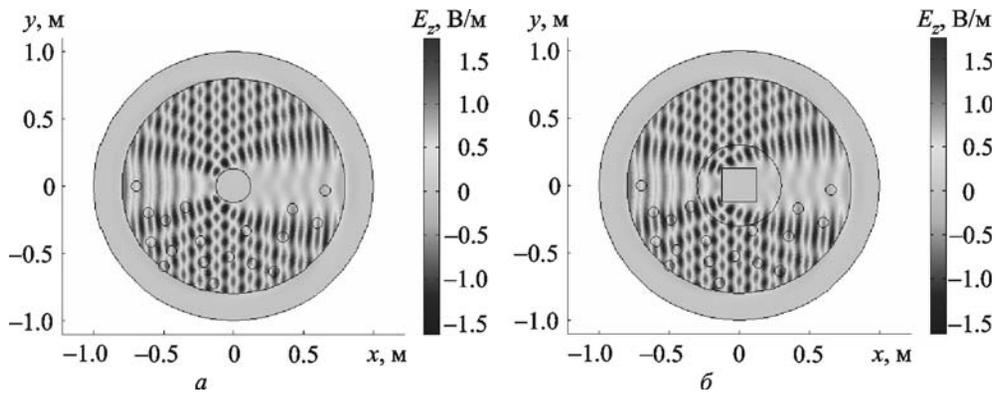


Рис. 6. Распределение z -компоненты электрического поля вблизи идеально проводящего кругового цилиндра (а) и вблизи плаща мимикрии цилиндра квадратного сечения под круговой (б)

но распределение компоненты полного поля при рассеянии плоской волны от кругового идеально проводящего цилиндра, а на рис. 6, б – от плаща мимикрии идеально проводящего цилиндра квадратного сечения под круговой. Кружочки на рисунках обозначают произвольно выбранные точки, в которых мы оценивали абсолютное значение E_z -компоненты полного поля и абсолютное значение z -компоненты рассеянного поля, $|scE_z|$. Полученные результаты сведены в табл. 1.

Аналогичные распределения поля получены и для случая цилиндра квадратного сечения (рис. 7, а) и плаща мимикрии кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения (рис. 7, б). Результаты также помещены в табл. 1.

Из таблицы видно, что значения как полного, так и рассеянного поля в выбранных точках при рассеянии от тела, под которое производится мимикрия, и от плаща мимикрии совпадают с точностью до 2–3 знака после запятой.

4. Заключение

В настоящей работе показана возможность создания плаща мимикрии, т. е. такого плаща, что для внешнего наблюдателя покрытое им тело представляется телом другой формы. Разработана методика расчета таких плащей.

Показано, что значение компонент материальных параметров в таких плащах невелики и, таким образом, имеют несингулярный характер, что в принципе открывает возможности для физических экспериментов.

Проведено численное моделирование и анализ рассеяния от плащей мимикрии и от тел, под которые производится мимикрия. Полученные результаты показывают, что диаграммы рассеяния от плащей мимикрии и от тел, под которые производится мимикрия, практически полностью совпадают. Сравнение абсолютных значений полей в произвольно выбранных точках в ближней зоне также показало хорошее совпадение.

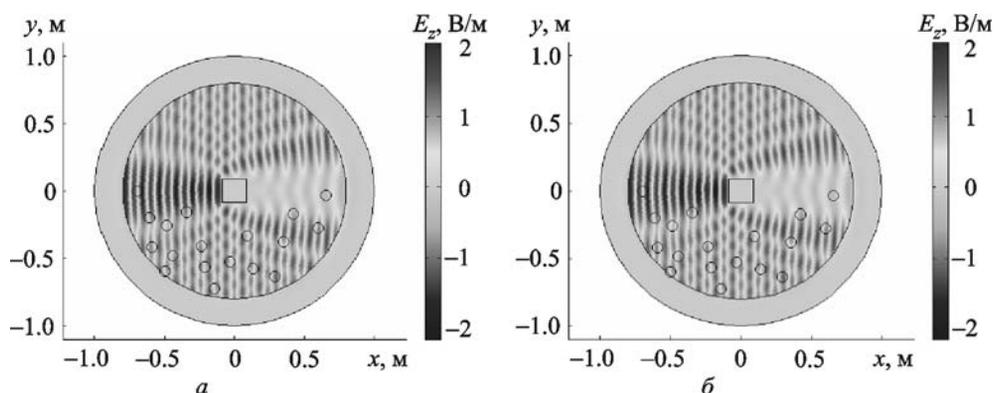


Рис. 7. Распределение z -компоненты электрического поля вблизи идеально проводящего цилиндра квадратного сечения (а) и вблизи плаща мимикрии кругового цилиндра под цилиндр квадратного сечения (б)

Таблица 1. Значения z-компонент полного и рассеянного поля

№ точки	$ E_z $, В/м		$ scE_z $, В/м	
	Круговой цилиндр	Плащ мимикрии	Круговой цилиндр	Плащ мимикрии
1	1.27727519	1.27734398	0.31527009	0.31534726
2	1.29509793	1.29516546	0.32817156	0.32821206
3	0.70381577	0.70383814	0.30201414	0.30202870
4	0.97344040	0.97370425	0.28280327	0.28274917
5	1.22261672	1.22268252	0.35391356	0.35394050
6	1.03023504	1.02993840	0.31260506	0.31256159
7	0.62987135	0.62983476	0.43840168	0.43840242
8	0.89792832	0.89762113	0.36131904	0.36118453
9	0.82635042	0.82617330	0.30903323	0.30887866
10	1.03084186	1.03098828	0.27086460	0.27071315
11	0.90713525	0.90696492	0.31750006	0.31738175
12	0.62193042	0.62200133	0.38222939	0.38212276
13	1.21006800	1.21010575	0.28380647	0.28372038
14	1.19665730	1.19652716	0.25797322	0.25786517
15	1.13181228	1.13195768	0.31011842	0.31022286
16	0.55814900	0.55811623	0.50898769	0.50898575
17	0.96711699	0.96706013	0.35189340	0.35190306
18	0.29903347	0.29901463	0.89739704	0.89726708
	Цилиндр квадр. сечения	Плащ мимикрии	Цилиндр квадр. сечения	Плащ мимикрии
1	0.63326499	0.63066557	0.63727195	0.64124544
2	0.67421368	0.67559091	0.42540529	0.42421413
3	1.06114650	1.05678416	0.12572735	0.12272155
4	0.87898267	0.87984356	0.12425387	0.12410331
5	0.81570858	0.81718900	0.23639334	0.23226591
6	1.12602958	1.12454161	0.13620971	0.13594152
7	1.34607980	1.34205903	0.34671791	0.34252700
8	1.07359316	1.07071913	0.17296934	0.17189225
9	1.00756167	1.00507618	0.14025211	0.13910685
10	0.92508354	0.92749720	0.12098482	0.11955333
11	1.04484051	1.04243530	0.15357032	0.15210210
12	0.87493085	0.87295329	0.22639335	0.22574787
13	1.01693442	1.01887640	0.15081336	0.15025389
14	1.14908342	1.14825756	0.14911121	0.14826381
15	0.89979651	0.90040392	0.29817651	0.29811291
16	0.68479390	0.68377260	0.49350101	0.49361931
17	1.11160624	1.11072051	0.34922469	0.34940690
18	0.34528173	0.34489487	0.79509170	0.79565284

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith Controlling electromagnetic fields // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1780–1782.
2. Leonhardt U. Optical conformal mapping // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1777–1780.
3. Vyunnik V. I. and Zvyagintsev A. A. Invisibility cloak with use non-singular coordinate transformation // Proc. of Int. Conf. Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM-11). – Kharkov (Ukraine) – 2011. – doi: 10.1109/LFNM.2011.6145044.
4. Rahm M., Schurig D., Roberts D. A., Cummer S. A., Smith D. R., and Pendry J. B. Design of electromagnetic

cloaks and concentrators using form-invariant coordinate transformations of Maxwell's equations // *Photon. Nano. Fund. Appl.* – 2008. – Vol. 6, Is. 1. – P. 87–95.

5. *Hu J., Zhou X., and Hu G.* Design method for electromagnetic cloak with arbitrary shapes based on Laplace's equation // *Opt. Express.* – 2009. – Vol. 17, No. 3. – P. 1308–1320.
6. *Ma J. J., Cao X. Y., Yu K. M., and Liu T.* Determination the material parameters for arbitrary cloak based on Poisson's equation // *Prog. Electromagn. Res. M.* – 2009. – Vol. 9. – P. 177–184.

V. I. V'yunik, A. A. Zvyagintsev

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

МІМІКРІЯ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПІДХОДУ ТРАНСФОРМАЦІЙНОЇ ОПТИКИ

Показана можливість створення анізотропних діелектричних плащів, які забезпечують покритому ними тілу мімікрію під тіло іншої форми, так що для зовнішнього спостерігача покрите таким плащем тіло виглядає як тіло іншої форми. Надається методика конструювання

плащів мімікрії з використанням підходу трансформаційної оптики. Продемонстровано, що матеріальні параметри в таких плащах мімікрії мають несингулярний характер. Виконано чисельне моделювання плащів мімікрії та оцінку ефективності їх роботи.

V. I. Vyunnik and A. A. Zvyagintsev

V. Kazarin National University of Kharkiv, 4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

MIMICRY OF OBJECTS WITH TRANSFORMATION OPTICS APPROACH

The possibility is shown to creation of anisotropic dielectric cloaks which provide the bodies they cover with a mimicry imitating the body of some other form which can be thus observed by the outside observer. The technique of designing mimicry cloaks with the use of transformation optics approach is presented. It is shown that the material parameters in such a mimicry cloak are of a nonsingular character. Numerical modelling of mimicry cloaks is carried out, and their work efficiency estimated.

Статья поступила в редакцию 23.11.2012